In der Ausübung läßt sich diese Methode noch vereinfachen, wenn man bey jeder von den zwey windischen Flächen der einen geraden Leitlinie eine leitende Ebene substituirt, wodurch die Flächen sich in zwey Konoide verwandeln, (Art. 105.) und überdies kann man sowohl die geraden Leitlinien als die Ebenen des Parallelismus auf bequeme Art, in Bezug auf die Projektionsebenen gestellt annehmen.

Drittes Kapitel.

Von der Wahl der Projektionsebenen. — Erklärung verschiedener Projektionsmethoden.

329. Durch die bisher abgehandelten Aufgaben über die Durchschnitte der Flächen, haben wir hinlängliche Gelegenheit gehabt, einsehen zu lernen, wie sehr durch eine schickliche Wahl der Projektionsebenen, die bey jedem einzelnen Falle erfoderlichen Konstruktionen vereinfacht werden können. Von den zwey, zur Bestimmung der Durchschnittslinie einer Fläche und einer Ebene erfoderlichen Projektionen reduzirt sich Eine auf eine gerade Linie, wenn die Projektionsebene senkrecht auf die durchschneidende Ebene ist.

Bey dem Durchschnitte einer Umdrehungsfläche und einer Ebene oder einer andern Fläche wählt man als Projektionsebene eine Ebene, welche senkrecht auf die Axe der Umdrehungsfläche ist; dadurch projektiren sich alle Kreise der Fläche auf dieselbe wiederum als Kreise. Wenn zwey sich durchschneidende Flächen eine gemeinschaftliche Ebene der Symetrie haben, so vereinfacht man die Konstruktionen sehr, wenn man diese Ebene der Symetrie als eine der Projektionsebenen nimmt. Bey der Konstruktion des Durchschnittes zweyer Cylinder ist es, wie wir Art. 290. bemerkt haben, vortheilhaft, diese Linie auf zwey Ebenen zu projektiren, wovon die eine parallel zu den Erzeugungslinien beyder Cylinder ist, und die Andere, senkrecht auf eine von denselben Erzeugungslinien.

---

in dessen zweytem Supplement zur Geometrie von Monge §. II. Seite 4. und auf eine beliebige Kurve in Vallee's Géom. descr. Seite 267. Die sehr komplicirten Konstruktionen, welche diese Auflösung erfodert, machen dieselbe übrigens für die Praxis nicht so wichtig, als sie es für die spekulative Geometrie ist, wodurch dieselbe eine große bisher gewesene Lücke ausgefüllt. Ueber eine zweyte, auf ähnliche Betrachtungen gegründete Auflösung des nemlichen Problems sehe man den §. 2. des Anhanges.

Die Fig. 1. Taf, XXXII. ist nach dieser Anordnung gezeichnet. Zwey gerade horizontale Cylinder durchschneiden sich im rechten Winkel, ihre Axen begegnen sich, und die Projektion ihrer Durchschnittslinie besteht in zwey Zweigen einer Hyperbel.

Taf. XXXII. Fig. 1.

330. Es seyen E G F, I G K die horizontalen Axen zweyer sich durchschneidenden geraden Cylinder; die Ebene dieser Axen, welche wir als horizontale Projektionsebene annehmen, schneidet den Ersten der beyden Cylinder nach den Parallelen A B, C D, und den Zweyten nach den Parallelen A C, B D, welche mit den Ersten das rechtwinklige Parallelogramm A B C D bilden. Die vertikale Projektionsebene L M ist senkrecht auf die Erzeugungslinie A C oder B D des kleineren Cylinders, und schneidet denselben nach dem Kreise $e\,f\,g$, der Vertikalprojektion aller Linien dieser Fläche. Eine andere Vertikalebene B D schneidet den größeren Cylinder nach einem Kreise vom Durchmesser B D, welchen Kreis man auf die Vertikalebene L M versetze, indem man aus dem Punkt H′ mit einem Halbmesser H′ f = D F den Kreis $f\ n\ \omega$ beschreibt. Wir werden sogleich den Grund dieser Versetzung zeigen.

Eine beliebig genommene Horizontalebene $\pi\ p$ schneidet beyde Cylinder nach horizontalen Geraden, welche sich in Punkten ihrer Durchschnittslinie begegnen. Die Geraden des kleineren Cylinders projektiren sich auf die Horizontalebene nach den Parallelen $\varphi\ \varphi'$, N N′; die Projektionen der Geraden des größeren Cylinders schneiden diese Parallelen in vier Punkten P, P′, π', π'' der Horizontalprojektion des Durchschnittes der Cylinder. Die Konstruktion dieser Punkte ergiebt sich weit einfacher und mittelst weniger langen Linien, durch die Anwendung des nach $f\ n\ \omega$ versetzten Kreises. Nachdem man die Vertikale $f\ f'$ errichtet, verlängere man die Horizontale $\pi\ p$ bis zu ihrem Zusammentreffen mit der Vertikalen $f\ f'$ in p', und mit dem Kreise vom Halbmesser H′ f in n. Das Stück $p'\ n$ der Horizontalen trage man nach N P, N′ P′, $\varphi\ \pi''$, $\varphi'\ \pi'$, wodurch die vier Punkte P, P′, π', π'' bestimmt werden. Man wird den Grund dieser Konstruktion einsehen, wenn man die Gerade P N als die Projektion eines gemischtlinigten Dreyecks gleich $f\ p'\ n$ betrachtet, und als Horizontalriß einer Vertikalebene, welche den kleinen Cylinder nach einer Geraden schneidet, die an Länge gleich ist, der Seite $p'\ n$ des Dreyeckes, und den größeren Cylinder nach einem Bogen gleich dem Bogen $f\ n$, welcher die andere Seite des nemlichen Dreyecks bildet.

331. Die Tangente an irgend einem Punkte (P, p) des Durchschnittes der zwey Cylinder, würde man wie in Art. 303. bestimmen. Aber bey den Punkten A, B, C, D des Durchschnittes gelangte man mittelst jener Methode zu keinem Endzweck; weil die

tangirenden Ebenen an einem dieser Punkte, C zum Beyspiel vertikal sind, und sich folglich nach einer Vertikalen schneiden, die als Horizontalprojektion den Punkt C hat. Man kommt aber bey diesen Punkten mittelst der Ebene der zwey Normalen (Art. 325) zu einem Resultate. Die Normalen in C zu dem größeren und kleineren Cylinder schneiden ihre respektiven Axen in E und O; zieht man die Gerade O E, den Horizontalriß der Normalebene, so ist die Senkrechte C M′ auf diesen Riß die Tangente am Punkt C. Die Linien C K D, A I B sind die zwey Zweige einer Hyperbel, *) welche als reelle Axe die Gerade K I hat. Sie entsprechen dem Zweige des Eintritts in den größeren Cylinder und dem Zweige des Ausganges. Der ganze Durchschnitt projektirt sich auf die Vertikalebene nach dem Kreise $e\,f'\,g$.

Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel.

332. Die Fig. 2. Taf. XXXII. stellt den Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel vor. Die horizontale Projektionsebene geht durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Axe des geraden kreisförmigen Cylinders; die Vertikalebene ist senkrecht auf diese Axe. Die Vertikalprojektion der Durchschnittskurve ist ein Kreis, und ihre Horizontalprojektion eine Parabel.

Die horizontale Projektionsebene enthält den Mittelpunkt O der Kugel, den größten Kreis dieser Kugel vom Halbmesser O D, die Axe G G′, und zwey Kanten A C, B D des geraden Cylinders, der als Basis den Kreis $e\,f\,g$ hat. Die Vertikalebene O D schneidet die Kugel nach einem größten Kreise, den man auf die Ebene des Kreises $e\,f\,g$ versetze, aus einem ähnlichen Motive mit dem im vorhergehenden Beyspiele dargelegten. Man trage den Halbmesser O D von f nach H, und aus H′, als Mittelpunkt, beschreibe man den auf die Vertikalebene L M nach $f\,n\,k$ versetzten großen Kreis der Kugel. Eine beliebige Horizontalebene $p\,\pi$ schneidet den Cylinder nach Geraden, die sich auf die Horizontalebene nach N N′ und $\varphi\,\varphi'$ projektiren; die Horizontale $p\,\pi$ schneidet die Vertikale $f\,f'$ in dem Punkt p', und den Kreis $f\,n\,k$ im Punkt n.

---

*) Man beweißt diesen Satz durch die Analysis, indem man als Coordinatenaxen die rechtwinkligen Geraden E F, I K nimmt, welche sich im Punkt G, dem Ursprunge der Coordinaten kreuzen. Die Gleichung des kleineren Cylinders ist: $x^2 + z^2 = r^2$; die des Größeren: $y^2 + z^2 = R^2$. Eliminirt man z^2, so erhält man als Gleichung der Projektion auf die Ebene der $x\,y$:

$$y^2 - x^2 = R^2 - r^2$$

welches die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel ist.

Trägt man die Entfernung $p' n$ des Punkts n von der Vertikalen $f f'$ auf dem Halbmesser O D von D nach δ, und beschreibt aus O, als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser O δ einem Umkreis, welcher die Geraden N N′, φ φ' in den Punkten P, P′, π'', π' schneidet, so gehören diese vier Punkte der Horizontalprojektion des Durchschnittes der Kugel und des Cylinders. Diese Projektion besteht aus zwey Zweigen, die einer nemlichen Parabel *) angehören, deren Scheitel in S auf der Senkrechten O G liegt, welche aus dem Mittelpunkt G der Kugel auf die Axe G G′ des Cylinders gefällt ist.

Die Tangente C M′ in C ergiebt sich wie in der vorstehenden Aufgabe, aus der Bedingung senkrecht auf dem Horizontalriß der Ebene der zwey Geraden C L′, C O zu seyn, von denen die Eine Normale zu dem Cylinder ist, und die Andere, Normale zu der Kugel; sie trifft die Gerade O G in dem Punkt M′, so daß die Subtangente C′ M′ ist. Theilt man C′ M′ durch den Punkt S in zwey gleiche Theile, so ist dieser Punkt der Scheitel der Parabel.

Durchschnitt eines Kegels und eines Cylinders.

Taf. XXXII. Fig. 4.

333. Ein Kegel, dessen Basis auf der horizontalen Projektionsebene der Kreis C K E J und dessen Scheitel in D und d projektirt ist, wird von einem geraden kreisförmigen Cylinder durchschnitten, der als Axe die Horizontale (S S, s s) hat, und als Basis, den in m m' projektirten vertikalen Kreis, dergestalt, daß er mit seiner untersten Kante auf der Horizontalebene ruht. Man konstruirt die Durchdringungslinie dieser zwey Flächen, indem man sie beyde durch Ebenen schneidet, die durch den Scheitel der Kegelfläche parallel zu den Kanten des Cylinders geführt sind. (Art. 321.) Diese Ebe-

*) Man beweißt diesen Satz durch die Analysis, indem man den Mittelpunkt O der Kugel zum Ursprunge der Coordinaten nimmt, die Senkrechte O S auf die Axe G L′ des Cylinders als die Axe der x, und die Parallele zu jener Axe, als Axe der y. Die Gleichung der Kugel ist: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Nennt man a die Entfernung O G, so ist die Gleichung des Cylinders $(x - a)^2 + z^2 = r^2$; R und r sind die Halbmesser der Kugel und der Basis des Cylinders. Eliminirt man z^2, so erhält man als Gleichung der Projektion des Durchschnittes der Kugel und des Cylinders auf der Ebene der x y:

$$y^2 + 2ax - a^2 = R^2 - r^2.$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel, deren Scheitel S in einer Entfernung O S vom Mittelpunkt O liegt, gleich $\frac{R^2 + a^2 - r^2}{2a}$.

nen haben ihre Horizontalrisse, wie leicht zu ersehen, parallel zu der Horizontalprojektion S S der Axe des Cylinders. Da aber die Risse der beyden vorgelegten Flächen nicht auf einer nemlichen Ebene gegeben sind, so ist, um die Schnitte der Hülfsebenen und der Cylinderfläche zu finden, eine dritte Projektionsebene erfoderlich, und man erhält die einfachsten Konstruktionen, wenn man hiezu eine Ebene, wie C D wählt, welche senkrecht auf die Erzeugungslinien der Cylinderfläche, und deßhalb auch senkrecht auf die Reihe der angenommenen Hülfsebenen ist, und dabey auf die Horizontalebene niedergelegt gedacht wird. Diese Projektionsebene C D enthält zwey Erzeugungslinien d' C, d' E des Kegels und einen kreisförmigen Schnitt n' p' g' des Cylinders.

Eine schneidende Hülfsebene, deren Riß J K, die Projektionsaxe C D in j trifft, in welche demnach die Kegelfläche nach zwey, horizontal in J D, K D projektirten Erzeugungslinien schneidet, hat als Riß auf der Ebene C D die Gerade j d, (D d' ist hier gleich D d), und sie schneidet die Cylinderfläche nach zwey horizontalen Erzeugungslinien (n', U W), (p', Y Z). Die Begegnungspunkte der zwey genannten Paare von Erzeugungslinien geben die Horizontalprojektionen N, N', P, P' von vier Punkten des Durchschnittes der zwey vorgelegten Flächen, deren Projektionen auf der Vertikalebene L M nach einer oder der andern bereits bekannten Art gefunden werden.

Die gefundene Durchschnittslinie hat auf ihrer einen Seite einen doppelten Punkt, (G, g', g) welches schon daraus zu entnehmen war, daß die äußerste Hülfsebene (F C, C d) auf dieser Seite zu gleicher Zeit berührend zu der Kegel- und der Cylinderfläche war.

Von der schiefen und perspektivischen Projektion.

334. Die Projektionsmethode, welche wir (Art. 7 — 10.) erklärt, und der wir uns bis jetzt ausschließlich bedient haben, um die Stellung der verschiedenen Punkte des Raumes zu bestimmen, besteht wie bekannt darinn, aus jedem zu bestimmenden Punkte eine Senkrechte auf jede der zwey Projektionsebene zu fällen; die Fußpunkte dieser Senkrechten, welche die Projektionen des betrachteten Punktes sind, bestimmen die Stellung dieses letzteren im Raume.

Wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes zwey gerade Linien unter bekannten aber schiefen Richtungen nach beyden Projektionsebenen führte, so wäre, wenn man diese Geraden als projektirende Linien betrachtet, und ihre Durchschnitte mit den Projektionsebenen, als die Projektionen des Punktes, die Stellung dieses letzteren durch die Angabe dieser Projektionen, und der Richtung der projektirenden Geraden ebenfalls vollkommen bestimmt. Man nennt schiefe Projektion diejenige Methode, bey welcher die projektirenden Geraden parallel unter sich sind, aber eine bestimmte schiefe Richtung, in Bezug auf die Projektionsebene haben. Die erstgenannte Projektionsart hingegen nennt man, zur Unterscheidung von dieser, rechtwinklige oder orthogonale Projektion. Bey diesen beyden Projektionen sind die projektirenden Flächen der geraden Linien, Ebenen, und die der Kurven, Cylinder.

Die allgemeinste Projektionsart ist diejenige, wenn die projektirenden Linien sämmtlich nach einem bestimmten und bekannten Punkte des Raumes zusammen laufen; man nennt sie zentrale oder perspektivische Projektion.

Durch zwey zentrale oder perspektivische Projektionen eines Punktes auf zwey verschiedenen Ebenen, deren jede ihren besonderen Projektionsmittelpunkt hat, ist die Stellung dieses Punkts im Raume ebenfalls bestimmt. Die projektirenden Flächen der Kurven sind bey der perspektivischen Projektion Kegel, die projektirenden Flächen der Geraden dagegen Ebenen, wie bey den beyden andern Projektionen.

335. Im ersten Buche haben wir die, auf die rechtwinklige Projektion bezüglichen Lehrsätze erklärt; der folgende Satz gilt für alle drey Projektionsarten, und zwar im ganz allgemeinen Sinne, das heißt, wenn man statt der Projektionsebenen beliebige krumme Flächen nähme.

„Wenn zwey Linien sich im Raume schneiden, so ist die Projektion ihres Begegnungspunktes auf einer Ebene oder einer krummen Fläche zugleich auch der Begegnungspunkt der Projektionen derselben Linien auf dieser Ebene oder Fläche.“

Der Satz gilt auch bey zwey Linien, welche sich berühren; „die Projektion ihres Berührungspunktes ist auch der Berührungspunkt der Projektionen der Linien.“

Der Satz: „parallele Gerade haben als Projektionen auf einer Ebene wiederum parallele Gerade“ ist bey der rechtwinkligen und schiefen Projektion giltig, wobey die projektirenden Geraden parallel unter sich sind, er kann aber nicht allgemein bey der perspektivischen Projektion statt haben.

Die zwey für die Ausübung so fruchtbaren Sätze:

„auf einer Projektionszeichnung liegen die beyden Projektionen eines Punktes in „einer auf die Projektionsaxe senkrechten Geraden;“ und:

„wenn eine Gerade und eine Ebene senkrecht unter sich sind, so ist die Projektion „der Geraden senkrecht auf den entsprechenden Riß der Ebene,“ (Art. 16. 38.)

finden blos bey der rechtwinkligen Projektion ihre Anwendung.

Bey der rechtwinkligen, der schiefen und der perspektivischen Projektion haben alle auf einer nemlichen projektirenden Fläche gelegenen Punkte und Linien als gemeinsame Projektion auf einer Ebene oder irgend einer andern Fläche, den Durchschnitt der projektirenden Fläche durch diese letztere.

Auf diesen Satz gründen sich viele Anwendungen der schiefen und zentralen Projektion. Durch die Verbindung dieser Projektionsarten mit den rechtwinkligen lassen sich in manchen Fällen sehr einfache und elegante Auflösungen geben, wovon wir hier einige Beyspiele anführen wollen.

Durchschnitt eines geraden und eines schiefen kreisförmigen Cylinders.

336. Wenn ein Cylinder und eine andere bestimmte Fläche sich durchdringen, so findet man ihre Durchschnittslinie, wenn man beyde Flächen durch eine Reihe paralleler Ebenen schneidet. Die Punkte, in denen die in einer Ebene enthaltenen Schnitte sich begegnen, gehören der Linie an, nach welcher die zwey Flächen sich durchdringen. Projektirt man die Schnitte auf eine Ebene, mittelst paralleler Geraden zu den Erzeugungslinien des Cylinders, so ist die Projektion der Schnitte des Cylinders unveränderlich und die Projektion der Schnitte der Fläche, welche den Cylinder durchdringt, ändert sich bey jeder durchschneidenden Ebene; aber die Parallelen zu den Kanten des Cylinders, die durch die Punkte geführt sind, in welchen jene Projektionen sich schneiden, enthalten die Punkte der Durchschnittslinie der zwey Flächen, und da diese Punkte auch in der durchschneidenden Ebene liegen müssen, so sind sie bestimmt. Nehmen wir an, ein Cylinder, dessen Erzeugungslinie horizontal ist, werde von einem andern geneigten Cylinder geschnitten; man verlangt ihre Durchschnittslinie und den Schnitt des zweyten Cylinders durch eine Ebene, welche senkrecht auf seine Erzeugungslinie ist.

Taf. XXXII. Fig. 3.

337. Es sey C D die horizontale Axe eines Cylinders von kreisförmiger Basis, A B der Horizontalriß einer Vertikalebene, welche diesen Cylinder nach einem Kreise vom Halbmesser A C oder B C schneidet. Dieser horizontale Cylinder wird von einem schiefen Cylinder durchschnitten, dessen kreisförmige Grundlinie $f'\ g\ h'$ in einer Vertikalebene $f\ h$ liegt; der Durchmesser $f'\ h'$ dieser Basis ist von der horizontalen Projektionsebene um die vertikale Höhe $f\ f'$ oder $h\ h'$ entfernt. Die horizontalen und rechtwinkligen Projektionen der Kanten des schiefen Cylinders, welche durch die Punkte f', h' gehen, sind die Geraden f F, h H. Diese Kanten sind in einer Ebene,

welche die horizontale Projektionsebene nach der Geraden F H schneidet. Eine Vertikalebene f F F$'$ drehe sich um ihren Horizontalriß f F$'$, um sich auf die Horizontalebene zurückzulegen. Auf diese erste Ebene tragen wir die Punkte des Raumes mittelst schiefer Linien über. Wir nehmen als projektirende Linien horizontale Parallelen zu der Erzeugungslinie des großen horizontalen Cylinders; alle Linien dieses größeren Cylinders projektiren sich nach der Krummen F L F$'$, die aus seinem Durchschnitt mit der vertikalen Projektionsebene f F F$'$ entsteht. Die Basis f' g h' des kleineren Cylinders projektirt sich auf die Ebene f F F$'$ nach der auf f F$'$ senkrechten Geraden f g': dergestalt, daß der horizontale Durchmesser f' h' als schiefe Projektion den Punkt f'' der Geraden f g' hat, welchen man bestimmt, indem man $f f'' = f f'$ macht.

Die Hypothenuse F f'' des rechtwinkligen Dreyecks F f f'' ist die schiefe Projektion des Parallelogramms, dessen gegenüberstehenden Seiten die Horizontalen F H, f' h' sind. Trägt man e' g nach f'' g' und zieht zu f'' F die Parallele g' k, so ist das Stück F k der Krummen F L F$'$ die schiefe Projektion des Durchschnittes des halben Cylinders von der Grundlinie f' g h'. Dieser Durchschnitt hat überdies als orthogonale Horizontalprojektion die Krumme F K H, welche wir konstruiren wollen.

Die Punkte F und H dieser Krummen sind auf der Horizontalen A A$'$ durch das Zusammentreffen derselben mit den Geraden f F, h H bestimmt. Um einen zwischenliegenden Punkt M auf der zu F f parallelen Geraden M N zu finden, betrachte man diese Gerade M N als Horizontalriß einer Vertikalebene, welche die Ebene des Kreises f' g h' nach der Geraden N m schneidet. Trägt man die Vertikale N m auf der f g' von f nach m', und zieht die arallele m' m'' zu F f'', welche die Krumme F k in m'' trifft; errichtet sodann aus diesem Punkt m'' die Vertikale m'' μ, und zieht durch den Punkt μ der Geraden f F die Parallele μ M zu F H, so schneidet diese Parallele die Gerade M N in dem Punkt M. Eine andere durchschneidende Ebene M$'$ N$'$, die parallel zur Vertikalebene M N wäre, gäbe einen andern Punkt M der Krummen F M M$'$ H.

338. Die schiefe Projektion des geraden Schnittes des kleineren Cylinders von der Grundlinie f' g h', ist auf der Projektionsebene f' F F$'$ eine Kurve p q r', welche zu konstruiren ist. Die Ebene dieses geraden Schnittes hat als Riß auf der horizontalen Projektionsebene die senkrechte Gerade P Q auf die Parallelen f F, h H. Eine beliebig genommene Vertikalebene M$'$ N$'$ schneidet den Cylinder und die Ebene des geraden Schnittes nach zwey, im Raume unter sich senkrechten Geraden, deren schiefe Projektionen auf der Vertikalebene f F$'$ sich ebenfalls im rechten Winkel durchschneiden. Nun aber ist die schiefe Projektion der Geraden des Cylinders auf der Vertikalebene f F$'$ die

Gerade $m' m''$; die schiefe Projektion des Punkts R ist R'; wenn man daher aus dem Punkt R' auf $m' m''$ die Senkrechte R' r' errichtet, so gehört der Fußpunkt r' dieser Senkrechten der schiefen Projektion $q\, r'\, p$ des geraden Schnittes an.

Die schiefe Projektion des Punktes Q ist Q'; die schiefen Projektionen der zwey, in den Vertikalebenen f F, h H enthaltenen Kanten des Cylinders, fallen in die eine Gerade f'' F zusammen; es folgt daraus, daß die, aus den Punkten Q' und P auf die F f'' gefällten Senkrechten Q' q, P p die Punkte q, p der Krummen $q\, r'\, p$ bestimmen.

Mittelst des geraden Schnittes des kleineren Cylinders, wird man die Aufwicklung dieses Cylinders erhalten, und darauf alle Linien übertragen können, welche durch die beyden Projektionen, der schiefen vertikalen, und der rechtwinkligen horizontalen bestimmt sind.

Perspektivische Projektion.

Von den Projektionen des Kreises.

339. Die rechtwinklige oder schiefe Projektion eines Kreises auf einer Ebene, ist immer eine Ellipse, wenn anders die Projektionsebene nicht parallel zu der Ebene des Kreises ist. (Siehe §. 2. des Anhanges.)

Bey der perspektivischen oder zentralen Projektion eines Kreises bildet die projektirende Fläche desselben einen kreisförmigen Kegel, dessen Scheitel der Projektionsmittelpunkt ist (Art. 333.); dieser kann aber durch eine Ebene, welche nicht parallel zu seiner Basis ist, bekanntlich nur nach einer von den drey Kurven, der Ellipse, der Hyperbel oder der Parabel geschnitten werden. Man sieht hieraus, daß die perspektivische Projektion eines Kreises auf einer Ebene immer eine der drey genannten Linien seyn müsse. Da aber von zwey ebenen Linien, deren Eine die Projektion der Anderen ist, dieser Letzte auch umgekehrt als die Projektion der ersten zu betrachten ist; so kann auch jeder Kreis als die zentrale Projektion irgend eine Kegelschnittslinie angesehen werden. *)

Es folgt aus diesen Erkärungen unmittelbar, daß jeder Kegel der zweyten Ordnung, das heißt, jeder Kegel, welcher eine Kurve der zweyten Ordnung zur Basis hat, auch ein kreisförmiger Kegel sey.

*) Anfänger können sich an der Aufgabe üben, bey einer gegebenen Ellipse, als Basis eines schiefen Cylinders, die Stellung der Ebene zu finden, welche diesen Cylinder nach einem Kreise schneidet; und eben so, bey einer gegebenen Kegelschnittslinie und bestimmtem Projektionsmittelpunkte, die Ebene zu finden, worauf sich jene Kurve als Kreis projektirt.

Durchschnitt eines Kegels und einer Umdrehungsfläche.

340. Um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie eines Kegels und einer Umdrehungsfläche zu konstruiren, nehme man beyde Flächen durch eine Reihe von Ebenen geschnitten an, die sämmtlich auf die Axe der Umdrehungsfläche senkrecht sind. Man betrachte den Schnitt des Kegels durch eine von den Ebenen dieser Reihe als seine Basis, und man projektire auf diese Ebene die kreisförmigen Schnitte der Umdrehungsfläche, mittelst projektirender Linien, die nach dem Scheitel des Kegels zusammenlaufen. Die Projektionen dieser Kreise sind wiederum Kreise, unter denen man diejenigen bemerkt, welche die Basis des Kegels schneiden. Durch den Punkt, wo einer der letztgenannten Kreise die Grundlinie des Kegels schneidet, führe man eine Kante des Kegels; diese Kante wird den kreisförmigen Schnitt der Umdrehungsfläche, von welchem jener Kreis die perspektivische Projektion ist, in einem Punkt treffen, welcher dem Durchschnitt der Umdrehungsfläche und des Kegels angehört. *)

341. Taf. XXXIII. Auf der Horizontalebene, welche senkrecht auf die Axe der Umdrehungsfläche angenommen ist, sey B C D E die Grundlinie des Kegels; L M sey der Durchschnitt der beyden Projektionsebenen und (A, a) sey der Mittelpunkt des Kegels. Eine, durch die Umdrehungsaxe (F, $f\ f'$) parallel zur Vertikalebene L M geführte Meridianebene, schneidet die Umdrehungsfläche nach ihrem Erzeugungsmeridian (G H, $h\ k\ i\ g$).

Irgend eine Horizontalebene $i\ k$ schneidet die Umdrehungsfläche nach einem ihrer Parallelkreise (I K L', $i\ k$), dessen Mittelpunkt in (F, n) ist. Man projektire diesen Parallelkreis auf die Ebene der Grundlinie des Kegels, welche als perspektivische Projektionsebene angenommen ist, mittelst projektirender Geraden, die nach dem Mittelpunkt (A, a) zusammenlaufen. Die perspektivische Projektion dieses Kreises ist ein anderer Kreis, vom Durchmesser I' K' = $i'\ k'$, dessen Mittelpunkt (N, n') in dem Durchschnitt der Horizontalebene und der Geraden (A F, $a\ n$) liegt, welche den Mittelpunkt (F, n) mit jenem des Kegels (A, a) verbindet. Der Kreis D I' E K' schneidet die Basis B C D E des Kegels in den Punkten D, E; die Geraden, welche durch diese Punkte nach dem Mittelpunkte (A, a) des Kegels geführt sind, treffen den Parallelkreis

*) Diese Auflösung, so wie die des folgenden Problems (Art. 341.) findet sich zuerst angeführt in dem Traité de Géométrie descriptive von Potier. Paris 1817. liv III. Appl. XIV et XVII.

$(I\,K\,L', i\,k)$ der Umdrehungsfläche in den zwey Punkten (α, α'), (β, β'), welche dem Durchschnitt des Kegels und der Umdrehungsfläche angehören.

Verfährt man auf dieselbe Weise bey andern Parallelkreisen der Umdrehungsfläche, so findet man so viele weitere Punkte des Durchschnittes $(\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \delta\,\varepsilon\,\zeta, \alpha'\,\beta'\,\gamma' \ldots \delta'\,\varepsilon'\,\zeta')$ der zwey gegebenen Flächen, als man verlangt.

342. Wenn verlangt würde, den Durchschnitt eines Cylinders und einer Umdrehungsfläche zu bestimmen, so würde man statt der zentralen Projektion die schiefe Projektion anwenden, indem man als projektirende Linien Parallelen zu den Erzeugungslinien des Cylinders nähme. Durch die gleichen Verfahrungsarten fände man die Durchschnittslinie eines Kegels oder eines Cylinders durch eine Fläche, welche als Erzeugungslinie eine ebene Kurve von beständiger oder veränderlicher Gestalt hätte, deren Ebene sich parallel zu ihr selbst bewegte. Man würde als Basis des Kegels oder Cylinders, den Schnitt desselben durch eine Ebene nehmen, welche parallel wäre zu der Ebene der beweglichen Erzeugungskurve.