Epicycloide als Horizontalprojektion einen Punkt E des Halbmessers S C, so daß C E gleich ist der Horizotalprojektion B ε des Durchmessers B e des beweglichen Kreises.

354. Da der Bogen A C D des festen Kreises an Länge gleich ist dem ganzen Umfange des beweglichen Kreises, so gehört der Punk D der sphärischen Epicycloide an, und er kann als der Ursprung eines weiteren Zweiges der Epicycloide betrachtet werden, welcher dem ersten gleich wäre, und welcher als Horizontalprojektion eine Kurve hätte, die von der A E D in nichts abwiche.

355. Es ergiebt sich aus dieser Konstruktion, daß die sphärische Epicycloide aus einer unendlichen Anzahl gleicher Zweige zusammengesetzt ist, die sich auf eine, auf die Axe des festen Kegels senkrechte Ebene nach gleichen Kurven projektiren; 2tens daß diese Zweige auf der kreisförmigen Basis des festen Kegels Rückkehrpunkte haben; 3tens daß der zwischen zwey aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten gefaßte Bogen jener Basis an Länge gleich ist dem ganzen Umfange des beweglichen Kreises.

Konstruktion der Tangente zu der sphärischen Epicycloide.

356. Erste Art. Es sey der Punkt der sphärischen Epicycloide, an welchem man die Tangente verlangt in f' auf dem beweglichen Kreise vom Durchmesser B E′ angenommen; er hat daher als Horizontalprojektion den Punkt F′ und als Projektion auf der Vertikalebene S E′ den Punkt f. Die verlangte Tangente ist (Art. 351.) senkrecht auf die Ebene der Geraden, die aus dem Punkte (F′, f) nach den Mittelpunkten (S, s), B der zwey Kugeln geführt sind, von denen jede ein Element der Epicycloide enthält. Nun aber trifft die erste Gerade (S F′, s f) die Horizontalebene im Punkt V; die Zweyte geht durch den Punkt B; daher hat die Ebene der zwey Geraden (S F′, s f), (B F′, B f) als Riß auf der Horizontalebene die Gerade B V und auf der Vertikalebene die Gerade s B, daher hat die verlangte Tangente als Horizontal- und Vertikalprojektion, die auf die Geraden V B, s B wechselsweise senkrechten Geraden F′ T, f t, und sie trifft die Horizontalebene im Punkte (T, t).

357. Zweyte Art. Es sey abermals f' der gegebene Punkt der Epicycloide, dessen Horizontalprojektion F′ ist. Die Tangente an diesem Punkt ist (Art. 351.) der gerade Durchschnitt zweyer tangirenden Ebenen, Einer zu der Kugel, welche ihren Mittelpunkt in dem Scheitel (S, s) des beweglichen und des festen Kegels hat, und der Anderen, zu der Kugel, welche als Halbmesser die Gerade f' B hat, und als Mittelpunkt den Berührungspunkt B des festen und des beweglichen Kreises, auf welchen sich der Punkt f' der Epicycloide befindet. Da der durch f' geführte Halbmesser der ersten Kugel als Horizontalprojektion die Gerade S F′ hat, so ist der Riß der Ebene,

welche diese Kugel im Punkt f' berührt, senkrecht auf dieselbe Gerade S F'; überdies geht diese Ebene durch die Tangente $f'\ l$ zu dem Kreise B $f'\ g'$ E'; aber diese Tangente schneidet die Horizontalebene in dem Punkte l der Tangente B l N des festen Kreises, daher hat die tangirende Ebene zu der ersten Kugel als Riß auf der Horizontalebene die auf S F' senkrechte Gerade $l\ m$.

Die tangirende Ebene am Punkt f' zu der zweyten Kugel, geht durch die Tangente f' N zu dem großen Kreise dieser Kugel, der aus B als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser gleich B f' beschrieben ist; aber diese Tangente schneidet die Horizontalebene in dem Punkt N der Geraden B $l\ n$, welche den festen Kreis in dem Punkt B berührt; wenn man daher aus diesem Punkt N eine Senkrechte N p auf die Horizontalprojektion B F' des Halbmessers B f' fällt, so ist diese Senkrechte der Horizontalriß der tangirenden Ebene zu der zweyten Kugel; sie trifft den Riß $l\ m$ der tangirenden Ebene zu der ersten Kugel in einem Punkt T der Tangente zu der Epicycloide. Daher berührt die durch T und F' geführte Gerade die Horizontalprojektion der Epicycloide in dem Punkt F'.

358. Da die tangirende Ebene zu der zweyten Kugel am Punkt f' senkrecht ist auf den Halbmesser B f', und auf die Ebene des beweglichen Kreises B $f'\ g'$ E', so geht sie durch die Gerade $r\ e\ p$, welche senkrecht auf die Ebene B e des beweglichen Kreises, und durch den Punkt e desselben geführt ist. Nun aber schneidet diese Gerade $r\ e\ p$ die Horizontalebene im Punkt p; daher ist die Gerade N p der Riß der tangirenden Ebene zu der zweyten Kugel, und diese Gerade muß senkrecht auf die Horizontalprojektion B F' des Halbmessers seyn, der durch den Berührungspunkt f' geht.

Die tangirende Ebene in f' zu der Kugel vom Halbmesser B f', da sie senkrecht auf die Ebene des beweglichen Kreises ist, schneidet diese letztere Ebene nach der Geraden f' E', welche durch den Endpunkt E' des Durchmessers B E' geht, woraus folgt, daß diese Gerade die Projektion der, durch den Punkt f' geführten Tangente zu der Epicycloide auf die Ebene des beweglichen Kreises sey.

Die tangirende Ebene zu der Kugel, vom Halbmesser B f' am Punkt f' des beweglichen Kreises B $f'\ g'$ ist auch tangirend zu dem Kegel, welcher als Leitlinie die sphärische Epicycloide, und als Mittelpunkt den Punkt r der Geraden S s hat, in welchem diese Gerade von der Senkrechten $p\ e\ r$ an dem Endpunkt des Durchmessers B e getroffen wird; dieses ist einleuchtend, denn jene Ebene geht durch eine Tangente zu der Kurve, welche dem Kegel als Leitlinie dient. Es ist aber wichtig zu bemerken, daß man bey irgend einer Stellung K I γ des beweglichen Kreises auf diesem Kreise einen Punkt γ der sphärischen Epicycloide habe, so daß die Ebene, welche durch die Gerade γ I geführt ist, und senkrecht auf die Gerade γ K, die den Punkt γ der Epicycloide und den Berührungspunkt K des festen und des beweglichen Kreises verbindet, tangirend zu dem Kegel ist, der seinen Mittelpunkt' in r hat, und als Leitlinie die sphärische Epicycloide. In der That, da der Winkel K γ I ein rechter ist, so geht die Seite γ I dieses Winkels nothwendig durch I, den Endpunkt des Durchmessers K I des beweglichen Kreises. Die Ebene γ I, welche man senkrecht auf die, in der Ebene des beweglichen Kreises gelegene Gerade K γ geführt hat, und folglich senkrecht auf dieselbe Ebene, geht durch die Gerade, welche man durch den Punkt I senkrecht auf die Ebene des beweglichen Kreises führte; aber diese letztere Gerade schneidet die Axe (S, S s) in dem Punkt (S, r), weil dieser Punkt der Mittelpunkt des, durch die Gerade (S E', r e) bey ihrer Umdrehung um die Gerade (S, S s) erzeugten geraden Kegels ist; daher ist sowohl die durch den Punkt γ der sphärischen Epicycloide gehende Ebene γ I, als die, durch den Punkt f' dieser Kurve gehende Ebene f' E' tangirend zu dem Kegel, welcher seinen Mittelpunkt in (S, r) hat, und dessen Leitlinie die sphärische Epicycloide ist.

359. Welches demnach die Stellung des bewegliche Kreises sey, so sind auf diesem Kreise drey Punkte zu unterscheiden: 1tens der Erzeugungspunkt der Epicycloide; 2tens der Berührungspunkt des festen und des beweglichen Kreises; 3tens der Endpunkt des Durchmessers, welcher durch diesen Berührungspunkt geht. Hat man durch diesen letzten Punkt eine Senkrechte auf die Ebene des beweglichen Kreises errichtet, so schneidet diese Senkrechte die Axe des festen Kegels in einem vierten Punkte, welcher unveränderlich ist, gleich wie die Neigung der Ebene des beweglichen Kreises, in Bezug auf die Ebene des festen Kreises; die, durch diese Senkrechte, und durch den Erzeugungspunkt der sphärischen Epicycloide geführte Ebene ist tangirend zu dem Kegel, welcher als Mittelpunkt jenen vierten Punkt hat, und als Leitlinie die sphärische Epicycloide.