tangirenden Ebenen an einem dieser Punkte, C zum Beyspiel vertikal sind, und sich folglich nach einer Vertikalen schneiden, die als Horizontalprojektion den Punkt C hat. Man kommt aber bey diesen Punkten mittelst der Ebene der zwey Normalen (Art. 325) zu einem Resultate. Die Normalen in C zu dem größeren und kleineren Cylinder schneiden ihre respektiven Axen in E und O; zieht man die Gerade O E, den Horizontalriß der Normalebene, so ist die Senkrechte C M′ auf diesen Riß die Tangente am Punkt C. Die Linien C K D, A I B sind die zwey Zweige einer Hyperbel, *) welche als reelle Axe die Gerade K I hat. Sie entsprechen dem Zweige des Eintritts in den größeren Cylinder und dem Zweige des Ausganges. Der ganze Durchschnitt projektirt sich auf die Vertikalebene nach dem Kreise $e\,f'\,g$.

Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel.

332. Die Fig. 2. Taf. XXXII. stellt den Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel vor. Die horizontale Projektionsebene geht durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Axe des geraden kreisförmigen Cylinders; die Vertikalebene ist senkrecht auf diese Axe. Die Vertikalprojektion der Durchschnittskurve ist ein Kreis, und ihre Horizontalprojektion eine Parabel.

Die horizontale Projektionsebene enthält den Mittelpunkt O der Kugel, den größten Kreis dieser Kugel vom Halbmesser O D, die Axe G G′, und zwey Kanten A C, B D des geraden Cylinders, der als Basis den Kreis $e\,f\,g$ hat. Die Vertikalebene O D schneidet die Kugel nach einem größten Kreise, den man auf die Ebene des Kreises $e\,f\,g$ versetze, aus einem ähnlichen Motive mit dem im vorhergehenden Beyspiele dargelegten. Man trage den Halbmesser O D von f nach H, und aus H′, als Mittelpunkt, beschreibe man den auf die Vertikalebene L M nach $f\,n\,k$ versetzten großen Kreis der Kugel. Eine beliebige Horizontalebene $p\,\pi$ schneidet den Cylinder nach Geraden, die sich auf die Horizontalebene nach N N′ und $\varphi\,\varphi'$ projektiren; die Horizontale $p\,\pi$ schneidet die Vertikale $f\,f'$ in dem Punkt p', und den Kreis $f\,n\,k$ im Punkt n.

---

*) Man beweißt diesen Satz durch die Analysis, indem man als Coordinatenaxen die rechtwinkligen Geraden E F, I K nimmt, welche sich im Punkt G, dem Ursprunge der Coordinaten kreuzen. Die Gleichung des kleineren Cylinders ist: $x^2 + z^2 = r^2$; die des Größeren: $y^2 + z^2 = R^2$. Eliminirt man z^2, so erhält man als Gleichung der Projektion auf die Ebene der $x\,y$:

$$y^2 - x^2 = R^2 - r^2$$

welches die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel ist.

Trägt man die Entfernung $p' n$ des Punkts n von der Vertikalen $f f'$ auf dem Halbmesser O D von D nach δ, und beschreibt aus O, als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser O δ einem Umkreis, welcher die Geraden N N′, $\varphi\ \varphi'$ in den Punkten P, P′, π'', π' schneidet, so gehören diese vier Punkte der Horizontalprojektion des Durchschnittes der Kugel und des Cylinders. Diese Projektion besteht aus zwey Zweigen, die einer nemlichen Parabel *) angehören, deren Scheitel in S auf der Senkrechten O G liegt, welche aus dem Mittelpunkt G der Kugel auf die Axe G G′ des Cylinders gefällt ist.

Die Tangente C M′ in C ergiebt sich wie in der vorstehenden Aufgabe, aus der Bedingung senkrecht auf dem Horizontalriß der Ebene der zwey Geraden C L′, C O zu seyn, von denen die Eine Normale zu dem Cylinder ist, und die Andere, Normale zu der Kugel; sie trifft die Gerade O G in dem Punkt M′, so daß die Subtangente C′ M′ ist. Theilt man C′ M′ durch den Punkt S in zwey gleiche Theile, so ist dieser Punkt der Scheitel der Parabel.

Durchschnitt eines Kegels und eines Cylinders.

Taf. XXXII. Fig. 4.

333. Ein Kegel, dessen Basis auf der horizontalen Projektionsebene der Kreis C K E J und dessen Scheitel in D und d projektirt ist, wird von einem geraden kreisförmigen Cylinder durchschnitten, der als Axe die Horizontale (S S, $s\ s$) hat, und als Basis, den in $m\ m'$ projektirten vertikalen Kreis, dergestalt, daß er mit seiner untersten Kante auf der Horizontalebene ruht. Man konstruirt die Durchdringungslinie dieser zwey Flächen, indem man sie beyde durch Ebenen schneidet, die durch den Scheitel der Kegelfläche parallel zu den Kanten des Cylinders geführt sind. (Art. 321.) Diese Ebe-

*) Man beweißt diesen Satz durch die Analysis, indem man den Mittelpunkt O der Kugel zum Ursprunge der Coordinaten nimmt, die Senkrechte O S auf die Axe G L′ des Cylinders als die Axe der x, und die Parallele zu jener Axe, als Axe der y. Die Gleichung der Kugel ist: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Nennt man a die Entfernung O G, so ist die Gleichung des Cylinders $(x - a)^2 + z^2 = r^2$; R und r sind die Halbmesser der Kugel und der Basis des Cylinders. Eliminirt man z^2, so erhält man als Gleichung der Projektion des Durchschnittes der Kugel und des Cylinders auf der Ebene der $x\ y$:

$$y^2 + 2\,a\,x - a^2 = R^2 - r^2.$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel, deren Scheitel S in einer Entfernung O S vom Mittelpunkt O liegt, gleich $\frac{R^2 + a^2 - r^2}{2\,a}$.