Noten zum dritten Buch.

Note I.

Ueber die Durchschnitte der krummen Flächen und Ebenen.

Das erste Kapitel dieses Buches lehrt die Konstruktionsart des Durchschnittes einer krummen Fläche und einer Ebene im Allgemeinen, so wie in mehreren besonderen Fällen. Von der nemlichen Aufgabe hängt zugleich diejenige ab, den Durchschnitt einer Fläche und einer geraden Linie zu bestimmen; denn irgend eine durch die Gerade gehende Ebene schneidet die krumme Fläche nach einer gewissen krummen Linie, die Begegnungspunkte dieser Kurve mit der Geraden sind die gesuchten Punkte.

Note II.

Ueber die Aufwicklung der Flächen.

Aus den Art. 223. 230. 236. 312. angeführten Beyspielen ist zu ersehen, daß man, um die Aufwicklung irgend einer aufwickelbaren Fläche zu erhalten, auf der Fläche eine Kurve kennen müsse, deren Gestalt auch auf der Aufwicklung zum Voraus bekannt ist. Bey den Cylindern ist diese zum Beyspiel, der Schnitt senkrecht auf die Kanten, und bey den Kegeln, der Durchtchnitt mit einer konzentrischen Kugel. Kann man zu einer solchen Linie, auf der Fläche sowohl als auf ihrer Aufwicklung Tangenten ziehen, und dadurch die Winkel bestimmen, unter denen die Linie von den aufeinanderfolgenden Kanten der Fläche geschnitten wird, so lassen sich, da diese Winkel durch die Aufwicklung nicht verändert werden, mittelst derselben, auf der Aufwicklung die Geraden der Fläche bestimmen, und somit auf ähnliche Art, wie in den vier gegebenen Beyspielen, jeder durch seine Projektionen bestimmte Punkt der Fläche auf ihre Aufwicklung übertragen. Nun aber kennt man nicht bey jeder aufwickelbaren Fläche eine Linie von der so eben angegebeuen Beschaffenheit, und die Aufgabe, die Aufwicklung einer Fläche zu konstruiren, um auf dieselbe irgend eine Linie der Fläche überzutragen, ist daher nur in einzelnen Fällen durch bloße geometrische Verfahrungsarten zu lösen, wie bey allen Kegeln und allen Cylinderflächen, nicht aber im Allgemeinen.

Lacroix hat in dem ersten Bande seines großen Calcul différentiel die analytische Auflösung des Problems gegeben: Es ist auf einer aufwickelbaren Fläche irgend eine Kurve verzeichnet; man soll finden, was diese Kurve durch die Aufwicklung der Fläche wird; und umgekehrt, eine Kurve ist auf einer Ebene verzeichnet, man soll finden, was diese Kurve wird, wenn man ihre Ebene auf eine gegebene Fläche umwickelt.

Note III.

Ueber die Durchschnitte der krummen Flächen unter sich.

Das zweyte Kapitel d. B. enthält die Lösung der Aufgabe, den Durchschnitt zweyer krummen Flächen zu bestimmen; es könnte übrigens auch aufgegeben werden, den Durchschnitt einer krummen Fläche und einer außerhalb der Fläche gegebenen Kurve zu bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, denkt man sich die Kurve auf eine krumme Fläche versetzt, deren Erzeugung bekannt ist; man konstruirt sodann den Durchschnitt dieser letzten Fläche mit der gegebenen; die Punkte, welche die so gefundene Durchschnittslinie mit der gegebenen Kurve gemein hat, sind offenbar die gesuchten Punkte. Die einfachste Fläche, auf die man eine, durch ihre Projektionen gegebene Kurve versetzen kann, ist eine der projektirenden Flächen dieser Kurve.

Note IV.

Durchschnitt zweyer Umdrehungs-Ellipsoide, deren Axen sich nicht begegnen; siehe Art. 322 et seq.

Wenn die Axen zweyer Umdrehungsflächen, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt zu konstruiren wäre, sich nicht begegneten, so würde man ein System von durchschneidenden Ebenen anwenden, welche sämmtlich senkrecht auf eine der beyden Axen wären, damit man nur nöthig hätte, die Schnitte der andern Fläche punktweise zu bestimmen. Es giebt indessen einen besondern Fall, wobey die Axen der zwey Flächen sich nicht begegnen, und wo man die Punkte ihres Durchschnittes durch die Begegnung zweyer Kreise findet, welche die Projektionen der Schnitte beyder Flächen durch eine nemliche Ebene sind.

Es ist bekannt, daß die Flächen des zweyten Grads durch parallele Ebenen, nach ähnlichen und ähnlich gelegenen Linien geschnitten werden.

Zwey Umdrehungsflächen des zweyten Grads, wie zwey Ellipsoide, deren Axen sich nicht begegnen, besitzen dieselbe Eigenschaft. Auf diese Betrachtung ist folgende Auflösung gegründet, welche Herr Chapuis bekannt gemacht hat. *) Eine beliebige, zu beyden Axen parallele Ebene P werde als erste Projektionsebene angenommen, und es giebt, wie wir zuerst darthun werden, zwey andere Ebenen P′, P″, welche senkrecht auf dieselbe sind, und von denen die erste P′, die beyden Ellipsoide nach zwey Ellipsen schneidet, welche beyde als orthogonale Projektionen auf der Ebene P″, Kreise von bestimmten Durchmessern haben.

Taf. XXXIII. Fig. a. Von zwey Ellipsoiden, welche sich durchschneiden, habe das Eine als Axe die Gerade A B und als Meridianschnitt die Ellipse A H B, welche als große Axe die Gerade A B hat und die Senkrechte O H auf A B als halbe kleine Axe. Man nehme als erste Projektionsebene diejenige, welche durch die Axe A B geht, und welche parallel zu der zweyten Axe ist; es sey gegeben die Entfernung dieser zweyten Axe von der Ersten, auf einer Geraden gemessen, welche senkrecht auf beyde ist.

*) Correspondance sur l'école polytechnique, par Hachette tom. II. pag. 156.

Jede durch den Mittelpunkt O des ersten Ellipsoids A B, und senkrecht auf die erste Projektionsebene geführte Ebene schneidet dieses Ellipsoid nach einer Ellipse, deren große Axe ein Durchmesser der Ellipse A E B ist, und deren halbe kleine Axe gleich O H, das heißt, gleich der halben kleinen Axe des Ellipsoids ist.

Es verhält sich eben so mit jeder andern, auf die Projektionsebene senkrechten Ebene, welche durch den Mittelpunkt O′ des zweyten Ellipsoides gienge. Der Schnitt wäre eine Ellipse, welche als kleine Axe eine Gerade gleich der kleinen Axe H′ h′ des Ellipsoids hätte, und als große Axe einen Durchmesser der Ellipse C D H′ h′. welche der Meridianschnitt dieses zweyten Ellipsoides ist.

Es sey O E der Riß einer beliebigen, auf die erste Projektionsebene senkrechten und durch den Mittelpunkt O des ersten Ellipsoides gehenden Ebene. Die durch diese Ebene in dem Ellipsoid gemachte Schnitt wird eine Ellipse (E) seyn, welche O E als halbe große Axe, und O H als halbe kleine Axe hat. Konstruirt man über O E als Hypothenuse mit einer Seite E G = O H das rechtwinklige Dreyeck E G O, so ist E G der Riß einer Ebene P″, die senkrecht auf die erste Projektionsebene ist, und wenn man diese als zweyte Projektionsebene annimmt, so wird die Ellipse (E) sich als ein Kreis darauf projektiren, weil die Projektion der großen Axe dieser Ellipse gleich der kleinen Axe seyn wird.

Das nemliche Raisonnement läßt sich bey dem in G′ rechtwinkligen Dreyeck E′ O′ G′ machen. Wenn die Seite E′ G′ gleich ist der kleinen Axe O′ H′, so wird Ellipse (E′), der Schnitt des zweyten Ellipsoides durch die Ebene O′ E′, sich auf die Ebene E′ G′ nach einem Kreise projektiren; wobey die projektirenden Linien parallel zu der, auf E′ G′ senkrechten Seite O′ G′ sind; aber die Ebenen der zwey Ellipsen (E), (E′) sollen parallel seyn, und um ihre Richtungen zu bestimmen, wende man folgenden Kunstgriff an.

Man denke sich ein drittes Umdrehungsellipsoid, ähnlich mit dem Zweyten, dessen kleine Axe gleich der kleinen Axe des ersten Ellipsoides ist. Dieses dritte Ellipsoid hat denselben Mittelpunkt O, wie das Erste, seine große Axe C′ D′, welche parallel ist mit der großen Axe C D des zweyten Ellipsoids, steht mit dieser Axe C D im Verhältniß der beyden keinen Axen O′ H′, O H. Man trage auf die O h, senkrecht auf C′ D′ die kleine Axe O h = O H; und um die Länge O C′ der halben großen Axe zu erhalten, setze man folgende Proportion an:

$$O'H : Oh :: O'C : OC' = \frac{Oh \times O'C.}{O'H'}$$

Die Ellipse C′ h D′ des dritten Ellipsoids schneidet die Ellipse, A H B, die Erzeugungslinie des Ersten, im Punkt E, durch welchen man die Gerade O E ziehe. Diese Gerade und die halbe kleine Axe O H bestimmen das Dreyeck E O G. Nun aber ist es einleuchtend, daß die Ebene E O, die senkrecht auf die, zu den beyden Axen parallele Ebene ist, das erste und dritte Ellipsoid nach Ellipsen schneide, deren Projektionen auf der Ebene E G oder E′ G′ Kreise sind; überdem sind die parallelen Schnitte eines Ellipsoids ähnlich und ähnlich gelegen; nimmt man daher die Ebene E G oder E′ G′ als Projektionsebene, so wird jedes Paar, in dem ersten und dritten Ellipsoide gemachter Schnitte sich auf die Ebene nach zwey Kreisen projektiren, die sich in zwey Punkten der Durchschnittslinie des ersten Ellipsoids und des Hülsellipsoids schneiden. Dieses letzte

Ellipsoid ist aber nach der Hypothese, ähnlich mit dem zweyten und ähnlich gelegen, woraus folgt, daß die gegebenen Ellipsoide durch parallele Ebenen, zu derjenigen, deren Riß O E ist, nach Ellipsen geschnitten werden, deren Projektionen auf der Ebene E G, oder ihren parallelen Ebenen, Kreise sind.

Es sey A′ B′ irgend eine Senkrechte auf die Seite O G des Dreyecks E O G, welche man als Durchschnittslinie an beyden Projektionsebenen nehme. Indem man annimmt, daß die erste dieser Ebenen, welche die Ellipse A H B enthält, vertikal sey; so ist die Gerade O G eine Vertikale, und A′ B′ die Horizontalprojektion der ersten Umdrehungsaxe A B. Da die kürzesten Entfernung der beyden Axen gegeben ist, so trage man diese Entfernung zwischen die zwey Parallelen A′ B′, C″ D″ und diese Letztere ist die Horizontalprojektion der zweyten Axe. Die Schnitte der zwey Ellipsoiden durch Ebenen, die parallel zu O E, und senkrecht auf die vertikale Projektionsebene sind, projektiren sich auf die Horizontalebene als Kreise.

Es sey die Parallele $\alpha\ \delta$ zu O E oder O′ E′ der Vertikalriß einer Ebene, welche die beyden Ellipsoiden nach zwey Ellipsen (E), (E′) schneidet, welche als Axen, die Sehnen $\alpha\ \beta$, $\gamma\ \delta$ der zwey Erzeugungsellipsen haben. Von diesen Axen prejektirt sich die Erste auf die Gerade A′ B′ nach $\alpha'\ \beta'$, und die zweyte auf die Gerade C″ D″ nach $\gamma'\ \delta'$. Die über $\alpha'\ \beta'$ und $\gamma'\ \delta'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise sind die Horizontalprojektionen der zwey Ellipsen (E), (E′); sie schneiden sich in zwey Punkten φ, ψ, welche die Horizontalprojektionen zweyer Punkte der Durchschnittslinie beyder Ellipsoide sind; man würde ihre Vertikalprojektionen durch das Zusammentreffen der Geraden $\alpha\ \delta$ und der, ans den Punkten φ, ψ errichteten Senkrechten auf die Gerade A′ B′ erhalten.

Die zwey Erzeugungsellipsen des ersten gegebenen Ellipsoids und des ähnlichen Ellipsoids mit dem zweyten Gegebenen, schneiden sich in vier Punkten, welche auf den zwey Durchmessern E e, $\varepsilon\ \varepsilon'$ gelegen sind; die Ebenen, welche durch diese Durchmesser, und senkrecht auf die Ebene der Axen A B, C′ D′ der zwey Ellipsoiden geführt sind, enthalten zwey Ellipsen, welche die Durchschnittslinien dieser nemlichen Ellipsoide sind. Im Allgemeinen schneiden sich zwey Ellipsoide, welche einerley Mittelpunkt, und eine Hauptaxe von gleicher Länge haben, nach ebenen Kurven. Wir haben uns des Durchmessers E e bedient, um das Dreyeck E O G zu bestimmen, dessen Seite E G der Riß einer Ebene ist auf welche die Schnitte der Ellipsoide sich nach Kreisen projektiren; aber der zweyte Durchmesser ε O ε', wäre die Hypothenuse eines in t rechtwinkligen Dreyecks ε O t, dessen Seite O t eine zweyte Ebene bestimmte, dergestalt, daß alle parallelen Schnitte der Ellipsoide zu der, durch den Durchmesser $\varepsilon\ \varepsilon'$, und senkrecht auf die Ebene der zwey Axen A B, C′ D′ geführten Ebene, sich auf dieselbe ebenfalls nach Kreisen projektiren.