Bestimmung der Tangente zu der cylindrischen Spirale, welche parallel zu einer gegebenen Ebene ist.

347. Da alle Tangenten zu der cylindrischen Spirale mit den Kanten des Cylinders einen unveränderlichen Winkel machen, so folgt daraus, daß sie sämmtlich parallel zu den Kanten eines geraden Kegels sind, welcher als Axe eine Parallele zu den Kanten des Cylinders hat, und daß es sonach keine Tangente zu der Spirale gebe, welche nicht ihre Parallele auf dem geraden Kegel habe. Hat man diesen Kegel konstruirt, so führe man durch seinen Scheitel eine Ebene, parallel zu der bekannten Ebene, und wenn diese den Kegel nach zwey Kanten schneidet, *) so sind die verlangten Tangenten Parallelen zu diesen Kanten. Sind die Richtungen der Tangenten bekannt, so bestimmt man die Punkte, in denen sie die Spirale berühren, wenn man beobachtet, daß die Projektionen der Tangenten zu der Spirale auf der Ebene der kreisförmigen Basis des Cylinders, Tangenten zu dieser Basis sind.

348. (Taf XXXIV. Fig. 1.) es sey (O, $d\,d'$) die Axe des Cylinders, auf welchem die Spirale verzeichnet ist. Man nehme auf dieser Axe einen Punkt (O, d) als Scheitel des geraden Kegels, der als Kante die Gerade $d\ l$ hat, welche mit d 4′ einen Winkel $l\ d$ 4′ macht, gleich jenem, den die Tangente zu der Spirale mit der Kante des Cylinders bildet. Die Grundlinie dieses Kegels ist der aus O, als Mittelpunkt und mit O P = 4′ l als Halbmesser beschriebene Kreis. Nehmen wir Z Z′, Z′ x als die Risse der gegebenen Ebene an, von welchen Rissen der Eine Z Z′ senkrecht auf die Projektionsaxe Y Y′ ist, so wird die durch (O, d) geführte, und zu der (Z Z′, Z′ x) parallelen Ebene den geraden Kegel nach zwey Geraden schneiden, die sich auf die Horizontalebene als die Halbmesser O S, O T, des aus dem Mittelpunkt O beschriebenen Kreises projektiren. Die Endpunkte S, T dieser Halbmesser bestimmen sich aus dem Zusammentreffen der Vertikalen S′ T und des aus dem Mittelpunkt O mit dem Halbmesser O P = 4′ l beschriebenen Kreises.

Die wechselsweise zu den Geraden O S, O T parallelen Tangenten U V, R Q zu dem geraden Schnitte des Cylinders sind die Horizontalprojektionen der zu der gegebenen Ebene parallelen Tangenten, und man erhält daher die Punkte V, Q als Horizontalprojektionen der Berührungspunkte.

Die aus Q, V auf Y, Y′ errichteten Senkrechten V v, Q q bestimmen die Verti-

---

*) Es ist einleuchtend, daß die Aufgabe aufhörte möglich zu seyn, wenn diese parallele Ebene, mit dem geraden Kegel außer dem Scheitel keinen Punkt mehr gemein hätte.

kalprojektionen v, q derselben Berührungspunkte, und die Parallelen $v\ u$, $q\ r$ zu dem Vertikalriß Y X der gegebenen Ebene sind die Vertikalprojektionen der Tangenten zu der Spirale an den Punkten (V, v), (Q, q).

Die verlängerten Vertikalen V v, Q q schneiden noch die Vertikalprojektion der Spirale in einer Reihe gleichentfernter Punkte wie v', q', bey welchen die Tangenten zu dieser Vertikalprojektion gleichfalls parallel zu dem Risse Y X der gegebenen Ebene (Z Z', Z' x) sind.

Wenn aufgegeben wäre, eine Tangente zu der Vertikalprojektion $a\ b\ c\ d$ der Spirale zu führen, welche parallel wäre zu einer gegebenen Geraden, so würde man diese Aufgabe auf dieselbe Weise wie die Vorstehende lösen, indem man die gegebene Gerade als den Riß einer auf die vertikale Projektionsebene senkrechten Ebene betrachtete.

349. Anmerkung. Die cylindrische Spirale besitzt die die Eigenschaft, die kürzeste Linie zu seyn, welche man auf einen Cylinder zwischen zwey Punkten dieser Fläche ziehen kann; um dieses einzusehen, bemerke man nur, daß die Ausdehnung einer Cylinderfläche sich nicht verändere, wenn man dieselbe aufwickelt, und daß folglich durch diese Aufwicklung die respektiven Entfernungen der verschiedenen Punkte der Fläche weder eine Ausdehnung noch einer Verkürzung erleiden; aber alsdann ist die kürzeste Entfernung zwischen zwey von diesen Punkten, die von Einem nach dem Andern gezogene Gerade, und diese Gerade wird auf dem Cylinder eine Spirale. Wenn man daher einen Faden nach einer Cylinderfläche biegt, indem man ihn leicht anzieht, so wird er vermöge dieser Spannung die Gestalt einer Spirallinie annehmen.

Das eben gesagte gilt nicht nur allein von den Cylinderflächen, sondern es läßt sich auf alle Kegelflächen und die andern aufwickelbaren Flächen anwenden. Die kürzeste Entfernung zwischen zwey ihrer Punkte wird auf der Fläche durch eine Linie angegeben, die sich bey der Aufwicklung in eine Gerade verwandelt, und diese ist folglich immer eine Art von Spirallinie.

Die auf einem geraden kreisförmigen Kegel verzeichnete Spirale hat als Projektion auf der Ebene der Basis nothwendig eine solche Linie, deren Punkte sich in einer beständigen Proportion dem Mittelpunkte der kreisförmigen Basis nähern, es ist dieses die gewöhnliche archimedische Spirallinie.

Selbst auf Flächen von zwey Krümmungen, wie zum Beyspiel auf der Kugel oder einem Sphäroide, lassen sich gewisse Arten von Spiralen zeichnen. Der Weg, den ein Schiff zurücklegt, um auf der kürzesten Linie von einem Punkte der Erde zu einem andern zu kommen, ist jene Linie, welche alle Meridianen unter einem nemlichen Winkel durchschneidet, das heißt eine Gattung von Spirallinien.