Zweytes Kapitel.

Von der dreyseitigen Pyramide.

Aufgabe.

In einer dreyseitigen Pyramide, wenn man abstrahirend von der Basis, nur die sechs Winkel betrachtet, nemlich die Winkel der drey Kanten, welche als gemeinschaftlichen Scheitel den Scheitel der Pyramide haben, und die, durch die drey Ebenen der Kanten gebildeten Flächenwinkel, seyen drey von den sechs Winkeln gegeben; man verlangt die drey Anderen zu finden?

360. Auflösung. Wir unterscheiden die von den Kanten gebildeten Winkel von den Flächenwinkeln der Pyramide, indem wir die Ersten Seiten der Pyramide nennen, und für die Letzteren die Benennung Winkel der Pyramide beybehalten. Die Verbindungen der sechs Winkel der Pyramide (der drey Seiten, und der drey Winkel) zu drey und drey sind sechs an der Zahl, nemlich:

1tens Drey Seiten.

2tens Zwey Seiten und ein Winkel, welcher durch die Ebenen der Seiten gebildet wird.

3tens Zwey Seiten und ein gegenüberstehender Winkel von einer der Seiten.

4tens Eine Seite und die zwey dieser Seite anliegenden Winkel.

5tens Eine Seite und zwey Winkel, von denen nur einer der Seite anliegend ist.

6tens Drey Winkel.

Angenommen, daß die drey in irgend einer der sechs vorstehenden Verbindungen bezeichneten Winkel gegeben seyen, so ist die Frage, die drey andere Winkel zu finden, welche die Pyramide vervollständigen. Dieses bietet sechs Fälle dar, die man einzeln auflösen kann, die sich aber, mittelst der Betrachtung der Supplementar-Pyramide auf drey zurückbringen lassen.

Wir wollen zuerst erklären, wie man diese Pyramide bildet, und wir werden alsdann für jede Aufgabe eine direkte, und von der Supplementar-Pyramide unabhängige Auflösung geben.

361. Betrachtet man in einer Pyramide die drey Kanten, welche sich in dem Scheitel derselben vereinigen, so wird man eine zweyte Pyramide bilden, wenn man drey Ebenen wechselsweise senkrecht auf die drey Kanten der Ersten führt. Die Winkel und

die Seiten dieser neuen Pyramide haben als Supplemente die Seiten und die Winkel der Pyramide, von welcher sie hergeleitet ist, und aus diesem Grunde nennt man sie ihre Supplementar- oder Ergänzungs-Pyramide. Bevor wir beweisen, daß ein Winkel oder eine Seite jeder von ihnen als Supplement eine Seite oder einen Winkel der Andern hat: müssen wir noch bemerken, daß wenn man die Punkte des Raumes, durch die man jene Ebenen führt, welche die Supplementar-Pyramide einschließen, verändert, zwar die Stellung des Scheitels dieser Pyramide sich verändert, aber daß die Werthe ihrer Winkel keine Abänderung erleiden.

362. Es seyen (Taf. XXXV. Fig. 1.) S A, S B zwey von den drey Kanten einer Pyramide; A und B seyen zwey, auf den Kanten S A, S B beliebig genommene Punkte. Die Ebenen, welche durch A und B, senkrecht auf die respektiven Kanten S A und S B geführt sind, haben als Risse auf der Ebene der zwey Kanten die Geraden A X, B X, von denen die Eine senkrecht auf S A ist, und die Andere senkrecht auf S B. Nun sind in dem Vierecke A S B X die Winkel A und B rechte, der Winkel X ist daher das Supplement des Winkels S; aber der Winkel S ist eine Seite der ersten Pyramide, und der Winkel X ist ein Winkel der Supplementar-Pyramide, daher ist von diesen zwey Winkeln S und X Einer das Supplement des Andern. Es ergiebt sich aus demselben Grunde, daß da die Ebene einer Seite der Supplementar-Pyramide senkrecht auf die Ebenen zweyer Seiten der primitiven Pyramide ist, der Winkel dieser zwey Ebenen das Supplement der Seite der Supplementar-Pyramide sey.

363. Nachdem wir sonach bewiesen haben, daß zwey Pyramiden, von denen die Erste durch Ebenen gebildet wird, welche senkrecht auf die Kanten der Zweyten sind, Eine ergänzend zu der Andern sey, ist leicht einzusehen, daß die sechs genannten Aufgaben, (Art. 360.) sich auf drey zurückbringen lassen. Denn in der That, wenn man drey Winkel A, B, C, einer Pyramide giebt, so sind die Supplemente dieser Winkel die Seiten der Supplementar-Pyramide; nun aber kann man, da die drey Seiten bekannt sind, und in der Voraussetzung, daß die Erste der sechs Aufgaben (Art. 360.) gelößt sey, die drey Flächenwinkel bestimmen; aber diese Winkel sind die Supplemente der Seiten der Pyramide, von welcher die drey Winkel A, B, C gegeben sind, daher sind die sechs Winkel dieser letzten Pyramide bestimmt. Man sieht demnach, daß die erste und die sechste Aufgabe auf eine Einzige zurückkommen. Auf dieselbe Weise läßt sich darthun, daß die zweyte und die vierte, die dritte und die fünfte Aufgabe sich jedesmal auf eine Einzige zurückbringen lassen. Alle Aufgaben der dreyseitigen Pyramide sind daher in den folgenden drey begriffen.

1tens Es sind die drey Seiten gegeben, man soll die drey Winkel bestimmen.

2tens Es sind zwey Seiten gegeben und der Winkel, den die Ebenen dieser Seiten bilden, man soll die zwey andern Winkel bestimmen.

3tens Es sind zwey Seiten gegeben, und der, einer von diesen Seiten gegenüberstehende Winkel, man soll die beyden andern Winkel bestimmen.

Erste Aufgabe.

Es sind die drey Seiten einer Pyramide gegeben, man soll die drey Winkel bestimmen.

364. Auflösung. Die drey gegebenen Winkel seyen auf einer nemlichen Ebene aufgewickelt, und es seyen (Taf. XXXV. Fig. 2.) S A oder S F, S B, S E die in dieser betrachteten Kanten der Pyramide, deren Winkel zu bestimmen sind. Nehmen wir die zwey Kanten S B, S E fest auf der Ebene der Seite B S E an, und lassen wir die Geraden S A und S F, die Eine um die Gerade S B, die Andere um die Gerade S E sich drehen. Durch diese Bewegung werden zwey gerade Kegelflächen erzeugt, welche einen nemlichen Scheitel haben: die gerade Durchschnittslinie dieser zwey Kegel ist die dritte Kante der Pyramide. Um diese Gerade zu finden, nehme man auf den Geraden S A, S F zwey, von dem Scheitel S gleichweit entfernte Punkte A, F. Man wird leicht einsehen, daß diese Punkte bey der Bildung der Pyramide in einen Einzigen zusammen fallen müssen; und daß der Punkt A einen Kreisbogen (A B I, A C) von einem Halbmesser A B beschrieben wird, dessen Ebene senkrecht auf das Scharnier S B ist, und daß der Punkt F einen Kreisbogen (F E I′, F C′) beschreiben wird, dessen Halbmesser F E, und dessen Ebene senkrecht auf S E ist. Daher werden die Punkte A, F sich in einem Punkte des Raumes vereinigen, der horizontal in D, und vertikal in C und C′ projektirt ist, in welchen Punkten die aus D, auf A B und F E senkrecht errichteten Geraden D C, D C′ die respektiven Kreisbögen A C, F C′ durchschneiden. Es folgt hieraus, daß wenn man die Geraden B C zieht, in dem rechtwinkligen Dreyeck C D B der Winkel C B D gleich sey dem Winkel, den die Seiten B S E und B S A einschließen. Zieht man die Gerade C′ E, so ist aus demselben Grunde der Winkel C′ E D gleich dem Winkel der Seiten B S E und E S F.

365. Anstatt die Pyramide auf die Ebene der Seite B S E aufzuwickeln, hätte man die Ebene der Seite A S B als die der Aufwicklung nehmen können; und man hätte nach dem, im vorstehenden Artikel beschriebenen Verfahren den Winkel der zwey Seiten A S B und F S E gefunden. Dieser Winkel läßt sich aber weit einfacher bestimmen, wenn man S A = S F nimmt, und bemerkt, daß nach der Bildung der Pyramide die Punkte

A und F sich vereinigen, nnd daß die wechselseitig auf S A und S F senkrechten Geraden A G, F H den gesuchten Winkel messen. Nun aber, wenn man durch diesen nemlicheu Geraden eine Ebene annimmt, so wird diese die Seite B S E nach einer Geraden G H schneiden, und die Pyramide nach einem Dreyecke, in welchem G H, G A und H F die Seiten sind, wenn man daher dieses Dreyeck G K H über G H als Grundlinie konstruirt, so ist der, dieser Grundlinie entgegenstehende Winkel G K H, gleich dem dritten gesuchten Winkel der Pyramide.

Die Geraden A B, B I, I F sind die Seiten eines andern Dreyeckes C B I, in dem der Winkel B, welcher der Seite C I gegenüber steht, gleich ist, den schon gefundenen Winkel (Art. 364.) der Seiten A S B, B S E.

Die gegebenen Seiten der Pyramide könnten statt spitzer Winkel stumpfe Winkel seyn; die Figur 2 würde in diesem Falle die Figur 3, in welcher die gleichbedeutenden Punkte mit den nemlichen Buchstaben bezeichnet sind. Wir bemerken jedoch, daß wenn die Aufgabe möglich seyn soll, die drey Seiten der Pyramide weniger als vier rechte Winkel betragen müssen, und daß die größte dieser Seiten kleiner seyn müsse als die Summe der beyden Andern.

366. Wir haben im ersten Kapitel (Art. 42.) die Art angegeben, wie die Reduktion eines Winkels auf den Horizont zu finden sey. Diese Aufgabe läßt sich auch nach dem vorstehenden Verfahren behandeln, denn wenn man die zwey Seiten des gegebenen Winkels, und die durch den Scheitel desselben gehende Vertikallinie als die Kanten einer dreyseitigen Pyramide betrachtet, in welcher die drey Seiten bekannt sind, so ist der Winkel, den die Seiten einschließen, deren Ebenen sich nach der Vertikalen schneiden, ebenfalls gleich dem auf den Horizont reduzirten Winkel.

Zweyte Aufgabe.

In einer dreyseitigen Pyramide sind zwey Seiten bekannt, und der Winkel, den die Ebenen dieser Seiten bilden; man soll die beyden andern Winkel und die dritte Seite der Pyramide bestimmen?

367. Auflösung. Die Aufgabe kommt darauf zurück, die dritte Seite zu finden, denn hat man diese, so sind alle drey Seiten bekannt, und man konstruirt die zwey unbekannten Winkel nach der Lösung der vorhergehenden Aufgabe. Um die unbekannte Seite zu bestimmen; seyen (Taf. XXXV. Fig. 4.) A S B, B S E die zwey gegebenen Seiten, auf der Ebene der Zweyten E S B aufgewickelt.

Es sey A B eine auf die Kante S B senkrechte Ebene, in welcher der Winkel C B D gegeben ist, den jene zwey Seiten einschließen. Da die Ebene (S B, B C) die gegebene Seite A S B enthält, so befindet sich der Punkt A der Kante S A in einer Höhe über der Horizontalebene, gleich der auf A B D senkrechten Geraden C D. Wenn man daher durch die Gerade (D, C D) eine Ebene D E senkrecht auf die Kante S E I führt, so enthält diese Ebene das Dreyeck C′ E D, in dem der Winkel, welcher der Seite D C′ = D C gegenüber steht, gleich ist dem Winkel der Ebene der dritten Seite, und der Ebene der Seite B S E. Verlängert man die Gerade D E um das Stück E F = E C′, und zieht die Gerade S F, so ist der Winkel E S F offenbar gleich der dritten gesuchten Seite.

Konstruirt man die Pyramide mit den drey Seiten A S B, B S E und E S F, so vereinigen sich die Punkte A, C, F in einen Einzigen, woraus sich ergiebt, daß die Geraden S A, S F Halbmesser eines nemlichen, aus S als Mittelpunkt beschriebenen Kreises sind.

Die Ebene A B D schneidet die Pyramide nach einem Dreyecke C B I, in welchem die Seite C B = B A, und die Seite C I = I F. Die zwey Geraden I F, E F, und die zwey aus den Mittelpunkten E und S beschriebenen Kreisbögen A F, C′ F laufen daher nach dem nemlichen Punkt F der Kante S F zusammen, und folglich bestimmen zwey beliebige von diesen Linien, durch ihren Schnitt die Kante S F der gesuchten Seite I S F.

Wenn man statt des Winkels C B D das Supplement A B C desselben als den zwischen den zwey Seiten A S B, B S E eingeschlossenen Winkel genommen hätte, so würde man nach derselben Konstruktion den Winkel I S F′ als dritte Seite der Pyramide gefunden haben.

Dritte Aufgabe.

Es sind in einer Pyramide zwey Seiten bekannt, und ein Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüber steht; man soll die dritte Seite bestimmen?

368. Auflösung. Es seyen B S E und E S F (Taf. XXXV. Fig. 5.) die zwey gegebenen, und auf die Ebene des Winkels B S E aufgewickelten Seiten der Pyramide; es sey H′ *b* E der Winkel, welcher durch die Ebene, die die Seite B S E enthält, und durch die Ebene der zu suchenden Seite eingeschlossen wird. Die Geraden S *b* B und (*b* E, *b* H′) bestimmen die Stellung einer Ebene, welche die gesuchte Seite enthält. Denken wir uns nun, daß die Kante S F sich um die Kante S E als Schar-

nier drehe; so wird sie in dieser Bewegung eine Kegelfläche erzeugen, deren kreisförmige Basis (F D, F a f f') in einer auf das Scharnier senkrechten Ebene F D enthalten ist. Nun aber schneidet diese Ebene die Ebene (S b B, b H') der gesuchten Seite nach der Geraden (G E, G H). Wenn daher die Kante S F in der Ebene der gesuchten Seite liegt, so befindet sich der Punkt F derselben in f oder f', und die Aufgabe ist also einer doppelten Lösung fähig.

Beschäftigen wir uns zuerst mit dem Punkt f: wenn man die Ebene (S B, b H',) sich um S B G als Scharnier drehen läßt, um sie auf die Ebene der bekannten Seite B S E zurückzulegen, so verändern sich die Abstände des Punkts f von den Punkten G und S des Scharniers nicht; daher ist der Punkt A, der Durchschnittspunkt der aus den Mittelpunkten G und S und mit Halbmessern gleich G f und S F beschriebenen Kreisbögen, die Stellung des Punkts f, wenn derselbe auf die Ebene der Seite B S E zurückgelegt ist, und A S B ist die, dem Punkt f entsprechenden dritte Seite der Pyramide. Man findet auf gleiche Weise den Winkel A' S B als dritte Seite der Pyramide, welche dem Punkt f' entspricht. Sind die drey Seiten bekannt, so sind auch die drey Winkel bestimmt. (Art. 364.)

369. Wir haben schon (Art. 306.) bewiesen, daß die drey letzten Aufgaben, (Art. 360.) über die Winkel der dreyseitigen Pyramide, sich auf die drey ersten zurückbringen lassen, was sich auf die folgende Weise noch mit mehr Ausführlichkeit thun läßt. Bezeichnen wir mit A, B, C, die Flächenwinkel der Pyramide, und mit a, b, c, die Seiten, welche diesen Winkeln gegenüberstehen; so haben wir so eben folgende Aufgaben gelößt:

1tens Wenn die drey Seiten a, b, c bekannt sind, die drey Winkel A, B, C zu finden?

2tens Wenn die zwey Seiten a, b bekannt sind, und der zwischen inne liegende Winkel C, die drey anderen Winkel c, A, B zu finden?

3tens Wenn die zwey Seiten a, b bekannt sind, und der nicht zwischenliegende Winkel A oder B, die drey Winkel c, C, B oder A zu finden.

Nehmen wir nun an, man gebe die drey Winkel A, B, C einer Pyramide, und es sollten die drey Seiten a, b, c gefunden werden, so kennt man in der Supplementar-Pyramide die drey Seiten a', b', c', welche nach einander gleich sind

$$180° — A,\quad 180° — B,\quad 180° — C.$$

Man leitet daraus drey Winkel A', B', C' ab, welche wechselsweise den drey Seiten a', b', c' gegenüberstehen; aber man hat nach der Eigenschaft der Supplementar-Pyramide:

$$A' = 180° - a; \quad B' = 180° - b; \quad C' = 180° - c;$$

woraus folgt, daß die drey gesuchten Seiten a, b, c die Supplemente der bekannten Winkel A′, B′, C′ sind, was die Lösung der sechsten Aufgabe (Art. 360.) giebt.

Gehen wir zu der fünften Aufgabe über. Es sind zwey Winkel A, B gegeben, und eine Seite c, an welcher diese Winkel anliegen; zu suchen sind der unbekannte Winkel C und die zwey Seiten a, b.

Die Supplementar-Pyramide ist hier gebildet aus zwey Seiten (180° — A), (180° — B) und aus einem Winkel (180° — c), der zwischen den Ebenen jener zwey Seiten gefaßt ist.

Wir haben diese drey Winkel oben nacheinander mit den Buchstaben a', b', C′ bezeichnet. Konstruirt man die Supplementar-Pyramide, so erhält man die Seite c', und die zwey Winkel A′, B′.

Aber man hat:

$$c' = 180° - C; \quad B' = 180° - b; \quad A' = 180° - a;$$

und es folgt daraus, daß die gesuchten Winkel C, b und a die Supplemente der bekannten Winkel c', B′, A′ sind.

Die letzte Aufgabe besteht darin, zwey Seiten a, b und den nicht eingeschlossenen Winkel A zu finden, wenn die Seite c und die zwey Winkel C und B bekannt sind. Die Supplementar-Pyramide hat somit als Seiten c', b' die zwey Supplemente (180° — C), (180° — B), und als den, der ersten dieser zwey Seiten entgegenstehenden Winkel C′ das Supplement (180° — c). Konstruirt man diese Pyramide, so findet man die Seite a', und die zwey Winkel A′, B′, welche folgende Werthe haben.

$$(180° - A), \quad (180° - a), \quad (180° - b);$$

das heißt die Supplemente der drey verlangten Winkel A, a, b.

Wir werden nun eine, von der Betrachtung der Supplementar-Pyramide unabhängige Lösung der drey letzten Aufgaben geben.

Vierte Aufgabe.

Es sind drey Winkel einer Pyramide gegeben, man verlangt die drey Seiten?

370. **Auflösung.** Wir wollen die drey Winkel mit A, B, C bezeichnen. Nachdem man zwey Ebenen geführt hat, die unter einem Winkel gegeneinander geneigt sind,

gleich einem der gegebenen, gleich A zum Beyspiel, so besteht die Aufgabe darin, eine Ebene zu bestimmen, welche durch einen beliebig im Raume genommenen Punkt geht, und welche mit jenen zwey ersten Ebenen Winkel bildet, gleich B und C.

Diese dritte Ebene wird die gerade Durchschnittslinie der beyden Ersten in einem Punkte treffen, welcher der Scheitel, der durch die drey Ebenen gebildeten Pyramide ist.

Es seyen A, B, C (Taf. XXXV. Fig. 6. *a*) die drey gegebenen Winkel. Nehmen wir die Ebene der einen zu suchenden Seite als horizontale Projektionsebene an. In dieser Ebene sey die Gerade S B (Fig. 6.) die Durchschnittslinie derselben und einer dergestalt geführten schiefen Ebene, daß ihr beyderseitiger Neigungswinkel gleich einem der gegebenen Winkel sey, gleich A, (Fig. 6. *a*) zum Beyspiel. Diese schiefe Ebene wird sich auf eine, auf S B senkrechte Vertikalebene F B C nach einer Geraden B *c* projektiren, so daß der Winkel F B *c* = A (Fig. 6. *a*). Ist dieses geschehen, so stellen wir uns vor, die noch zu bestimmende dritte Ebene sey geführt; denken wir uns aus irgend einem Punkt der Geraden S B, aus B zum Beyspiel eine Senkrechte auf die dritte Ebene gefällt, und suchen wir die Projektionen des Fußpunktes dieser Senkrechten auf der dritten Ebene.

Zu diesem Ende denken wir uns durch die Senkrechte eine Ebene senkrecht auf den Durchschnitt der Horizontalebene und der dritten Ebene geführt. Die zwey Geraden, nach welchen diese Ebene die beyden genannten schneidet, werden mit der Senkrechten ein rechtwinkliges Dreyeck bilden, in welchem der, der Senkrechten entgegenstehende Winkel gleich einem der beyden Winkel B, C (Fig. 6. *a*) ist; wir wollen ihn gleich B annehmen. Wenn man die Größe des Stückes der Senkrechten, was zwischen dem Punkt B (Fig. 6.) und ihrem Fußpunkte auf der dritten Ebene gefaßt ist, als bekannt annimmt, gleich $\beta\ \alpha$ (Fig. 6. *b*) zum Beyspiel, so sind alle übrigen Stücke jenes Dreyecks bestimmt; $\beta\ \gamma$ wäre demnach die Basis, $\alpha\ \alpha'$ die Höhe, und der Winkel $\beta\ \gamma\ \alpha = B$ (Fig. 6. *a*). Es ist aber auch ersichtlich, daß $\alpha'\ \beta$ gleich ist dem Abstande der Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten von dem Punkt B (Fig. 6.). Wenn man daher aus diesem Punkt B als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser $B\ A = \beta\ \alpha'$ (Fig. 6. *b*) einen Kreisbogen beschreibt, so muß irgendwo in diesem Kreisbogen die Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten auf der dritten Ebene gelegen seyn.

Sofort denke man sich durch die nemliche Senkrechte eine zweyte Ebene senkrecht auf den Durchschnitt der beyden geneigten Ebenen der Pyramide geführt; so wird diese die beyden geneigten Ebenen nach zwey Geraden schneiden, die mit der Senkrechten ein zweytes rechtwinkliges Dreyeck bilden, in welchem der Winkel gegenüber der Senkrechten gleich ist, dem Winkel C (Fig. 6. *a*). Da nun die Größe der Senkrechten bekannt ist, so läß sich dieses Dreyeck $\beta\,\alpha\,\delta$ (Fig. 6. c) konstruiren. Es wird hieraus ersichtlich, daß der Abstand des Fußes der Senkrechten von der Ebene (S B, B c) (Fig. 6.) gleich seyn muß, der Höhe $\alpha\,\alpha''$ des Dreyeckes $\beta\,\alpha\,\delta$ (Fig. 6. c). Wenn man daher auf der vertikalen Projektionsebene (Fig. 6.) zu der B c eine Parallele zieht, die um eine Weite $a'\,a'' = \alpha\,\alpha''$ (Fig. 6. c) von ihr entfernt ist, so muß in dieser Parallele, indem man sie als die Projektion einer zu (S B, B c) parallelen Ebene betrachtet, die Vertikalprojektion des Fußes der Senkrechten auf der dritten Ebene enthalten seyn. Da aber dieser Fußpunkt in einer Höhe über der Horizontalebene liegt, gleich der Höhe $\alpha\,\alpha'$ des Dreyeckes $\beta\,\alpha\,\gamma$ (Fig. 6. b), so muß seine Projektion auf der Vertikalebene F B C (Fig. 6.) in der Horizontalen $m\,m$ liegen, deren Entfernung von F C gleich ist der Höhe $\alpha\,\alpha'$ (Fig. 6. b). Diese Projektion ist daher in a, dem Begegnungspunkte der Geraden $a\,a'$, $m\,m$ (Fig. 6).

Aus dem Punkte a errichte man auf F C die Senkrechte a A, welche verlängert den Kreisbogen A M A′ in zwey Punkten A, A′ schneidet, und man hat in A oder A′ die Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten auf der dritten Ebene. Nimmt man den Punkt A, so sind A B, B a die Projektionen des Stückes der Senkrechten zwischen der dritten Ebene und dem Punkt B.

Um nun die Durchschnitte dieser dritten Ebene mit den beyden andern zu erhalten, mache man B G = $\beta\,\gamma$ (Fig. 6. b) und ziehe G S senkrecht auf A B, so ist dieses die zweyte Kante der gesuchten Pyramide, und der Scheitel derselben ist in S. Die verlängerte Gerade G S trifft die Projektionsaxe in F; man ziehe F c senkrecht auf B a und man hat den Vertikalriß der dritten Ebene. Dieser und der Riß B c schneiden sich in dem Punkt (C, c); man ziehe die Gerade S C, so ist (S C, B c) die Durchschnittslinie der beyden geneigten Ebenen, oder die dritte Kante der Pyramide, welche somit ganz bestimmt ist.

371. Hätte man den Punkt A′ als Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten angenommen, so würde man eine Pyramide erhalten haben, die mit der erstgefundenen symetrisch wäre, in Bezug auf die Ebene F B C.

Die drey Ebenen, welche die Pyramide bilden, deren Winkel gleich A, B, C sind, theilen den ganzen Raum in acht Pyramiden. Diese Pyramiden sind zu zwey und zwey symetrisch, aber nur ein Paar von ihnen hat Winkel gleich den drey gegebenen A, B, C. Von den drey andern Paaren hat jegliche Pyramide nur einen Winkel gleich einem der gegebenen, die beyden andern Winkel sind die Supplemente der beyden übrigen gegebenen Winkel.

Fünfte Aufgabe.

Es sind in einer Pyramide zwey Winkel gegeben, und die Seite, an welcher diese Winkel anliegen; man soll die zwey andern Seiten konstruiren?

372. Auflösung. (Taf. XXXV. Fig. 7.) Es sey B S E die gegebene Seite, C *b d* und C″ *d′ d″* die zwey bekannten Winkel, von denen der Eine an der Kante B S anliegt, und der Andere, an der Kante E *S*; zu bestimmen sind die zwey anderen Seiten.

Nachdem man durch einen beliebig genommenen Punkt C der Geraden C *b* eine Parallele C D zu B S geführt hat, und zu E S eine derartige Parallele C″ D, daß diese Parallelen als die Projektionen zwey anderen Geraden entsprechen, welche in einer zur Ebene der Seite B S E parallelen Ebene, in der Entfernung C *d* oder C″ *d″* von dieser Ebene angenommen sind; so werden sich jene Parallelen in einem Punkte D schneiden, welcher die Projektion in eines Punkts der dritten Kante der Pyramide auf der Ebene der Seite B S E ist. Läßt man die zwey Ebenen (S B, *b* C) und (S E, *d′* C″), die Eine um die Gerade S B, die Andere um die Gerade S E sich drehen, so fällt dadurch der Punkt der Kante, von welchem D die Projektion ist, in der Ebene der Seite B S E auf eine der Geraden D B A und D E F, welche wechselseitig aus D senkrecht auf S B und S E gezogen sind. Ueberdies ist dieser Punkt in einem Abstande von dem Scheitel S der Pyramide, gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, welches als anliegende Seiten an dem rechten Winkel die Geraden D S und *d* C oder *d″* C″ hat. In der Aufwicklung liegt daher dieser Punkt auf dem Kreisbogen, welcher aus S als Mittelpunkt und mit jener Hypothenuse als Halbmesser beschrieben ist, und er liegt folglich in der Begegnung dieses Kreises mit der Geraden D A und D F; daher sind die Winkel E S F und A S B die zwey gesuchten Seiten.

Man würde die Punkte A und F auch konstruirt haben, wenn man bemerkt, daß A B = *b* C und daß E F = *d′* C″.

Sechste Aufgabe.

Es sind zwey Winkel gegeben, und die, einem derselben gegenüberstehende Seite, man verlangt die zwey anderen Seiten?

373. Auflösung. (Taf. XXXV. Fig. 8.) Es sey B S D die gegebene Seite; C B D der Winkel der Ebene dieser Seite, mit der Ebene (S B, B C), welche die zweyte Seite enthält, B C′ D′ der Winkel dieser letzten Ebene mit derjenigen, welche die dritte Seite enthält. Die Aufgabe besteht darin, durch die Gerade D S eine Ebene zu führen,

welche mit der Ebene (S B, B C) einen Winkel bilde gleich B C′ D′. Diese letzte Bedingung ist aber gleichbedeutend mit der, eine tangirende Ebene zu einem geraden kreisförmigen Kegel zu führen, dessen Axe senkrecht auf die Ebene (B S, B C) ist, und dessen Erzeugungslinie mit dieser Ebene den bestimmten Winkel macht.

374. Nachdem man daher den Punkt D als Scheitel eines geraden Kegels genommen, wovon die Senkrechte D L auf B C′ die Axe ist, und dessen Kante D C mit B C einen Winkel B C D gleich B C′ D′ macht, so lege man die Ebene (B S, B C) auf die Ebene der Seite B S D zurück; wodurch die in dieser Ebene enthaltene Basis des Kegels, deren Halbmesser L C ist, in den Kreis C″ A A′ versetzt wird, der als Halbmesser die Gerade C″ L′ = C L hat, und dessen Mittelpunkt ein Punkt L′ der Geraden B D ist, so daß L′ B = B L. Zieht man aus dem Punkt S an diesen Kreis die Tangente S A, so ist der Winkel A S B die an B S D anliegende Seite; denn die Ebene, welche durch S D und S A geht, ist offenbar tangirend zu dem Kegel, dessen Axe L D ist, und sie bildet daher mit der Ebene (S B, B C′) einen Winkel gleich dem gegebenen Winkel B C′ D′.

Hätte man die Tangente S A′ an den Kreis A C″ A′ gezogen und den Winkel B S A′ als die an S B anliegende Seite genommen, so würde die durch S D und S A′ geführte Ebene ebenfalls mit der Ebene (B S, C C′) einen Winkel gleich dem gegebenen B C′ D′ gebildet haben, allein der in der Pyramide eingeschlossene Winkel dieser beyden Ebenen wäre nicht mehr der Winkel B C′ D′ selbst, sondern seine Ergänzung.

Sind zwey Seiten B S D und A S B oder A′ S B bekannt, und der von ihnen eingeschlossene Winkel, so vollende man die Auflösung wie bereits angegeben. (Art. 367.)

375. Die sechs so eben gelösten Aufgaben über die dreyseitige Pyramide schließen die ganze sphärische Trigonometrie ein. Der Mittelpunkt der Kugel, auf welcher ein sphärisches Dreyeck verzeichnet ist, kann als der Scheitel einer dreyseitigen Pyramide betrachtet werden, welche als Kanten die drey durch die Scheitel des sphärischen Dreyecks geführten Halbmesser der Kugel hat. Die Winkel, welche diese Halbmesser unter sich bilden, und welche zu Maaßen die Seite des Dreyecks haben, sind die Seiten der Pyramide. Dasjenige, was man einen Winkel des sphärischen Dreyecks nennt, ist ein Flächenwinkel der Pyramide.

Es sey O (Fig. 9. Taf. XXXV.) der Mittelpunkt einer Kugel; die drey Halbmesser O A, O B, O C bestimmen das sphärische Dreyeck A B C, welches als Seiten die Bögen größter Kreise A B, A C, B C hat, welche zwischen diesen Halbmessern gefaßt sind. Zieht man durch den Mittelpunkt O der Kugel drey andere Halbmesser O A′, O B′, O C′, wechselsweise senkrecht auf die Ebenen der Seiten C B, A C, A B des ersten sphärischen Dreyecks, so bildet man ein zweytes Dreyeck A′ B′ C′, welches supplementirend zu dem Ersten ist. In der That bezeichnen wir, wie oben durch A, B, C, die Flächenwinkel des sphärischen Dreyecks, welche Winkel in senkrechten Ebenen auf die Halbmesser O A, O B, O C gemessen werden; und durch *a*, *b*, *c*, die, wechselsweise den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten C B, A C, A B; so sind die Flächenwinkel A′, B′, C′ des Dreyecks A′ B′ C′ die Supplemente der Seiten *a*, *b*, *c* des Dreyecks A B C; und wenn man mit *a*′, *b*′, *c*′ die den Winkeln A′, B′, C′ gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks A′ B′ C′ benennt; so sind diese Seiten wechselsweise die Supplemente der Winkel A, B C. So zum Beyspiel, da die Seite *a*′, die dem Winkel A′ gegenübersteht, zwischen den zwey Halbmessern O B′, O C′ gefaßt ist, welche senkrecht auf die Ebenen der Seiten *b*, *c* des primitiven Dreyecks A B C sind, so ist die Ebene dieser Seite *a*′ senkrecht auf den Halbmesser O A, den Durchschnitt der Ebenen der Seiten *b* und *c*; man hat daher in dieser Ebene, wie in jener der Figur 1. ein Viereck A S B X von zwey rechten Winkeln A und B, und von zwey Winkeln S, X, wovon der Eine gleich ist der Seite *a*′ des sphärischen Dreyecks A′ B′ C′, und der Andere gleich dem Flächenwinkel A des sphärischen Dreyecks A B C; woraus sich ergiebt, daß die Winkel *a*′ und A Supplemente zu einander sind.

Drittes Kapitel.

Gebrauch der geometrischen Oerter zur Lösung verschiedener Aufgaben.

376. Man nennt bekanntlich geometrischen Ort eines Punkts diejenige Fläche oder Linie, welche zu Folge gewisser Bedingungen diesen Punkt enthalten muß, und geometrischen Ort einer Linie, die Fläche, welche der Bedingung unterliegt, durch diese Linie zu gehen. Wenn ein Punkt als geometrischen Ort eine Linie hat, so bestimmen zwey dieser Linien die Stellung desselben, sind hingegen krumme Flächen die geometrischen Oerter eines Punktes, so sind drey dieser Flächen zu seiner Bestimmung erfoderlich.

Die Elementar-Geometrie bietet sehr viele Beyspiele dar, von dem Gebrauche der geometrischen Oerter. Zum Beyspiel, die Lösung der Aufgabe: durch drey in einer Ebene gegebene Punkte einen Kreis zu führen, ist auf die Betrachtung gegründet, daß der Mittelpunkt des zu suchenden Kreises durch das Zusammentreffen