2tens Es sind zwey Seiten gegeben und der Winkel, den die Ebenen dieser Seiten bilden, man soll die zwey andern Winkel bestimmen.

3tens Es sind zwey Seiten gegeben, und der, einer von diesen Seiten gegenüberstehende Winkel, man soll die beyden andern Winkel bestimmen.

Erste Aufgabe.

Es sind die drey Seiten einer Pyramide gegeben, man soll die drey Winkel bestimmen.

364. Auflösung. Die drey gegebenen Winkel seyen auf einer nemlichen Ebene aufgewickelt, und es seyen (Taf. XXXV. Fig. 2.) S A oder S F, S B, S E die in dieser betrachteten Kanten der Pyramide, deren Winkel zu bestimmen sind. Nehmen wir die zwey Kanten S B, S E fest auf der Ebene der Seite B S E an, und lassen wir die Geraden S A und S F, die Eine um die Gerade S B, die Andere um die Gerade S E sich drehen. Durch diese Bewegung werden zwey gerade Kegelflächen erzeugt, welche einen nemlichen Scheitel haben: die gerade Durchschnittslinie dieser zwey Kegel ist die dritte Kante der Pyramide. Um diese Gerade zu finden, nehme man auf den Geraden S A, S F zwey, von dem Scheitel S gleichweit entfernte Punkte A, F. Man wird leicht einsehen, daß diese Punkte bey der Bildung der Pyramide in einen Einzigen zusammen fallen müssen; und daß der Punkt A einen Kreisbogen (A B I, A C) von einem Halbmesser A B beschrieben wird, dessen Ebene senkrecht auf das Scharnier S B ist, und daß der Punkt F einen Kreisbogen (F E I′, F C′) beschreiben wird, dessen Halbmesser F E, und dessen Ebene senkrecht auf S E ist. Daher werden die Punkte A, F sich in einem Punkte des Raumes vereinigen, der horizontal in D, und vertikal in C und C′ projektirt ist, in welchen Punkten die aus D, auf A B und F E senkrecht errichteten Geraden D C, D C′ die respektiven Kreisbögen A C, F C′ durchschneiden. Es folgt hieraus, daß wenn man die Geraden B C zieht, in dem rechtwinkligen Dreyeck C D B der Winkel C B D gleich sey dem Winkel, den die Seiten B S E und B S A einschließen. Zieht man die Gerade C′ E, so ist aus demselben Grunde der Winkel C′ E D gleich dem Winkel der Seiten B S E und E S F.

365. Anstatt die Pyramide auf die Ebene der Seite B S E aufzuwickeln, hätte man die Ebene der Seite A S B als die der Aufwicklung nehmen können; und man hätte nach dem, im vorstehenden Artikel beschriebenen Verfahren den Winkel der zwey Seiten A S B und F S E gefunden. Dieser Winkel läßt sich aber weit einfacher bestimmen, wenn man S A = S F nimmt, und bemerkt, daß nach der Bildung der Pyramide die Punkte

A und F sich vereinigen, und daß die wechselseitig auf S A und S F senkrechten Geraden A G, F H den gesuchten Winkel messen. Nun aber, wenn man durch diesen nemlicheu Geraden eine Ebene annimmt, so wird diese die Seite B S E nach einer Geraden G H schneiden, und die Pyramide nach einem Dreyecke, in welchem G H, G A und H F die Seiten sind, wenn man daher dieses Dreyeck G K H über G H als Grundlinie konstruirt, so ist der, dieser Grundlinie entgegenstehende Winkel G K H, gleich dem dritten gesuchten Winkel der Pyramide.

Die Geraden A B, B I, I F sind die Seiten eines andern Dreyeckes C B I, in dem der Winkel B, welcher der Seite C I gegenüber steht, gleich ist, den schon gefundenen Winkel (Art. 364.) der Seiten A S B, B S E.

Die gegebenen Seiten der Pyramide könnten statt spitzer Winkel stumpfe Winkel seyn; die Figur 2 würde in diesem Falle die Figur 3, in welcher die gleichbedeutenden Punkte mit den nemlichen Buchstaben bezeichnet sind. Wir bemerken jedoch, daß wenn die Aufgabe möglich seyn soll, die drey Seiten der Pyramide weniger als vier rechte Winkel betragen müssen, und daß die größte dieser Seiten kleiner seyn müsse als die Summe der beyden Andern.

366. Wir haben im ersten Kapitel (Art. 42.) die Art angegeben, wie die Reduktion eines Winkels auf den Horizont zu finden sey. Diese Aufgabe läßt sich auch nach dem vorstehenden Verfahren behandeln, denn wenn man die zwey Seiten des gegebenen Winkels, und die durch den Scheitel desselben gehende Vertikallinie als die Kanten einer dreyseitigen Pyramide betrachtet, in welcher die drey Seiten bekannt sind, so ist der Winkel, den die Seiten einschließen, deren Ebenen sich nach der Vertikalen schneiden, ebenfalls gleich dem auf den Horizont reduzirten Winkel.

Zweyte Aufgabe.

In einer dreyseitigen Pyramide sind zwey Seiten bekannt, und der Winkel, den die Ebenen dieser Seiten bilden; man soll die beyden andern Winkel und die dritte Seite der Pyramide bestimmen?

367. Auflösung. Die Aufgabe kommt darauf zurück, die dritte Seite zu finden, denn hat man diese, so sind alle drey Seiten bekannt, und man konstruirt die zwey unbekannten Winkel nach der Lösung der vorhergehenden Aufgabe. Um die unbekannte Seite zu bestimmen; seyen (Taf. XXXV. Fig. 4.) A S B, B S E die zwey gegebenen Seiten, auf der Ebene der Zweyten E S B aufgewickelt.