nen haben ihre Horizontalrisse, wie leicht zu ersehen, parallel zu der Horizontalprojektion S S der Axe des Cylinders. Da aber die Risse der beyden vorgelegten Flächen nicht auf einer nemlichen Ebene gegeben sind, so ist, um die Schnitte der Hülfsebenen und der Cylinderfläche zu finden, eine dritte Projektionsebene erfoderlich, und man erhält die einfachsten Konstruktionen, wenn man hiezu eine Ebene, wie C D wählt, welche senkrecht auf die Erzeugungslinien der Cylinderfläche, und deßhalb auch senkrecht auf die Reihe der angenommenen Hülfsebenen ist, und dabey auf die Horizontalebene niedergelegt gedacht wird. Diese Projektionsebene C D enthält zwey Erzeugungslinien d' C, d' E des Kegels und einen kreisförmigen Schnitt n' p' g' des Cylinders.

Eine schneidende Hülfsebene, deren Riß J K, die Projektionsaxe C D in j trifft, in welche demnach die Kegelfläche nach zwey, horizontal in J D, K D projektirten Erzeugungslinien schneidet, hat als Riß auf der Ebene C D die Gerade j d, (D d' ist hier gleich D d), und sie schneidet die Cylinderfläche nach zwey horizontalen Erzeugungslinien (n', U W), (p', Y Z). Die Begegnungspunkte der zwey genannten Paare von Erzeugungslinien geben die Horizontalprojektionen N, N', P, P' von vier Punkten des Durchschnittes der zwey vorgelegten Flächen, deren Projektionen auf der Vertikalebene L M nach einer oder der andern bereits bekannten Art gefunden werden.

Die gefundene Durchschnittslinie hat auf ihrer einen Seite einen doppelten Punkt, (G, g', g) welches schon daraus zu entnehmen war, daß die äußerste Hülfsebene (F C, C d) auf dieser Seite zu gleicher Zeit berührend zu der Kegel- und der Cylinderfläche war.

Von der schiefen und perspektivischen Projektion.

334. Die Projektionsmethode, welche wir (Art. 7 — 10.) erklärt, und der wir uns bis jetzt ausschließlich bedient haben, um die Stellung der verschiedenen Punkte des Raumes zu bestimmen, besteht wie bekannt darinn, aus jedem zu bestimmenden Punkte eine Senkrechte auf jede der zwey Projektionsebene zu fällen; die Fußpunkte dieser Senkrechten, welche die Projektionen des betrachteten Punktes sind, bestimmen die Stellung dieses letzteren im Raume.

Wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes zwey gerade Linien unter bekannten aber schiefen Richtungen nach beyden Projektionsebenen führte, so wäre, wenn man diese Geraden als projektirende Linien betrachtet, und ihre Durchschnitte mit den Projektionsebenen, als die Projektionen des Punktes, die Stellung dieses letzteren durch die Angabe dieser Projektionen, und der Richtung der projektirenden Geraden ebenfalls vollkommen bestimmt. Man nennt schiefe Projektion diejenige Methode, bey welcher die projektirenden Geraden parallel unter sich sind, aber eine bestimmte schiefe Richtung, in Bezug auf die Projektionsebene haben. Die erstgenannte Projektionsart hingegen nennt man, zur Unterscheidung von dieser, rechtwinklige oder orthogonale Projektion. Bey diesen beyden Projektionen sind die projektirenden Flächen der geraden Linien, Ebenen, und die der Kurven, Cylinder.

Die allgemeinste Projektionsart ist diejenige, wenn die projektirenden Linien sämmtlich nach einem bestimmten und bekannten Punkte des Raumes zusammen laufen; man nennt sie zentrale oder perspektivische Projektion.

Durch zwey zentrale oder perspektivische Projektionen eines Punktes auf zwey verschiedenen Ebenen, deren jede ihren besonderen Projektionsmittelpunkt hat, ist die Stellung dieses Punkts im Raume ebenfalls bestimmt. Die projektirenden Flächen der Kurven sind bey der perspektivischen Projektion Kegel, die projektirenden Flächen der Geraden dagegen Ebenen, wie bey den beyden andern Projektionen.

335. Im ersten Buche haben wir die, auf die rechtwinklige Projektion bezüglichen Lehrsätze erklärt; der folgende Satz gilt für alle drey Projektionsarten, und zwar im ganz allgemeinen Sinne, das heißt, wenn man statt der Projektionsebenen beliebige krumme Flächen nähme.

„Wenn zwey Linien sich im Raume schneiden, so ist die Projektion ihres Begegnungspunktes auf einer Ebene oder einer krummen Fläche zugleich auch der Begegnungspunkt der Projektionen derselben Linien auf dieser Ebene oder Fläche.“

Der Satz gilt auch bey zwey Linien, welche sich berühren; „die Projektion ihres Berührungspunktes ist auch der Berührungspunkt der Projektionen der Linien.“

Der Satz: „parallele Gerade haben als Projektionen auf einer Ebene wiederum parallele Gerade“ ist bey der rechtwinkligen und schiefen Projektion giltig, wobey die projektirenden Geraden parallel unter sich sind, er kann aber nicht allgemein bey der perspektivischen Projektion statt haben.

Die zwey für die Ausübung so fruchtbaren Sätze:

„auf einer Projektionszeichnung liegen die beyden Projektionen eines Punktes in
„einer auf die Projektionsaxe senkrechten Geraden;“ und:

„wenn eine Gerade und eine Ebene senkrecht unter sich sind, so ist die Projektion
„der Geraden senkrecht auf den entsprechenden Riß der Ebene,“ (Art. 16. 38.)

finden blos bey der rechtwinkligen Projektion ihre Anwendung.

Bey der rechtwinkligen, der schiefen und der perspektivischen Projektion haben alle auf einer nemlichen projektirenden Fläche gelegenen Punkte und Linien als gemeinsame Projektion auf einer Ebene oder irgend einer andern Fläche, den Durchschnitt der projektirenden Fläche durch diese letztere.

Auf diesen Satz gründen sich viele Anwendungen der schiefen und zentralen Projektion. Durch die Verbindung dieser Projektionsarten mit den rechtwinkligen lassen sich in manchen Fällen sehr einfache und elegante Auflösungen geben, wovon wir hier einige Beyspiele anführen wollen.

Durchschnitt eines geraden und eines schiefen kreisförmigen Cylinders.

336. Wenn ein Cylinder und eine andere bestimmte Fläche sich durchdringen, so findet man ihre Durchschnittslinie, wenn man beyde Flächen durch eine Reihe paralleler Ebenen schneidet. Die Punkte, in denen die in einer Ebene enthaltenen Schnitte sich begegnen, gehören der Linie an, nach welcher die zwey Flächen sich durchdringen. Projektirt man die Schnitte auf eine Ebene, mittelst paralleler Geraden zu den Erzeugungslinien des Cylinders, so ist die Projektion der Schnitte des Cylinders unveränderlich und die Projektion der Schnitte der Fläche, welche den Cylinder durchdringt, ändert sich bey jeder durchschneidenden Ebene; aber die Parallelen zu den Kanten des Cylinders, die durch die Punkte geführt sind, in welchen jene Projektionen sich schneiden, enthalten die Punkte der Durchschnittslinie der zwey Flächen, und da diese Punkte auch in der durchschneidenden Ebene liegen müssen, so sind sie bestimmt. Nehmen wir an, ein Cylinder, dessen Erzeugungslinie horizontal ist, werde von einem andern geneigten Cylinder geschnitten; man verlangt ihre Durchschnittslinie und den Schnitt des zweyten Cylinders durch eine Ebene, welche senkrecht auf seine Erzeugungslinie ist.

Taf. XXXII. Fig. 3.

337. Es sey C D die horizontale Axe eines Cylinders von kreisförmiger Basis, A B der Horizontalriß einer Vertikalebene, welche diesen Cylinder nach einem Kreise vom Halbmesser A C oder B C schneidet. Dieser horizontale Cylinder wird von einem schiefen Cylinder durchschnitten, dessen kreisförmige Grundlinie $f' g h'$ in einer Vertikalebene $f h$ liegt; der Durchmesser $f' h'$ dieser Basis ist von der horizontalen Projektionsebene um die vertikale Höhe $f f'$ oder $h h'$ entfernt. Die horizontalen und rechtwinkligen Projektionen der Kanten des schiefen Cylinders, welche durch die Punkte f', h' gehen, sind die Geraden f F, h H. Diese Kanten sind in einer Ebene,

welche die horizontale Projektionsebene nach der Geraden F H schneidet. Eine Vertikalebene f F F′ drehe sich um ihren Horizontalriß f F′, um sich auf die Horizontalebene zurückzulegen. Auf diese erste Ebene tragen wir die Punkte des Raumes mittelst schiefer Linien über. Wir nehmen als projektirende Linien horizontale Parallelen zu der Erzeugungslinie des großen horizontalen Cylinders; alle Linien dieses größeren Cylinders projektiren sich nach der Krummen F L F′, die aus seinem Durchschnitt mit der vertikalen Projektionsebene f F F′ entsteht. Die Basis $f'\ g\ h'$ des kleineren Cylinders projektirt sich auf die Ebene f F F′ nach der auf f F′ senkrechten Geraden $f\ g'$: dergestalt, daß der horizontale Durchmesser $f'\ h'$ als schiefe Projektion den Punkt f'' der Geraden $f\ g'$ hat, welchen man bestimmt, indem man $f\,f'' = f\,f'$ macht.

Die Hypothenuse F f'' des rechtwinkligen Dreyecks F f f'' ist die schiefe Projektion des Parallelogramms, dessen gegenüberstehenden Seiten die Horizontalen F H, $f'\ h'$ sind. Trägt man $e'\ g$ nach $f''\ g'$ und zieht zu f'' F die Parallele $g'\ k$, so ist das Stück F k der Krummen F L F′ die schiefe Projektion des Durchschnittes des halben Cylinders von der Grundlinie $f'\ g\ h'$. Dieser Durchschnitt hat überdies als orthogonale Horizontalprojektion die Krumme F K H, welche wir konstruiren wollen.

Die Punkte F und H dieser Krummen sind auf der Horizontalen A A′ durch das Zusammentreffen derselben mit den Geraden f F, h H bestimmt. Um einen zwischenliegenden Punkt M auf der zu F f parallelen Geraden M N zu finden, betrachte man diese Gerade M N als Horizontalriß einer Vertikalebene, welche die Ebene des Kreises $f'\ g\ h'$ nach der Geraden N m schneidet. Trägt man die Vertikale N m auf der $f\ g'$ von f nach m', und zieht die arallele $m'\ m''$ zu F f'', welche die Krumme F k in m'' trifft; errichtet sodann aus diesem Punkt m'' die Vertikale $m''\ \mu$, und zieht durch den Punkt μ der Geraden f F die Parallele μ M zu F H, so schneidet diese Parallele die Gerade M N in dem Punkt M. Eine andere durchschneidende Ebene M′ N′, die parallel zur Vertikalebene M N wäre, gäbe einen andern Punkt M der Krummen F M M′ H.

338. Die schiefe Projektion des geraden Schnittes des kleineren Cylinders von der Grundlinie $f'\ g\ h'$, ist auf der Projektionsebene f' F F′ eine Kurve $p\ q\ r'$, welche zu konstruiren ist. Die Ebene dieses geraden Schnittes hat als Riß auf der horizontalen Projektionsebene die senkrechte Gerade P Q auf die Parallelen f F, h H. Eine beliebig genommene Vertikalebene M′ N′ schneidet den Cylinder und die Ebene des geraden Schnittes nach zwey, im Raume unter sich senkrechten Geraden, deren schiefe Projektionen auf der Vertikalebene f F′ sich ebenfalls im rechten Winkel durchschneiden. Nun aber ist die schiefe Projektion der Geraden des Cylinders auf der Vertikalebene f F′ die

Gerade $m' m''$; die schiefe Projektion des Punkts R ist R′; wenn man daher aus dem Punkt R′ auf $m' m''$ die Senkrechte R′ r' errichtet, so gehört der Fußpunkt r' dieser Senkrechten der schiefen Projektion $q r' p$ des geraden Schnittes an.

Die schiefe Projektion des Punktes Q ist Q′; die schiefen Projektionen der zwey, in den Vertikalebenen f F, h H enthaltenen Kanten des Cylinders, fallen in die eine Gerade f'' F zusammen; es folgt daraus, daß die, aus den Punkten Q′ und P auf die F f'' gefällten Senkrechten Q′ q, P p die Punkte q, p der Krummen $q r' p$ bestimmen.

Mittelst des geraden Schnittes des kleineren Cylinders, wird man die Aufwicklung dieses Cylinders erhalten, und darauf alle Linien übertragen können, welche durch die beyden Projektionen, der schiefen vertikalen, und der rechtwinkligen horizontalen bestimmt sind.

Perspektivische Projektion.

Von den Projektionen des Kreises.

339. Die rechtwinklige oder schiefe Projektion eines Kreises auf einer Ebene, ist immer eine Ellipse, wenn anders die Projektionsebene nicht parallel zu der Ebene des Kreises ist. (Siehe §. 2. des Anhanges.)

Bey der perspektivischen oder zentralen Projektion eines Kreises bildet die projektirende Fläche desselben einen kreisförmigen Kegel, dessen Scheitel der Projektionsmittelpunkt ist (Art. 333.); dieser kann aber durch eine Ebene, welche nicht parallel zu seiner Basis ist, bekanntlich nur nach einer von den drey Kurven, der Ellipse, der Hyperbel oder der Parabel geschnitten werden. Man sieht hieraus, daß die perspektivische Projektion eines Kreises auf einer Ebene immer eine der drey genannten Linien seyn müsse. Da aber von zwey ebenen Linien, deren Eine die Projektion der Anderen ist, dieser Letzte auch umgekehrt als die Projektion der ersten zu betrachten ist; so kann auch jeder Kreis als die zentrale Projektion irgend eine Kegelschnittslinie angesehen werden. *)

Es folgt aus diesen Erkärungen unmittelbar, daß jeder Kegel der zweyten Ordnung, das heißt, jeder Kegel, welcher eine Kurve der zweyten Ordnung zur Basis hat, auch ein kreisförmiger Kegel sey.

---

*) Anfänger können sich an der Aufgabe üben, bey einer gegebenen Ellipse, als Basis eines schiefen Cylinders, die Stellung der Ebene zu finden, welche diesen Cylinder nach einem Kreise schneidet; und eben so, bey einer gegebenen Kegelschnittslinie und bestimmtem Projektionsmittelpunkte, die Ebene zu finden, worauf sich jene Kurve als Kreis projektirt.