Viertes Buch.

Verschiedene Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Von einigen krummen Linien, die durch einen, nach gewissen Gesetzen sich bewegenden Punkt beschrieben sind.

343. Wir haben im vorigen Kapitel die krummen Linien von doppelter Krümmung betrachtet, als aus dem wechselseitigen Durchschnitte zweyer krummen Flächen entstehend; und unter diesem Gesichtspunkte kommen sie auch wirklich am häufigsten in den Anwendungen der darstellenden Geometrie vor. In diesem Falle haben wir auch gesehen, auf welche Weise man die Tangenten zu denselben ziehen könne. Aber so wie eine krumme Fläche mittelst der Gestalt und der Bewegung ihrer Erzeugungslinie bestimmt seyn kann, eben so kann eine krumme Linie durch das Gesetz der Bewegung eines Erzeugungspunktes gegeben seyn. Von dieser letzten Zahl sind die cylindrische Spirale und die sphärische Epicycloide jene, welche hauptsächlich in den Künsten angewendet werden, und deren Tangenten sich durch besondere Bedingungen bestimmen lassen.

Von der cylindrischen Spirale oder der Schraubenlinie.

344. Wenn man in der tangirenden Ebene zu irgend einem Cylinder eine Gerade zieht, welche mit der geraden Berührunglinie des Cylinders und der Ebene einen gewissen Winkel macht, und wenn man die Ebene sich um den Cylinder wälzen läßt, ohne daß sie eine Bewegung in der Richtung der geraden Erzeugungslinie desselben macht, so

zeichnet die geneigte Gerade auf dem Cylinder eine krumme Linie, welche man cylindrische Spirale oder Schraubenlinie nennt.

Es folgt aus dieser Erklärung, daß die Spirale sich auf der Aufwicklung des Cylinders in eine Gerade umwandle, und daß sie daher sowohl auf dieser Aufwicklung als auf dem Cylinder alle Geraden dieser Fläche unter dem nemlichen Winkel durchschneide. Wenn die Grundlinie des Cylinders, auf welchen man eine Spirale verzeichnet hat, eine geschlossene Linie ohne Knoten ist, so durchschneidet die Spirale in ihren verschiedenen Umwälzungen eine nemliche Gerade des Cylinders in einer Reihe gleich weit von einander stehender Punkte; die Entfernung zwey solcher aufeinanderfolgender Punkte heißt der Gang der Schraubenlinie. Die in den Künsten fast ausschließlich angewendete Spirale ist auf einem geraden kreisförmigen Cylinder verzeichnet.

Es sey (Taf XXXIV. Fig. a.) die Gerade H K ein Stück einer auf die Aufwicklung ihres angehörigen Cylinders übertragenen Spirale. Betrachten wir dieses Stück als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks H M K, welches als Seite K M eine Gerade des Cylinders hat, und als Seite H M ein Stück der Aufwicklung des geraden Schnittes des Cylinders; so ist, welches auch die Länge von H K sey, das Verhältniß dieser Seiten K M und H M immer dasselbe. Nehmen wir nun an, ein Punkt bewege sich von H aus nach der Richtung der Hypothenuse K H, so ist in jedem Punkte *f*, *g*, *l*, der K H die Entfernung dieses Punkts von der Basis H M proportional zu den entsprechenden Stücken H *r*, H *s*, H *t* dieser Basis.

Wenn man daher um einen Cylinder einer seiner Kanten sich drehen läßt, während ein Punkt längs dieser Kante dergestalt fortrückt, daß die von dem Punkte und der Kante durchlaufenen Räume proportional sind, so beschreibt der in Rede stehende Punkt eine Schrauben- oder Spirallinie.

Die cylindrische Spirale ist daher durch einen Punkt erzeugt, welcher, indem er sich um eine Axe dreht, in der, zu dieser Axe parallelen Richtung fortrückt, und zwar proportional zu der Quantität der Drehung, die er um dieselbe Axe macht.

Es ergiebt sich aus dieser Eigenschaft folgende Konstruktion der Spirale auf einem geraden Cylinder von kreisförmiger Basis.

Konstruktion der Spirale.

345. (Taf. XXXIV. Fig. 1.) Es sey 0 1 2 3.... 8... 12... 0 die kreisförmige Basis des geraden Cylinders; man theile dieselbe von dem Punkt 0, dem Ursprung der Spirale aus, in gleiche Bögen. Da der Gang der Spirale gegeben ist, so theile man denselben in die nemliche Anzahl gleicher Theile, und trage diese Theile auf die Geraden des Cylinders, welche durch die Theilpunkte 0, 1, 2, 3... des Umkreises gehen; nemlich einen Theil auf die Gerade des Punkts 1, zwey Theile auf die Gerade des Punkts 2, und so fort. Die Spirale geht durch die Endpunkte aller dieser Geraden, und hat ihren Ursprung in O.

Um die Projektion der Spirale auf eine zum Halbmesser O 0 parallele Vertikalebene Y Y′ zu konstruiren, projektire man auf diese Ebene die vertikalen Geraden des Cylinders, und trage auf diesen Projektionen von der Geraden Y Y′ aus, die zwischen der Horizontalebene und der Spirale gefaßten Längen der Geraden des Cylinders, so gehören ihre Endpunkte 0′, *a*, *b*, *c*, *d*, der Vertikalprojektion der Spirale.

Hat man zum Beyspiel den Umfang der Basis in sechszehn gleiche Theile getheilt, sodann aus dem Punkt 4 die Senkrechte 4 4′ *d* auf die Gerade Y Y′ errichtet, welche diese Gerade in dem Punkt 4′ schneidet, und man nimmt 4′ *d* gleich dem vierten Theil des Ganges der Spirale, so ist der Punkt *d* die Vertikalprojektion des Punkts der Spirale, dessen Horizontalprojektion 4 ist.

Konstruktion der Tangente an einen gegebenen Punkt einer cylindrischen Spirale.

346. Nehmen wir zuerst an, die Tangente solle durch den Punkt (4, *d*) gezogen werden. Diese Tangente ist in der Ebene enthalten, welche den Cylinder an demselben Punkt berührt; und deren Riß auf der Horizontalebene die Gerade 4 L ist. Diese zu Y Y′ parallele Gerade ist offenbar die Horizontalprojektion der Tangente. Wickelt man den Cylinder auf die tangirende Vertikalebene 4 L auf, so wird der Viertelsumkreis 0 1 2 3 4 in der Aufwicklung die Gerade 4 L, und man erhält auf der Ebene der Aufwicklung ein rechtwinkliges Dreyeck *l d* 4′, dessen Seite 4′ *l* = 4 L. Die Hypothenuse *d l* dieses Dreyecks ist die Vertikalprojektion der Tangente zu der Spirale am Punkt (4, *d*). Diese Tangente macht mit der Geraden des Cylinders, welche durch den Berührungspunkt (4, *d*) geht, einen Winkel *l d* 4′; sie schneidet die Horizontalebene in dem Punkt L, dessen Vertikalprojektion der Punkt *l* der Geraden Y Y′ ist.

Man erhält die Tangente an irgend einem andern Punkt der Spirale, als (4, *d*), bey welchem die Tangente nicht parallel zur vertikalen Projektionsebene ist, wenn man durch den gegebenen Punkt der Spirale, und in der tangirenden Ebene zu dem Cylinder, welche durch denselben Punkt geht, eine Gerade zieht, die mit der Kante des Cylinders einen Winkel, gleich dem bekannten Winkel *l d* 4′ macht. Nach der Erklärung der cylindrischen Spirale ist dieser Winkel bey allen Punkten der Linie beständig.

Bestimmung der Tangente zu der cylindrischen Spirale, welche parallel zu einer gegebenen Ebene ist.

347. Da alle Tangenten zu der cylindrischen Spirale mit den Kanten des Cylinders einen unveränderlichen Winkel machen, so folgt daraus, daß sie sämmtlich parallel zu den Kanten eines geraden Kegels sind, welcher als Axe eine Parallele zu den Kanten des Cylinders hat, und daß es sonach keine Tangente zu der Spirale gebe, welche nicht ihre Parallele auf dem geraden Kegel habe. Hat man diesen Kegel konstruirt, so führe man durch seinen Scheitel eine Ebene, parallel zu der bekannten Ebene, und wenn diese den Kegel nach zwey Kanten schneidet, *) so sind die verlangten Tangenten Parallelen zu diesen Kanten. Sind die Richtungen der Tangenten bekannt, so bestimmt man die Punkte, in denen sie die Spirale berühren, wenn man beobachtet, daß die Projektionen der Tangenten zu der Spirale auf der Ebene der kreisförmigen Basis des Cylinders, Tangenten zu dieser Basis sind.

348. (Taf XXXIV. Fig. 1.) es sey (O, $d\ d'$) die Axe des Cylinders, auf welchem die Spirale verzeichnet ist. Man nehme auf dieser Axe einen Punkt (O, d) als Scheitel des geraden Kegels, der als Kante die Gerade $d\ l$ hat, welche mit d 4′ einen Winkel $l\ d$ 4′ macht, gleich jenem, den die Tangente zu der Spirale mit der Kante des Cylinders bildet. Die Grundlinie dieses Kegels ist der aus O, als Mittelpunkt und mit O P = 4′ l als Halbmesser beschriebene Kreis. Nehmen wir Z Z′, Z′ x als die Risse der gegebenen Ebene an, von welchen Rissen der Eine Z Z′ senkrecht auf die Projektionsaxe Y Y′ ist, so wird die durch (O, d) geführte, und zu der (Z Z′, Z′ x) parallelen Ebene den geraden Kegel nach zwey Geraden schneiden, die sich auf die Horizontalebene als die Halbmesser O S, O T, des aus dem Mittelpunkt O beschriebenen Kreises projektiren. Die Endpunkte S, T dieser Halbmesser bestimmen sich aus dem Zusammentreffen der Vertikalen S′ T und des aus dem Mittelpunkt O mit dem Halbmesser O P = 4′ l beschriebenen Kreises.

Die wechselsweise zu den Geraden O S, O T parallelen Tangenten U V, R Q zu dem geraden Schnitte des Cylinders sind die Horizontalprojektionen der zu der gegebenen Ebene parallelen Tangenten, und man erhält daher die Punkte V, Q als Horizontalprojektionen der Berührungspunkte.

Die aus Q, V auf Y, Y′ errichteten Senkrechten V v, Q q bestimmen die Verti-

*) Es ist einleuchtend, daß die Aufgabe aufhörte möglich zu seyn, wenn diese parallele Ebene, mit dem geraden Kegel außer dem Scheitel keinen Punkt mehr gemein hätte.

kalprojektionen v, q derselben Berührungspunkte, und die Parallelen $v\ u$, $q\ r$ zu dem Vertikalriß Y X der gegebenen Ebene sind die Vertikalprojektionen der Tangenten zu der Spirale an den Punkten (V, v), (Q, q).

Die verlängerten Vertikalen V v, Q q schneiden noch die Vertikalprojektion der Spirale in einer Reihe gleichentfernter Punkte wie v', q', bey welchen die Tangenten zu dieser Vertikalprojektion gleichfalls parallel zu dem Risse Y X der gegebenen Ebene (Z Z′, Z′ x) sind.

Wenn aufgegeben wäre, eine Tangente zu der Vertikalprojektion $a\ b\ c\ d$ der Spirale zu führen, welche parallel wäre zu einer gegebenen Geraden, so würde man diese Aufgabe auf dieselbe Weise wie die Vorstehende lösen, indem man die gegebene Gerade als den Riß einer auf die vertikale Projektionsebene senkrechten Ebene betrachtete.

349. Anmerkung. Die cylindrische Spirale besitzt die die Eigenschaft, die kürzeste Linie zu seyn, welche man auf einen Cylinder zwischen zwey Punkten dieser Fläche ziehen kann; um dieses einzusehen, bemerke man nur, daß die Ausdehnung einer Cylinderfläche sich nicht verändere, wenn man dieselbe aufwickelt, und daß folglich durch diese Aufwicklung die respektiven Entfernungen der verschiedenen Punkte der Fläche weder eine Ausdehnung noch einer Verkürzung erleiden; aber alsdann ist die kürzeste Entfernung zwischen zwey von diesen Punkten, die von Einem nach dem Andern gezogene Gerade, und diese Gerade wird auf dem Cylinder eine Spirale. Wenn man daher einen Faden nach einer Cylinderfläche biegt, indem man ihn leicht anzieht, so wird er vermöge dieser Spannung die Gestalt einer Spirallinie annehmen.

Das eben gesagte gilt nicht nur allein von den Cylinderflächen, sondern es läßt sich auf alle Kegelflächen und die andern aufwickelbaren Flächen anwenden. Die kürzeste Entfernung zwischen zwey ihrer Punkte wird auf der Fläche durch eine Linie angegeben, die sich bey der Aufwicklung in eine Gerade verwandelt, und diese ist folglich immer eine Art von Spirallinie.

Die auf einem geraden kreisförmigen Kegel verzeichnete Spirale hat als Projektion auf der Ebene der Basis nothwendig eine solche Linie, deren Punkte sich in einer beständigen Proportion dem Mittelpunkte der kreisförmigen Basis nähern, es ist dieses die gewöhnliche archimedische Spirallinie.

Selbst auf Flächen von zwey Krümmungen, wie zum Beyspiel auf der Kugel oder einem Sphäroide, lassen sich gewisse Arten von Spiralen zeichnen. Der Weg, den ein Schiff zurücklegt, um auf der kürzesten Linie von einem Punkte der Erde zu einem andern zu kommen, ist jene Linie, welche alle Meridianen unter einem nemlichen Winkel durchschneidet, das heißt eine Gattung von Spirallinien.

Spiralflächen.

350. Wenn man eine Linie, sich dergestalt um eine feste Gerade drehen läßt, daß jeder Punkt der Linie eine Spirale auf einem kreisförmigen Cylinder beschreibt, welcher als Axe die feste Gerade hat, und als Halbmesser die Entfernung des Punktes der Linie von derselben Geraden, so ist der geometrische Ort, der, durch alle Punkte jener Linie gleichzeitig beschriebenen Spiralen vom nemlichen Gange eine derjenigen krummen Flächen, welche man unter dem Namen der Spiralflächen oder Heliçoide begreift. Die feste Gerade ist die Axe der Fläche.

Bey der Art. 344. erklärten Entstehung der Schraubenlinie erzeugt die schiefe Gerade, während ihr Berührungspunkt die Schraubenlinie beschreibt, eine aufwickelbare Fläche, von welcher die genannte Schraubenlinie die Rückkehrkante ist. Man nennt diese auch aufwickelbares Heliçoid. Läge die schiefe Gerade anstatt in der tangirenden Ebene zu dem Cylinder, mit der Axe dieses Cylinders in einerley Ebene, so entstünde durch ihre Bewegung nothwendig eine Fläche, die zu dem Geschlechte der windischen gehörte, und die man auch windisches Heliçoid nennt.

Die Oberfläche der archimedischen = oder Wasserschraube, welche gleichfalls zu den windischen gehört, hat zur Erzeugungslinie eine Gerade, welche den drey Bedingungen unterliegt; 1tens durch die Axe eines geraden kreisförmigen Cylinders zu gehen, 2tens sich auf eine auf demselben Cylinder verzeichnete Schraubenlinie zu stützen, 3tens beständig senkrecht auf die Axe des Cylinders zu bleiben. Die nemliche Erzeugungsart hat auch die untere Fläche der gewöhnlichen Wendeltreppe.

Die Oberfläche eines gewöhnlichen Schraubengewindes ist durch dieselbe Bewegungsart, von einem gleichseitigen Dreyecke oder einem Quadrate erzeugt, was mit der Axe in einer Ebene liegt. Diese Oberfläche ist eigentlich nur ein Theil von Zweyen der oben genannten windischen Heliçoide.

Von der sphärischen Epicycloide.

351. Erklärung der Linie. Wenn von zwey geraden kreisförmigen Kegeln, welche einen nemlichen Scheitel haben, und welche sich berühren, der Eine fest und der Andere beweglich ist, so beschreibt irgend ein Punkt dieses Letzteren durch die Umwälzung desselben auf dem Ersten die sphärische Epicycloide.

Während der Umwälzung des beweglichen Kegels auf dem festen, verändert sich die Entfernung des Erzeugungspunktes der Epicycloide von dem gemeinschaftlichen Scheitel der zwey Kegel nicht; woraus sich ergiebt, daß die Epicycloide einer Kugel angehört, welche diese Entfernung als Halbmesser hat, und als Mittelpunkt den gemeinschaftlichen Scheitel der zwey Kegel. Diese Kugel schneidet die beyden Kegel nach zwey Kreisen, deren Ebenen unter sich einen Winkel bilden, gleich dem zwischen den Axen dieser Kegel eingeschlossenen. Der eine jener Kreise, welche die Basis des beweglichen Kegels bildet, berührt in allen seinen Stellungen den Kreis, welcher die Basis des festen Kegels ist, und bey jeder Stellung jenes ersten Kreises gehört ein Punkt desselben der Epicycloide.

Die aus diesem Punkt der Epicycloide nach dem Berührungspunkte des festen und des beweglichen Kreises gezogene Gerade hat eine veränderliche Größe; sie ist anfänglich Null; sie wächst sodann bis sie dem Durchmesser des beweglichen Kreises gleich ist; nimmt hierauf ab, und wird wieder Null; sie ist sehr nahe zu beständig, während der Erzeugungspunkt von einer Stellung zu einer andern unendlich nahen übergeht. In derselben Zeit verändert sich der Berührungspunkt des festen und des beweglichen Kreises um keine angebbare Größe; dieser Punkt kann daher als Mittelpunkt einer Kugel betrachtet werden, auf welcher sich das, durch den Erzeugungspunkt der Epicycloide beschriebene Element befindet. Es folgt hieraus, daß dieser Punkt in irgend einem Augenblick seiner Bewegung ein Kurvenelement beschreibt, welches zu gleicher Zeit auf zwey Kugeln liegt, auf einer, welche als Halbmesser die beständige Entfernung dieses Punkts von dem gemeinsamen Scheitel der zwey Kegel hat, und auf einer andern, welche als Halbmesser die veränderliche Entfernung desselben Punkts von demjenigen hat, worin der bewegliche Kreis den festen berührt; nun aber kann ein Kurvenelement nicht zu gleicher Zeit auf zwey Kugeln seyn, ohne daß es in dem Durchschnitt zweyer Ebenen liege, welche diese Kugeln berühren; daher ist die Tangente an irgend einen Punkt einer sphärischen Epicycloide die gerade Durchschnittslinie zweyer Ebenen, welche zwey Kugeln berühren, deren Mittelpunkte und Halbmesser gegeben sind. Diese Tangente ist senkrecht auf die Ebene, welche durch den Punkt der Epicycloide, und durch die Mittelpunkte der zwey Kugeln geführt ist.

Zeichnung der sphärischen Epicycloide.

352. (Taf. XXXIV. Fig. 2.) Indem wir die Axe des festen Kegels vertikal annehmen, beschreibe man auf der Horizontalebene den Kreis A B C D dieses festen Kegels, welcher beständig durch denjenigen Kreis des beweglichen Kegels, auf welchem sich der Erzeugungspunkt der Epicycloide befindet, berührt ist.

Es sey A B irgend ein Bogen des Kreises A B C D, der zwischen dem Ursprunge A der Epicycloide gefaßt ist und dem Berührungspunkte des Kreises A B C D mit dem beweglichen Kreise in irgend einer Stellung. Die Vertikalebene S B E′ enthält 1tens die Axen (S, S s), (S E′, s $s′$) der zwey Kegel; 2tens die Kante (S B, s B), nach welcher diese zwey Kegel sich berühren; 3tens den Winkel E′ B e, welchen die horizontale Ebene des festen Kreises und die Ebene (n B, B e) des beweglichen Kreises unter einander bilden; 4tens den Durchmesser B e dieses beweglichen Kreises. Indem wir annehmen, daß die Ebene dieses letzten Kreises sich um ihren Horizontalriß n B drehe, um sich auf die Ebene des festen Kreises A B C D aufzulegen, und daß der Bogen B f des beweglichen Kreises von derselben Länge sey wie der Bogen A B des festen Kreises, so ist $f′$ die Stellung des Erzeugungspunkts des Epicycloide, welche dem Berührungspunkt B entspricht, durch den die Berührungskante (S B, s B) der zwey Kegel geht. Die Horizontalprojektion F′ des Punktes $f′$ ist in der senkrechten Geraden $f′$ F′ auf die Gerade B n. Hat man $f′$ F senkrecht auf den Durchmesser B E′ gezogen, sodann aus dem Punkt B, als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser gleich B F einen Kreisbogen beschrieben, welcher die Gerade B e in f schneidet, so ist dieser Punkt f die Projektion des Punkts $f′$ auf der Vertikalebene S B E′. Die Senkrechte f φ F′, welche aus dem Punkt f auf den Durchmesser B E′ gefällt ist, schneidet die Gerade $f′$ F′ in dem Punkt F′, der Horizontalprojektion des Punkts $f′$ der Epicycloide. Was die Höhe dieses Punkts $f′$ über die Horizontalebene betrifft, so ist diese augenscheinlich gleich f φ.

353. Nehmen wir sofort an, der Berührungspunkt des festen und des beweglichen Kreises seye in K, anstatt in B; so kann man 1tens die Vertikalebene S K führen, welche die Axen der zwey Kegel enthält, 2tens dieselbe auf die Horizontalebene niederlegen, und einen Punkt G der Horizontalprojektion der Epicycloide finden, wie man den Punkt F′ gefunden hat; allein die Anwendung einer zweyten Vertikalebene S K, ist hier nicht erfoderlich, da die erste S E′ zu diesem Zwecke benutzt werden kann. In der That, es sey B f $g′$ ein Bogen des beweglichen Kreises von gleicher Länge mit dem Bogen A B K, so kann man den Kreis vom Durchmesser K I = B e verzeichnen, und bey diesem Kreise verfahren, wie bey dem vom Durchmesser B E′, welcher den festen Kreis in dem Punkt B berührt. Betrachtet man diesen Punkt B als den Berührungspunkt K, so wäre die Horizontalprojektion des Punkts $g′$ in G′ auf der Senkrechten $g′$ G′ zu der Tangente B n des festen und des beweglichen Kreises. Zieht man die Gerade S G′, B G′, so bildet man das Dreyeck S B G′, welches, nach S K G versetzt, den Punkt G bestimmt, der die Horizontalprojektion des Punkts $g′$ des beweglichen Kreises ist, wenn dieser den festen Kreis im Punkt K berührt. Nimmt man den Berührungspunkt dieser zwey Kreise in C an, dem Endpunkte eines Bogens A C des festen Kreises, welcher an Länge gleich ist dem halben Umfange des beweglichen Kreises, so hat der Erzeugungspunkt der

Epicycloide als Horizontalprojektion einen Punkt E des Halbmessers S C, so daß C E gleich ist der Horizotalprojektion B ε des Durchmessers B e des beweglichen Kreises.

354. Da der Bogen A C D des festen Kreises an Länge gleich ist dem ganzen Umfange des beweglichen Kreises, so gehört der Punk D der sphärischen Epicycloide an, und er kann als der Ursprung eines weiteren Zweiges der Epicycloide betrachtet werden, welcher dem ersten gleich wäre, und welcher als Horizontalprojektion eine Kurve hätte, die von der A E D in nichts abwiche.

355. Es ergiebt sich aus dieser Konstruktion, daß die sphärische Epicycloide aus einer unendlichen Anzahl gleicher Zweige zusammengesetzt ist, die sich auf eine, auf die Axe des festen Kegels senkrechte Ebene nach gleichen Kurven projektiren; 2tens daß diese Zweige auf der kreisförmigen Basis des festen Kegels Rückkehrpunkte haben; 3tens daß der zwischen zwey aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten gefaßte Bogen jener Basis an Länge gleich ist dem ganzen Umfange des beweglichen Kreises.

Konstruktion der Tangente zu der sphärischen Epicycloide.

356. Erste Art. Es sey der Punkt der sphärischen Epicycloide, an welchem man die Tangente verlangt in f' auf dem beweglichen Kreise vom Durchmesser B E' angenommen; er hat daher als Horizontalprojektion den Punkt F' und als Projektion auf der Vertikalebene S E' den Punkt f. Die verlangte Tangente ist (Art. 351.) senkrecht auf die Ebene der Geraden, die aus dem Punkte (F', f) nach den Mittelpunkten (S, s), B der zwey Kugeln geführt sind, von denen jede ein Element der Epicycloide enthält. Nun aber trifft die erste Gerade (S F', s f) die Horizontalebene im Punkt V; die Zweyte geht durch den Punkt B; daher hat die Ebene der zwey Geraden (S F', s f), (B F', B f) als Riß auf der Horizontalebene die Gerade B V und auf der Vertikalebene die Gerade s B, daher hat die verlangte Tangente als Horizontal- und Vertikalprojektion, die auf die Geraden V B, s B wechselsweise senkrechten Geraden F' T, f t, und sie trifft die Horizontalebene im Punkte (T, t).

357. Zweyte Art. Es sey abermals f' der gegebene Punkt der Epicycloide, dessen Horizontalprojektion F' ist. Die Tangente an diesem Punkt ist (Art. 351.) der gerade Durchschnitt zweyer tangirenden Ebenen, Einer zu der Kugel, welche ihren Mittelpunkt in dem Scheitel (S, s) des beweglichen und des festen Kegels hat, und der Anderen, zu der Kugel, welche als Halbmesser die Gerade f' B hat, und als Mittelpunkt den Berührungspunkt B des festen und des beweglichen Kreises, auf welchen sich der Punkt f' der Epicycloide befindet. Da der durch f' geführte Halbmesser der ersten Kugel als Horizontalprojektion die Gerade S F' hat, so ist der Riß der Ebene,

welche diese Kugel im Punkt f' berührt, senkrecht auf dieselbe Gerade S F'; überdies geht diese Ebene durch die Tangente $f' l$ zu dem Kreise B f' g' E'; aber diese Tangente schneidet die Horizontalebene in dem Punkte l der Tangente B l N des festen Kreises, daher hat die tangirende Ebene zu der ersten Kugel als Riß auf der Horizontalebene die auf S F' senkrechte Gerade l m.

Die tangirende Ebene am Punkt f' zu der zweyten Kugel, geht durch die Tangente f' N zu dem großen Kreise dieser Kugel, der aus B als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser gleich B f' beschrieben ist; aber diese Tangente schneidet die Horizontalebene in dem Punkt N der Geraden B l n, welche den festen Kreis in dem Punkt B berührt; wenn man daher aus diesem Punkt N eine Senkrechte N p auf die Horizontalprojektion B F' des Halbmessers B f' fällt, so ist diese Senkrechte der Horizontalriß der tangirenden Ebene zu der zweyten Kugel; sie trifft den Riß l m der tangirenden Ebene zu der ersten Kugel in einem Punkt T der Tangente zu der Epicycloide. Daher berührt die durch T und F' geführte Gerade die Horizontalprojektion der Epicycloide in dem Punkt F'.

358. Da die tangirende Ebene zu der zweyten Kugel am Punkt f' senkrecht ist auf den Halbmesser B f', und auf die Ebene des beweglichen Kreises B f' g' E', so geht sie durch die Gerade r e p, welche, senkrecht auf die Ebene B e des beweglichen Kreises, und durch den Punkt e desselben geführt ist. Nun aber schneidet diese Gerade r e p die Horizontalebene im Punkt p; daher ist die Gerade N p der Riß der tangirenden Ebene zu der zweyten Kugel, und diese Gerade muß senkrecht auf die Horizontalprojektion B F' des Halbmessers seyn, der durch den Berührungspunkt f' geht.

Die tangirende Ebene in f' zu der Kugel vom Halbmesser B f', da sie senkrecht auf die Ebene des beweglichen Kreises ist, schneidet diese letztere Ebene nach der Geraden f' E', welche durch den Endpunkt E' des Durchmessers B E' geht, woraus folgt, daß diese Gerade die Projektion der, durch den Punkt f' geführten Tangente zu der Epicycloide auf die Ebene des beweglichen Kreises sey.

Die tangirende Ebene zu der Kugel, vom Halbmesser B f' am Punkt f' des beweglichen Kreises B f' g' ist auch tangirend zu dem Kegel, welcher als Leitlinie die sphärische Epicycloide, und als Mittelpunkt den Punkt r der Geraden S s hat, in welchem diese Gerade von der Senkrechten p e r an dem Endpunkt des Durchmessers B e getroffen wird; dieses ist einleuchtend, denn jene Ebene geht durch eine Tangente zu der Kurve, welche dem Kegel als Leitlinie dient. Es ist aber wichtig zu bemerken, daß man bey irgend einer Stellung K I γ des beweglichen Kreises auf diesem Kreise einen Punkt γ der sphärischen Epicycloide habe, so daß die Ebene, welche durch die Gerade γ I geführt ist, und senkrecht auf die Gerade γ K, die den Punkt γ der Epicycloide und den Berührungspunkt K des festen und des beweglichen Kreises verbindet, tangirend zu dem Kegel ist, der seinen Mittelpunkt' in *r* hat, und als Leitlinie die sphärische Epicycloide. In der That, da der Winkel K γ I ein rechter ist, so geht die Seite γ I dieses Winkels nothwendig durch I, den Endpunkt des Durchmessers K I des beweglichen Kreises. Die Ebene γ I, welche man senkrecht auf die, in der Ebene des beweglichen Kreises gelegene Gerade K γ geführt hat, und folglich senkrecht auf dieselbe Ebene, geht durch die Gerade, welche man durch den Punkt I senkrecht auf die Ebene des beweglichen Kreises führte; aber diese letztere Gerade schneidet die Axe (S, S *s*) in dem Punkt (S, *r*), weil dieser Punkt der Mittelpunkt des, durch die Gerade (S E', *r e*) bey ihrer Umdrehung um die Gerade (S, S *s*) erzeugten geraden Kegels ist; daher ist sowohl die durch den Punkt γ der sphärischen Epicycloide gehende Ebene γ I, als die, durch den Punkt *f'* dieser Kurve gehende Ebene *f'* E' tangirend zu dem Kegel, welcher seinen Mittelpunkt in (S, *r*) hat, und dessen Leitlinie die sphärische Epicycloide ist.

359. Welches demnach die Stellung des bewegliche Kreises sey, so sind auf diesem Kreise drey Punkte zu unterscheiden: 1tens der Erzeugungspunkt der Epicycloide; 2tens der Berührungspunkt des festen und des beweglichen Kreises; 3tens der Endpunkt des Durchmessers, welcher durch diesen Berührungspunkt geht. Hat man durch diesen letzten Punkt eine Senkrechte auf die Ebene des beweglichen Kreises errichtet, so schneidet diese Senkrechte die Axe des festen Kegels in einem vierten Punkte, welcher unveränderlich ist, gleich wie die Neigung der Ebene des beweglichen Kreises, in Bezug auf die Ebene des festen Kreises; die, durch diese Senkrechte, und durch den Erzeugungspunkt der sphärischen Epicycloide geführte Ebene ist tangirend zu dem Kegel, welcher als Mittelpunkt jenen vierten Punkt hat, und als Leitlinie die sphärische Epicycloide.