Spiralflächen.

350. Wenn man eine Linie, sich dergestalt um eine feste Gerade drehen läßt, daß jeder Punkt der Linie eine Spirale auf einem kreisförmigen Cylinder beschreibt, welcher als Axe die feste Gerade hat, und als Halbmesser die Entfernung des Punktes der Linie von derselben Geraden, so ist der geometrische Ort, der, durch alle Punkte jener Linie gleichzeitig beschriebenen Spiralen vom nemlichen Gange eine derjenigen krummen Flächen, welche man unter dem Namen der Spiralflächen oder Heliçoide begreift. Die feste Gerade ist die Axe der Fläche.

Bey der Art. 344. erklärten Entstehung der Schraubenlinie erzeugt die schiefe Gerade, während ihr Berührungspunkt die Schraubenlinie beschreibt, eine aufwickelbare Fläche, von welcher die genannte Schraubenlinie die Rückkehrkante ist. Man nennt diese auch aufwickelbares Heliçoid. Läge die schiefe Gerade anstatt in der tangirenden Ebene zu dem Cylinder, mit der Axe dieses Cylinders in einerley Ebene, so entstünde durch ihre Bewegung nothwendig eine Fläche, die zu dem Geschlechte der windischen gehörte, und die man auch windisches Heliçoid nennt.

Die Oberfläche der archimedischen = oder Wasserschraube, welche gleichfalls zu den windischen gehört, hat zur Erzeugungslinie eine Gerade, welche den drey Bedingungen unterliegt; 1tens durch die Axe eines geraden kreisförmigen Cylinders zu gehen, 2tens sich auf eine auf demselben Cylinder verzeichnete Schraubenlinie zu stützen, 3tens beständig senkrecht auf die Axe des Cylinders zu bleiben. Die nemliche Erzeugungsart hat auch die untere Fläche der gewöhnlichen Wendeltreppe.

Die Oberfläche eines gewöhnlichen Schraubengewindes ist durch dieselbe Bewegungsart, von einem gleichseitigen Dreyecke oder einem Quadrate erzeugt, was mit der Axe in einer Ebene liegt. Diese Oberfläche ist eigentlich nur ein Theil von Zweyen der oben genannten windischen Heliçoide.

Von der sphärischen Epicycloide.

351. Erklärung der Linie. Wenn von zwey geraden kreisförmigen Kegeln, welche einen nemlichen Scheitel haben, und welche sich berühren, der Eine fest und der Andere beweglich ist, so beschreibt irgend ein Punkt dieses Letzteren durch die Umwälzung desselben auf dem Ersten die sphärische Epicycloide.

Während der Umwälzung des beweglichen Kegels auf dem festen, verändert sich die Entfernung des Erzeugungspunktes der Epicycloide von dem gemeinschaftlichen Scheitel der zwey Kegel nicht; woraus sich ergiebt, daß die Epicycloide einer Kugel angehört, welche diese Entfernung als Halbmesser hat, und als Mittelpunkt den gemeinschaftlichen Scheitel der zwey Kegel. Diese Kugel schneidet die beyden Kegel nach zwey Kreisen, deren Ebenen unter sich einen Winkel bilden, gleich dem zwischen den Axen dieser Kegel eingeschlossenen. Der eine jener Kreise, welche die Basis des beweglichen Kegels bildet, berührt in allen seinen Stellungen den Kreis, welcher die Basis des festen Kegels ist, und bey jeder Stellung jenes ersten Kreises gehört ein Punkt desselben der Epicycloide.

Die aus diesem Punkt der Epicycloide nach dem Berührungspunkte des festen und des beweglichen Kreises gezogene Gerade hat eine veränderliche Größe; sie ist anfänglich Null; sie wächst sodann bis sie dem Durchmesser des beweglichen Kreises gleich ist; nimmt hierauf ab, und wird wieder Null; sie ist sehr nahe zu beständig, während der Erzeugungspunkt von einer Stellung zu einer andern unendlich nahen übergeht. In derselben Zeit verändert sich der Berührungspunkt des festen und des beweglichen Kreises um keine angebbare Größe; dieser Punkt kann daher als Mittelpunkt einer Kugel betrachtet werden, auf welcher sich das, durch den Erzeugungspunkt der Epicycloide beschriebene Element befindet. Es folgt hieraus, daß dieser Punkt in irgend einem Augenblick seiner Bewegung ein Kurvenelement beschreibt, welches zu gleicher Zeit auf zwey Kugeln liegt, auf einer, welche als Halbmesser die beständige Entfernung dieses Punkts von dem gemeinsamen Scheitel der zwey Kegel hat, und auf einer andern, welche als Halbmesser die veränderliche Entfernung desselben Punkts von demjenigen hat, worin der bewegliche Kreis den festen berührt; nun aber kann ein Kurvenelement nicht zu gleicher Zeit auf zwey Kugeln seyn, ohne daß es in dem Durchschnitt zweyer Ebenen liege, welche diese Kugeln berühren; daher ist die Tangente an irgend einen Punkt einer sphärischen Epicycloide die gerade Durchschnittslinie zweyer Ebenen, welche zwey Kugeln berühren, deren Mittelpunkte und Halbmesser gegeben sind. Diese Tangente ist senkrecht auf die Ebene, welche durch den Punkt der Epicycloide, und durch die Mittelpunkte der zwey Kugeln geführt ist.

Zeichnung der sphärischen Epicycloide.

352. (Taf. XXXIV. Fig. 2.) Indem wir die Axe des festen Kegels vertikal annehmen, beschreibe man auf der Horizontalebene den Kreis A B C D dieses festen Kegels, welcher beständig durch denjenigen Kreis des beweglichen Kegels, auf welchem sich der Erzeugungspunkt der Epicycloide befindet, berührt ist.

Es sey A B irgend ein Bogen des Kreises A B C D, der zwischen dem Ursprunge A der Epicycloide gefaßt ist und dem Berührungspunkte des Kreises A B C D mit dem beweglichen Kreise in irgend einer Stellung. Die Vertikalebene S B E′ enthält 1tens