welche diese Entfernung als Halbmesser hat, und als Mittelpunkt den gemeinschaftlichen Scheitel der zwey Kegel. Diese Kugel schneidet die beyden Kegel nach zwey Kreisen, deren Ebenen unter sich einen Winkel bilden, gleich dem zwischen den Axen dieser Kegel eingeschlossenen. Der eine jener Kreise, welche die Basis des beweglichen Kegels bildet, berührt in allen seinen Stellungen den Kreis, welcher die Basis des festen Kegels ist, und bey jeder Stellung jenes ersten Kreises gehört ein Punkt desselben der Epicycloide.

Die aus diesem Punkt der Epicycloide nach dem Berührungspunkte des festen und des beweglichen Kreises gezogene Gerade hat eine veränderliche Größe; sie ist anfänglich Null; sie wächst sodann bis sie dem Durchmesser des beweglichen Kreises gleich ist; nimmt hierauf ab, und wird wieder Null; sie ist sehr nahe zu beständig, während der Erzeugungspunkt von einer Stellung zu einer andern unendlich nahen übergeht. In derselben Zeit verändert sich der Berührungspunkt des festen und des beweglichen Kreises um keine angebbare Größe; dieser Punkt kann daher als Mittelpunkt einer Kugel betrachtet werden, auf welcher sich das, durch den Erzeugungspunkt der Epicycloide beschriebene Element befindet. Es folgt hieraus, daß dieser Punkt in irgend einem Augenblick seiner Bewegung ein Kurvenelement beschreibt, welches zu gleicher Zeit auf zwey Kugeln liegt, auf einer, welche als Halbmesser die beständige Entfernung dieses Punkts von dem gemeinsamen Scheitel der zwey Kegel hat, und auf einer andern, welche als Halbmesser die veränderliche Entfernung desselben Punkts von demjenigen hat, worin der bewegliche Kreis den festen berührt; nun aber kann ein Kurvenelement nicht zu gleicher Zeit auf zwey Kugeln seyn, ohne daß es in dem Durchschnitt zweyer Ebenen liege, welche diese Kugeln berühren; daher ist die Tangente an irgend einen Punkt einer sphärischen Epicycloide die gerade Durchschnittslinie zweyer Ebenen, welche zwey Kugeln berühren, deren Mittelpunkte und Halbmesser gegeben sind. Diese Tangente ist senkrecht auf die Ebene, welche durch den Punkt der Epicycloide, und durch die Mittelpunkte der zwey Kugeln geführt ist.

Zeichnung der sphärischen Epicycloide.

352. (Taf. XXXIV. Fig. 2.) Indem wir die Axe des festen Kegels vertikal annehmen, beschreibe man auf der Horizontalebene den Kreis A B C D dieses festen Kegels, welcher beständig durch denjenigen Kreis des beweglichen Kegels, auf welchem sich der Erzeugungspunkt der Epicycloide befindet, berührt ist.

Es sey A B irgend ein Bogen des Kreises A B C D, der zwischen dem Ursprunge A der Epicycloide gefaßt ist und dem Berührungspunkte des Kreises A B C D mit dem beweglichen Kreise in irgend einer Stellung. Die Vertikalebene S B E′ enthält 1tens die Axen (S, S s), (S E', s s') der zwey Kegel; 2tens die Kante (S B, s B), nach welcher diese zwey Kegel sich berühren; 3tens den Winkel E' B e, welchen die horizontale Ebene des festen Kreises und die Ebene (n B, B e) des beweglichen Kreises unter einander bilden; 4tens den Durchmesser B e dieses beweglichen Kreises. Indem wir annehmen, daß die Ebene dieses letzten Kreises sich um ihren Horizontalriß n B drehe, um sich auf die Ebene des festen Kreises A B C D aufzulegen, und daß der Bogen B f des beweglichen Kreises von derselben Länge sey wie der Bogen A B des festen Kreises, so ist f' die Stellung des Erzeugungspunkts des Epicycloide, welche dem Berührungspunkt B entspricht, durch den die Berührungskante (S B, s B) der zwey Kegel geht. Die Horizontalprojektion F' des Punktes f' ist in der senkrechten Geraden f' F' auf die Gerade B n. Hat man f' F senkrecht auf den Durchmesser B E' gezogen, sodann aus dem Punkt B, als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser gleich B F einen Kreisbogen beschrieben, welcher die Gerade B e in f schneidet, so ist dieser Punkt f die Projektion des Punkts f' auf der Vertikalebene S B E'. Die Senkrechte f φ F', welche aus dem Punkt f auf den Durchmesser B E' gefällt ist, schneidet die Gerade f' F' in dem Punkt F', der Horizontalprojektion des Punkts f' der Epicycloide. Was die Höhe dieses Punkts f' über die Horizontalebene betrifft, so ist diese augenscheinlich gleich f φ.

353. Nehmen wir sofort an, der Berührungspunkt des festen und des beweglichen Kreises seye in K, anstatt in B; so kann man 1tens die Vertikalebene S K führen, welche die Axen der zwey Kegel enthält, 2tens dieselbe auf die Horizontalebene niederlegen, und einen Punkt G der Horizontalprojektion der Epicycloide finden, wie man den Punkt F' gefunden hat; allein die Anwendung einer zweyten Vertikalebene S K, ist hier nicht erfoderlich, da die erste S E' zu diesem Zwecke benutzt werden kann. In der That, es sey B f' g' ein Bogen des beweglichen Kreises von gleicher Länge mit dem Bogen A B K, so kann man den Kreis vom Durchmesser K I = B e verzeichnen, und bey diesem Kreise verfahren, wie bey dem vom Durchmesser B E', welcher den festen Kreis in dem Punkt B berührt. Betrachtet man diesen Punkt B als den Berührungspunkt K, so wäre die Horizontalprojektion des Punkts g' in G' auf der Senkrechten g' G' zu der Tangente B n des festen und des beweglichen Kreises. Zieht man die Gerade S G', B G', so bildet man das Dreyeck S B G', welches, nach S K G versetzt, den Punkt G bestimmt, der die Horizontalprojektion des Punkts g' des beweglichen Kreises ist, wenn dieser den festen Kreis im Punkt K berührt. Nimmt man den Berührungspunkt dieser zwey Kreise in C an, dem Endpunkte eines Bogens A C des festen Kreises, welcher an Länge gleich ist dem halben Umfange des beweglichen Kreises, so hat der Erzeugungspunkt der

Epicycloide als Horizontalprojektion einen Punkt E des Halbmessers S C, so daß C E gleich ist der Horizotalprojektion B ε des Durchmessers B e des beweglichen Kreises.

354. Da der Bogen A C D des festen Kreises an Länge gleich ist dem ganzen Umfange des beweglichen Kreises, so gehört der Punk D der sphärischen Epicycloide an, und er kann als der Ursprung eines weiteren Zweiges der Epicycloide betrachtet werden, welcher dem ersten gleich wäre, und welcher als Horizontalprojektion eine Kurve hätte, die von der A E D in nichts abwiche.

355. Es ergiebt sich aus dieser Konstruktion, daß die sphärische Epicycloide aus einer unendlichen Anzahl gleicher Zweige zusammengesetzt ist, die sich auf eine, auf die Axe des festen Kegels senkrechte Ebene nach gleichen Kurven projektiren; 2tens daß diese Zweige auf der kreisförmigen Basis des festen Kegels Rückkehrpunkte haben; 3tens daß der zwischen zwey aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten gefaßte Bogen jener Basis an Länge gleich ist dem ganzen Umfange des beweglichen Kreises.

Konstruktion der Tangente zu der sphärischen Epicycloide.

356. Erste Art. Es sey der Punkt der sphärischen Epicycloide, an welchem man die Tangente verlangt in f' auf dem beweglichen Kreise vom Durchmesser B E$'$ angenommen; er hat daher als Horizontalprojektion den Punkt F$'$ und als Projektion auf der Vertikalebene S E$'$ den Punkt f. Die verlangte Tangente ist (Art. 351.) senkrecht auf die Ebene der Geraden, die aus dem Punkte (F$'$, f) nach den Mittelpunkten (S, s), B der zwey Kugeln geführt sind, von denen jede ein Element der Epicycloide enthält. Nun aber trifft die erste Gerade (S F$'$, s f) die Horizontalebene im Punkt V; die Zweyte geht durch den Punkt B; daher hat die Ebene der zwey Geraden (S F, s f), (B F$'$, B f) als Riß auf der Horizontalebene die Gerade B V und auf der Vertikalebene die Gerade s B, daher hat die verlangte Tangente als Horizontal- und Vertikalprojektion, die auf die Geraden V B, s B wechselsweise senkrechten Geraden F$'$ T, f t, und sie trifft die Horizontalebene im Punkte (T, t).

357. Zweyte Art. Es sey abermals f' der gegebene Punkt der Epicycloide, dessen Horizontalprojektion F$'$ ist. Die Tangente an diesem Punkt ist (Art. 351.) der gerade Durchschnitt zweyer tangirenden Ebenen, Einer zu der Kugel, welche ihren Mittelpunkt in dem Scheitel (S, s) des beweglichen und des festen Kegels hat, und der Anderen, zu der Kugel, welche als Halbmesser die Gerade f' B hat, und als Mittelpunkt den Berührungspunkt B des festen und des beweglichen Kreises, auf welchen sich der Punkt f' der Epicycloide befindet. Da der durch f' geführte Halbmesser der ersten Kugel als Horizontalprojektion die Gerade S F$'$ hat, so ist der Riß der Ebene,