Zweytes Kapitel.

Durchschnitte der krummen Flächen unter sich.

Methode zur Bestimmung der Durchschnitte krummer Flächen.

Allgemeine Aufgabe.

Die Erzeugung zweyer krummen Flächen ist bekannt und alle Angaben, welche diese Erzeugung bestimmen, sind auf den Projektionsebenen verzeichnet; man soll die Durchschnittslinie dieser Flächen konstruiren?

287. Auflösung. Man denke sich eine Reihe unbestimmter, und auf passende Art im Raume gelegener Ebenen; wir wollen zum Beyspiel, um unsere Begriffe festzustellen, diese Ebenen sämmtlich horizontal annehmen und mit E, E′, E″.... ꝛc. bezeichnen.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Ebene E; diese Ebene wird jede der beyden vorgelegten Flächen nach einer horizontalen Kurve durchschneiden: man konstruire die Projektionen dieser Kurven, nach den im vorhergehenden Kapitel vorgetragenen Verfahrungsarten.

Ist dieses geschehen, so kann es seyn; daß die Kurven, nach denen die Ebene E die beyden Flächen schneidet, sich selbst durchschneiden, oder daß sie dies nicht thun. Wenn sie sich nicht durchschneiden, wie verlängert sie auch seyn mögem, so ist dies ein Beweis, daß die beyden Flächen in der Höhe der Ebene E keinen Punkt mit einander gemein haben. Schneiden sich aber die zwey Kurven, so werden sie dies in einer gewissen Zahl von Punkten thun, und diese Punkte, da sie zu gleicher Zeiit sowohl auf der ersten Kurve liegen, als auf der Zweyten, liegen daher auch zu gleicher Zeit auf den beyden Flächen, und sie gehören dem gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Flächen an. Ueberdies haben die genannten Punkte zu Projektionen die Begegnungspunkte der Projektionen der Kurven, und sie sind daher bestimmt.

Indem man diese bey der Ebene E gemachte Operation bey so vielen andern Ebenen E′, E″.... ꝛc. der angenommenen Reihe, als man nöthig erachtet, wiederholt, findet man die Projektionen so vieler Punkte des Durchschnittes der zwey Flächen, als man bedarf, um die Projektionen des Schnittes selbst verzeichnen zu können.

288. Die so eben vorgetragene Methode ist allgemein, welches System von durchschneidenden Ebenen man auch gewählt habe. Wir werden übrigens sogleich sehen, daß die Wahl dieses Systems durchaus nicht gleichgültig sey, sondern daß man

es in gewissen Fällen so einrichten könne, daß sich daraus leichtere und zierlichere Konstruktionen ergeben; und daß es selbst vortheilhaft seyn könne, statt eines Systems von Ebenen eine Reihe krummer Flächen anzuwenden, welche nur in einer Dimension von einander abweichen.

Um den Durchschnitt zweyer Umdrehungsflächen zu konstruiren, deren Axen vertikal sind, ist das vortheilhafteste System von Ebenen eine Reihe von Horizontalebenen; denn jede von diesen Ebenen schneidet die zwey Flächen nach Kreisen, deren Mittelpunkte in den respektiven Axen liegen, deren Halbmesser gleich sind den Ordinaten der Erzeugungslinien in der Höhe der durchschneidenden Ebene, und deren Horizontalprojektionen wiederum Kreise sind von bekannter Größe und Stellung. Man wird leicht einsehen, daß wenn die Axen der Flächen parallel wären aber nicht vertikal, man die Projektionsebenen ändern müßte und sie so wählen, daß eine derselben senkrecht auf die Axen würde.

289. Wenn der Durchschnitt zweyer Kegelflächen von beliebigen Grundlinien konstruirt werden sollte, deren Risse auf der Horizontalebene bestimmt wären, so würde man durch das System von Horizontalebenen in Operationen gezogen, welche für diesen Fall viel zu langwierig wären; denn jede von diesen Ebenen würde die zwey Flächen nach krummen Linien schneiden, welche zwar den entsprechenden Rissen der Flächen ähnlich wären, die aber nichts desto weniger, jede ins Besondere, punktweise konstruirt werden müßten; während dem, wenn man ein System von Ebenen anwendet, die durch die gegebenen Mittelpunkte der beyden Kegel gehen, jede dieser Ebenen die beyden Kegelflächen nach einer gewissen Zahl gerader Linien schneiden wird, die sich, außer dem Mittelpunkte in eben so vielen Punkten begegnen, welche auf dem Durchschnitte der zwey Flächen liegen.

Aus demselben Grunde würde man bey zwey Cylinderflächen von beliebigen Grundlinien, deren Kanten verschieden geneigt wären, ein System von durchschneidenden Ebenen wählen, welche parallel wären zu den Erzeugungslinien der beyden Cylinder. Die Schnitte dieser Ebenen in den Flächen wären gerade Linien, die sich in Punkten ihrer Durchschnittslinie begegneten. In diesen beyden genannten Fällen würden die Punkte beyder Projektionen der zu bestimmenden Durchschnitte durch die Begegnungen gerader Linien konstruirt.

290. In einigen Fällen kann es sogar vortheilhaft seyn, keine Ebenen, sondern ein System krummer Flächen zu wählen. Bey zwey Umdrehungsflächen, deren Axen in einer Ebene wären, aber nicht parallel unter sich, würde man ein System von Kugelflächen erwählen, welche ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt in dem Begegnungspunkte

der beyden Axen hätten. Denn jede dieser Kugelflächen schnitte die zwey Umdrehungsflächen nach den Umfängen zweyer Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf den respektiven Axen hätten, und deren Ebenen senkrecht auf die Ebene der beyden Axen wären. Die Durchschnittspunkte dieser zwey Umfänge, welche zu gleicher Zeit auf der Kugelfläche und auf beyden Umdrehungsflächen lägen, gehörten dem verlangten Durchschnitte an. Somit würden die Projektionen des Durchschnittes durch die Begegnungen von Kreisen und geraden Linien konstruirt. In diesem Falle wäre die vortheilhafteste Stellung der Projektionsebenen, wenn Eine senkrecht auf eine der Axen wäre, und die Andere parallel zu den zwey Axen.

291. Hat man bey einem vorgelegten Falle dasjenige System durchschneidender Ebenen oder Flächen gewählt, wodurch sich die einfachsten Schnitte und die leichtesten Konstruktionen ergeben; so ist, um allen nutzlosen Arbeiten auszuweichen, die zunächst sich darbietende Frage: die Gränze der Ebenen zu bestimmen, welche Punkte der zu konstruirenden Durchschnittslinie enthalten. Es läßt sich übrigens, wie leicht einzusehen, für die Aufsuchung dieser Gränzen eben so wenig wie für die Wahl des Systems der durchschneidenden Ebenen eine allgemeine Regel geben; da beyde sowohl von der Erzeugungsart der gegebenen Flächen, als von ihrer gegenseitigen Stellung abhänget.

292. Die Anwendung der vorgetragenen Methode erfodert ferner bey jedem einzelnen Falle noch eine Erörterung, deren Zweck ist zu erkennen, ob die Durchschnittskurve der zwey vorgelegten Flächen eben sey; ob sie merkwürdige Punkte habe, und wie diese zu bestimmen seyen; ob sie einen oder mehrere Zweige habe, und wie man unter den, durch die allgemeine Methode gefundenen Punkten, diejenigen unterscheide, welche einem nemlichen Zweige angehören; ob die Durchschnittslinie aus geschlossenen oder unendlichen Zweigen bestehe ꝛc.

Bey den einzelnen Beyspielen werden wir in die erfoderlichen derartigen Diskussionen eingehen.

Von den Tangenten und den Normalebenen zu den Durchschnittslinien krummer Flächen.

293. Jeder Punkt der Durchschnittslinie zweyer krummen Flächen gehört den beyden Flächen zu gleicher Zeit an. Wenn man daher durch einen solchen Punkt, indem man ihn als der ersten Fläche angehörig betrachtet, eine tangirende Ebene zu derselben Fläche führt, so berührt diese Ebene den Durchschnitt in dem betrachteten Punkt. Gleicherweise, wenn man durch denselben Punkt, indem man ihn als auf der zweyten Fläche liegend betrachtet, eine tangirende Ebene zu dieser Fläche führt, so berührt auch diese

Ebene den Durchschnitt in dem betrachteten Punkt. Die zwey tangirenden Ebenen berühren daher den Durchschnitt in dem nemlichen Punkt, und da dieser Punkt zugleich der Geraden angehört, nach welcher sie sich schneiden, so ist dieser gerade Durchschnitt der zwey tangirenden Ebenen die Tangente zu dem Durchschnitte der beyden Flächen an dem genannten Punkt.

Wenn die Eine der beyden Flächen eine Ebene ist, so haben wir schon (Art. 218.) gesehen, daß die Tangente an irgend einem Punkt ihrer Durchschnittslinie in dem Durchschnitte der tangirenden Ebene und der Ebene des Schnittes liege.

294. Die Ebene, welche eine aus dem Durchschnitte zweyer Flächen entstandene doppelt gekrümmte Linie rechtwinklig durchschneidet, und welche folglich senkrecht auf die Tangente an dem Durchschnittspunkte ist, heißt Normalebene der krummen Linie (Art. 69). Obschon man bey den Anwendungen der darstellenden Geometrie häufig Normalebenen zu krummen Linien von doppelter Krümmung zu betrachten hat; so werden wir uns doch, in Bezug auf ihre Konstruktionen, in keine weiteren Details einlassen, da sie immer als bekannt zu betrachten sind, sobald die Stellung der entsprechenden Tangente zu der Linie bestimmt ist.

Aufgaben über die Konstruktionen der Durchschnitte krummer Flächen.

Erste Aufgabe.

Es sind zwey Umdrehungsflächen von vertikalen Axen gegeben; man soll ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie konstruiren?

295. Auflösung. Wenn man bey der Untersuchung, welche zu der vorliegenden Aufgabe Veranlassung giebt, keine anderen Durchschnitte zu betrachten hat, als den der beyden Umdrehungsflächen, so gewährt es einigen Vortheil die Projektionsebenen so zu wählen, daß die Vertikalebene parallel zu den beyden Axen wäre. Sobald aber zu gleicher Zeit noch die Durchschnitte dieser Flächen mit Andern zu betrachten wären, so brächte die Veränderung der Projektionsebenen keinen weiteren Vortheil, und man kann sich die Gegenstände sogar leichter vorstellen, wenn man sie Alle auf die nemlichen Ebenen bezieht. Wir werden daher die Ebene der beyden Axen in beliebiger Neigung gegen die Vertikalebenen annehmen.

296. Wir wählen als Beyspiel zwey gerade kreisförmige Kegel Taf. XXVII. (A, $a\,a'$) und (B, $b\,b'$) seyen die vertikalen Axen der beyden Flächen, (A, a) der Mittelpunkt der Einen und T U T V ihr Riß auf der Horizontalebene; (B, b) sey

der Mittelpunkt der zweyten Fläche und ihr Riß auf der Horizontalebene sey der Kreis R X Y Z.

Man schneide beyde Flächen durch eine Reihe von Horizontalebenen, deren Projektionen auf der Vertikalebene die unbestimmten Horizontalen $l\ l$, $l'\ l'$, $l''\ l''$....rc. sind. Jede von diesen Horizontalebenen, zum Beyspiel die in $l\ l$ projektirte, begegnet der ersten Fläche nach einem Kreise, dessen Horizontalprojektion M F G ist; dieselbe Ebene begegnet der zweyten Fläche ebenfalls nach einem Kreise, der sich nach N F G auf die Horizontalebene projektirt. Die zwey Kreise M F G, N F G begegnen sich selbst in zwey Punkten F, G; man projektire diese auf die Horizontale $l\ l$ nach f und g, und man hat in (F, f), (G, g) zwey Punkte der zu bestimmenden Durchschnittslinie.

Dieses nemliche Verfahren bey einer beliebigen Anzahl von Hülfsebenen $l'\ l'$, $l''\ l''$,...rc. wiederholt, giebt bey einer jeden, welche Punkte des Schnittes enthält, im Allgemeinen zwey solcher Punkte.

297. Es ist sofort erfoderlich, die begränzenden Ebenen $l\ l$ der angenommenen Reihe zu finden, welche die äußersten Punkte der zu bestimmenden Linie enthalten. Zu diesem Ende führe man durch die beyden Axen (A, $a\ a'$), (B, $b\ b'$) eine Ebene V U, welche die beyden Flächen, jede nach einem Meridiane schneidet, und lasse diese Ebene sammt den in ihr enthaltenen Meridianschnitten sich um die eine Axe (A, $a\ a'$) drehen, bis in die zur Vertikalebene parallele Stellung T T. Durch diese Drehung fällt der Meridian der ersten Fläche mit dem gegebenen $t\ a\ t'$ zusammen, und der Meridian der zweyten Fläche wird die Stellung (A T, $x''\ b''\ z''$) nehmen, welche leicht zu konstruiren ist.

Ist dieses geschehen, so werden die in einer Ebene T T betrachteten Meridiane $t\ a\ t'$, $x''\ b''\ z''$ sich in einer gewissen Anzahl (in unserm Beyspiele in vier) Punkten schneiden. Durch diese Punkte i', h', d', e' ziehe man die unbestimmten Horizontalen $i'\ i$, $h'\ h$, $d'\ d$, $e'\ e$, so hat man die Projektionen der begränzenden Ebenen der angenommenen Reihe; und wenn man die, auf denselben Horizontalenen gemessenen Abstände der Punkte i', h', d', e' von der Geraden $a\ a'$ nimmt, und sich auf der V A U nacheinander von A nach D, nach H nach I und E trägt, sodann diese letztgenannten Punkte auf die entsprechenden Horizontalen nach d, nach h, nach i und e projektirt, so sind (I, i), (H, h), (D, d), (E, e) die in den begränzenden Ebenen enthaltenen Punkte des Durchschnittes der beyden vorgelegten Umdrehungsflächen.

298. Die gefundene Durchschnittslinie besteht aus zwey, auf beyden Netzen der gegebenen Flächen gelegenen Zweigen (D F E G, $d\ f\ e\ g$), (H I K, $h\ i\ k$); und da die beyden Flächen symetrisch sind, in Bezug auf die ihnen gemeinschaftliche Meridian-

ebene V A B U, so ist leicht zu ersehen, daß auch die Linie ihres gemeinsamen Durchschnittes symetrisch sey, in Bezug auf dieselbe Ebene.

299. Um an irgend einem Punkt (C, *c*) der konstruirten Durchschnittslinie die Tangente zu erhalten, so wissen wir, daß diese Tangente die gerade Durchschnittslinie der tangirenden Ebenen zu den zwey gegebenen Flächen an demselben Punkte (C, *c*) sey; (Art. 282) und daß es, um diese Tangente zu bestimmen, hinreichend ist, ihren Durchschnittspunkt S mit der Horizontalebene zu kennen. Nun aber liegt dieser letzte Punkt, in dem Zusammentreffen der Horizontalrisse der tangirenden Ebenen zu beyden Flächen an dem ihnen gemeinschaftlichen Punkte (C, *c*); wenn man daher diese Risse Q Q′, R R′ nach den im zweyten Kapitel des zweyten Buches vorgetragenen Methoden konstruirt, und ihren Begegnungspunkt S auf die Vertikalebene nach *s* projektirt, sodann die Geraden C S, *c s* zieht, so hat man die Projektionen der verlangten Tangente, welche Projektionen selbst wiederum Tangenten sind, zu den Projektionen der Durchschnittslinie.

300. Die Tangenten an den auf der Meridianebene V A B U liegenden Punkten (I, i), (H, *h*), (D, *d*), (E, *e*) der Durchschnittslinie sind horizontal, und ihre unbestimmten Vertikalprojektionen sind die Geraden *i i′*, *h h′*, *d d′*, *e e′*, welche die Kurve *i k h*, *d f e g* in den Punkten *i*, *h*, *d*, *e* berühren. In der That, sind die tangirenden Ebenen zu den beyden gegebenen Flächen an einem der genannten Punkte senkrecht auf die nemliche Meridianebene V A B U; ihre Horizontalrisse sind daher parallel unter sich, und ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte, welche Tangenten sind zu der Durchschnittslinie an denselben Punkten, sind ebenfalls auf die Ebene V A B U senkrechte Horizontallinien. Da nun überdies die genannten Punkte die Einzigen sind, deren Tangenten eine horizontale Richtung haben, so folgt daraus noch ferner, daß sie diejenigen Punkte eines jeden Zweiges der Durchschnittslinie seyen, deren Höhen über der Horizontalebene ein Maximum oder Minimum sind.

Zweyte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt zweyer Cylinderflächen von beliebigen Grundlinien konstruiren?

301. Auflösung. Bey der vorgelegten Aufgabe, besonders wenn die gegebenen Cylinder von kreisförmigen Grundlinien sind, ist es vortheilhaft, die Projektionsebenen so zu wählen, daß Eine derselben parallel zu den Erzeugungslinien der zwey Cylinder

sey. Wir werden übrigens hier, der allgemeinen Auflösung wegen, die Erzeugungslinien der zwey Flächen auf beliebige Art gegen die Projektionsebenen gestellt annehmen.

Es seyen demnach G E F N und O K J I (Taf. XXVII'.) die auf der Horizontalebene gegebenen oder konstruirten Risse der beyden Cylinderflächen. (A B, $a\ b$) sey die Gerade, zu welcher die Erzeugungslinie der einen, und (C D, $c\ d$) die Gerade, zu welcher die Erzeugungslinie der zweyten Cylinderfläche parallel seyn soll.

302. Man denke sich die beyden Flächen durch eine Reihe von Ebenen geschnitten, welche sämmtlich parallel sind zu ihren respektiven Erzeugungslinien. Diese Ebenen werden die beyden Cylinder nach geraden Linien schneiden, und alle derartigen geraden Schnitte, welche in einer nemlichen Ebene liegen, bestimmen durch ihr wechselweises Zusammentreffen, eben so viele Punkte der zu suchenden Durchschnittslinie.

Demnach führe man durch die eine gegebene Gerade (C D, $c\ d$) eine Ebene parallel zu der andern gegebenen (A B, $a\ b$), und man bestimme den Riß A′ C dieser Ebene auf der Horizontalebene. Die Horizontalrisse aller Ebenen der angenommenen Reihe werden parallel zu dieser Geraden A′ C seyn.

Wenn, wie in unserm angenommenen Beyspiele, die Grundlinien der beyden Cylinder geschlossene Kurven sind, so ziehe man auf der Horizontalebene die Parallelen zu A′ C, welche wie die G N O oder L J die Grundlinie des einen Cylinders berühren, und die des Andern entweder ebenfalls berühren oder in mehreren Punkten durchschneiden, und man hat die Risse der begränzenden Ebenen der Reihe, das heißt derjenigen Ebenen, zwischen welchen alle Punkte der Durchschnittskurve beyder Cylinder eingeschlossen sind. Denn jede andere, zu den Erzeugungslinien der zwey Cylinderflächen parallele Ebene, deren Risse außerhalb des Flächenraumes fiele, den die zwey Parallelen G O, L J begränzen, schnitte entweder nur Eine der beyden Flächen oder keine von Beyden und offenbar könnte sie in beyden Fällen keine Punkte des Schnittes enthalten, weil sie durchaus keinen Punkt der zweyten Fläche mehr enthielte.

E K sey sofort der Riß einer Ebene der Reihe, welche die Grundlinie der ersten Fläche in den Punkten E, F schneidet, und die Grundlinie der zweyten Fläche in den Punkten I, K. Zieht man durch diese Punkte zu den Projektionen der beyderseitigen Erzeugungslinien die Parallelen E R, F P und I S, K R, so bestimmen diese Parallelen durch ihr gegenseitiges Zusammentreffen die Punkte S, Q, P, R, die der Horizontalprojektion des Durchschnittes der zwey Flächen angehören.

Indem man die Punkte E, F und I, K auf die Projektionsaxe nach e, f und i, k projektirt, und durch diese letzteren Punkte die Parallelen $e\ r$, $f\ q$ und $i\ s$, $k\ p$ zu den Geraden $a\ b$, $c\ d$ zieht, so erhält man durch das Zusammentreffen dieser Parallelen in

s, r, p, q, die Vertikalprojektionen derselben Punkte des Durchschnittes, deren Horizontalprojektionen S, R, P, Q sind.

Wir müssen hier bemerken, daß es nicht nothwendig ist, die beyden Projektionen der Durchschnittslinie unabhängig von einander zu konstruiren, sondern daß wenn man einen Punkt einer Projektion gefunden hat, man seinen entsprechenden auf der andern Projektion finden könne, wenn man diesen Punkt mittelst einer Senkrechten auf die Projektionsaxe auf eine der Geraden projektirt, die ihn enthalten muß.

Dieses liefert ein Mittel, die Genauigkeit der Operationen zu berühren, und in gewissen Fällen die Durchschnitte von Geraden zu vermeiden, die sich in zu schiefen Winkeln begegneten.

303. Um die Tangenten zur Horizontalprojektion zu erhalten, zum Beyspiel jene an dem Punkt S, ist es nur erfoderlich, den Durchschnittspunkt der Tangente, die dem Punkt (S, s) angehört, durch die Horizontalebene zu konstruiren. Aber diese Tangente ist der Durchschnitt der Ebenen, welche die beyden Cylinder an dem Punkt (S, s) berühren, und sie trifft die Horizontalebene in dem Begegnungspunkte der Horizontalrisse jener beyden tangirenden Ebenen, wenn man daher diese Risse E Y, I Y nach den bekannten Verfahrungsarten (Art. 79.) konstruirt, und ihren Begegnungspunkt Y mit dem Punkte S verbindet, so ist die Gerade S Y die verlangte Tangente an den Punkt S; und wenn man den Punkt Y auf die Projektionsaxe nach y projektirt und die Gerade $s\,y$ zieht, so hat man die Tangente in s zu der Vertikalprojektion $r\ s\ p\ q$ des Durchschnittes.

304. Die begränzenden Ebenen der angenommenen Reihe, zum Beyspiele die, deren Risse auf der Horizontalebene L J′ J ist, berührt den ersten Cylinder nach einer durch den Punkt L seiner Grundlinie gehenden Kante (L α, $l\ \alpha'$) und sie durchschneidet den zweyten Cylinder nach zwey Kanten (J α, $j\ \alpha'$), (J′ β, $j'\ \beta'$), die sich mit der Ersten in den Punkten (α, α'), (β, β') des Durchschnittes kreuzen. Aber die tangirenden Ebenen zu den beyden Cylindern an diesen Punkten (α, α'), (β, β') müssen sich offenbar nach den Geraden (J α, $j\ \alpha'$), (J′ β, $j'\ \beta'$) schneiden, daher sind diese Geraden zugleich auch Tangenten zu der Durchschnittslinie der zwey Cylinder. Ihre Horizontalprojektionen J α, J′ β berühren die Horizontalprojektion des Durchschnittes in den Punkten α, β und ihre Vertikalprojektionen $j\ \alpha'$, $j'\ \beta'$ berühren die Vertikalprojektion des Schnittes in den Punkten α', β'.

305. Die Horizontalprojektionen der zwey Cylinderflächen werden durch die Geraden begränzt, welche parallel zu A B berührend an die Grundlinie E L F G N gezogen sind, und durch die Parallelen zu D C, welche die Grundlinie I K M J berühren.

Die Gerade M γ ist eine dieser Parallelen; durch ihren Berührungspunkt M mit der Grundlinie I K M J führe man eine der angenommenen Hülfsebenen. Indem man bey dieser Ebene, deren Riß M′ H ist, wie bey den übrigen arbeitet, erhält man nebst andern, Punkte wie γ der Horizontalprojektion des Durchschnittes, und diese sind zugleich die Berührungspunkte der begränzenden Geraden M γ mit derselben Projektion. Denn die Tangente an dem in γ projektirten Punkt des Durchschnittes ist der tangirenden Ebene zu dem Cylinder von der Grundlinie I K M J enthalten, deren unbestimmte Horizontalprojektion mit der Geraden M γ zusammenfällt. (Art. 128).

Nach der ganz gleichen Folgerung findet man einen Berührungspunkt ε' der Vertikalprojektion der Durchschnittslinie mit der begränzenden Geraden $m\,\varepsilon'$, wenn man durch den Punkt μ der Grundlinie, dessen Vertikalprojektion m ist, eine Hülfsebene der angenommenen Reihe führt und die Projektionen, der in dieser Ebene enthaltenen Punkte der Durchschnittslinie bestimmt.

Auf diese Weise suche man in jeder Projektion die Berührungspunkte der begränzenden Kanten beyder Cylinder mit den Projektionen ihrer Durchschnittslinie, denn diese Punkte sind dadurch, daß man ihre zugehörigen Tangenten kennt, zur genauen Verzeichnung der genannten Projektionen sehr behülflich.

306. Wenn die Grundlinie zweyer sich durchdringender Cylinder geschlossene Linien sind, so kann kein Punkt ihrer Durchschnittslinie im Unendlichen liegen, außer wenn einige Kanten der zwey Cylinder parallel unter sich wären; aber zwey Kanten können nicht unter sich parallel seyn, ohne daß sämmtliche Kanten beyder Cylinder parallel unter sich wären, und nach dieser Hypothese des Parallelismus der beyderseitigen Kanten, schnitten sich die Cylinderflächen nach geraden Linien. Es folgt daraus, daß, welches auch die Leitlinien der zwey Flächen seyn mögen, vorausgesetzt, daß sie bey beyden Cylindern aus geschlossenen Zweigen bestehen, so sind die Zweige des Durchschnittes immer geschlossen, oder sie beschränken sich auf gerade Linien. Wären jedoch die Leitlinien der Cylinder Kurven von unendlichen Zweigen, so daß ihre respektiven Risse auf der Horizontalebene von allen, zu den beyderseitigen Erzeugungslinien parallelen Ebenen getroffen würden, so müßte sich die Durchschnittslinie nothwendig ins Unendliche ausdehnen.

307. Unter der Voraussetzung, daß die Leitlinien der zwey Cylinder geschlossene Linien seyen, wie in der Taf. XXVIII. ist die Durchschnittslinie ebenfalls geschlossen; aber sie kann aus einem einzigen, oder aus zwey abgesonderten Zweigen bestehen, was mittelst der Risse der begränzenden Hülfsebenen unmittelbar erkannt werden kann.

In der vorliegenden Figur ist der Riß G O der einen begränzenden Hülfsebene Sekante zu der Grundlinie G E L N und Tangente zu der Grundlinie K I J M; der zweyte begränzende Riß L J hingegen ist Sekante zu der letzten Grundlinie und Tangente zu der ersten. Aus dieser Stellung der begränzenden Risse wird man sogleich erkennen, daß keiner der beyden Cylinder von dem andern gänzlich durchdrungen werde. Der Abschnitt des ersten Cylinders, welchem der Bogen G G′ N angehört, streift über den zweyten Cylinder weg, und der Abschnitt dieses Zweyten, dem der Bogen J′ μ′ J entspricht, läuft unter dem ersten hindurch, so daß der eine Cylinder gewissermaaßen ein Stück aus dem Andern ausreißet. Die Durchschnittslinie der beyden Cylinder kann daher nur aus einem einzigen geschlossenen Zweige gebildet seyn.

Würde hingegen auch der Riß L J, so wie der G O, die Grundlinie I J M K des zweyten Cylinders berühren, und die des ersten durchschneiden, so wäre dieser letzte Cylinder nothwendig ganz von dem ersten durchdrungen; der Durchschnitt bestünde aus zwey abgesonderten Zweigen, einem Zweige des Eintritts und einem Zweige des Ausganges des kleineren Cylinders aus dem Größeren.

Ein dritter Fall wäre endlich, wenn ein begränzender Riß zugleich beyde Grundlinien berührte; die Durchschnittslinie der zwey Cylinder bestünde sodann aus einem einzigen Zweige mit einem doppelten Punkte, und diese Linie bildete den Uebergang der Schnitte von zwey Zweigen, zu jenen von einem einzigen Zweige.

308. Es giebt Fälle, wo die Durchdringung zweyer Cylinder eine ebene Kurve ist. Nehmen wir zum Beyspiel einen horizontalen Cylinder (Fig. *a.* Taf. XXVIII.), welcher als Grundlinie einen vertikalen Kreis vom Durchmesser A B hat, und von welchem die, durch die Endpunkte A, B desselben Durchmessers gehenden Kanten die Honrizontallinien A C E, B F D sind. Indem man diesen Cylinder durch eine vertikale Ebene C D schneidet, und diesen Schnitt als die Grundlinie eines zweyten Cylinders betrachtet, dessen Kanten parallel sind zu den gegebenen Geraden C F, D E, so ist einleuchtend, daß diese beyden Cylinder sich durchschneiden, und daß ihre Durchschnittslinie aus zwey ebenen Kurven bestehen müsse, die in den Vertikalebenen C D, E F gelegen sind; und daß diese Kurven sich selbst in einem Punkte schnitten, dessen Horizontalprojektion O ist. Dieser Punkt wäre der Durchschnitt zweyer horizontalen Kanten, die in der nemlichen tangirenden Ebene enthalten sind. Der Durchschnitt dieser Ebene und der beyden Vertikalebenen C D, E F bestimmte die horizontalen Tangenten zu der Durchschnittslinie der beyden Cylinder.

Dritte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer Kegelfläche von beliebiger Grundlinie, und einer Kugel konstruiren?

Wir nehmen hier an, die zwey Flächen seyen konzentrisch, weil wir dieses besonderen Falles für die folgende Aufgabe bedürfen.

309. Auflösung. (A, a) (Taf. XXIX. Fig. 1.) sey der gemeinschaftliche Mittelpunkt der zwey Flächen; B C D E der gegebene Horizontalriß der Kegelfläche; $a' m$ der Halbmesser der Kugel und der Kreisbogen $l g' f' m$ ein Stück der Gränze der Vertikalprojektion dieser Kugel.

Es ist einleuchtend, daß die mit dem Kegel konzentrische Kugel die beyden Netze dieser Fläche schneiden werde, und daß die Durchschnittslinie aus zwey abgesonderten, und in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel, symetrisch gelegenen Zweigen bestehe. Wir werden daher nur einen dieser Zweige, nemlich den auf dem unteren Netze der Kegelfläche gelegenen konstruiren; weil Alles von diesem unteren Zweige gesagte gleichmäßig von dem Oberen gilt.

Man denke sich durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der zwey Flächen eine Reihe von Ebenen, welche man sämmtlich senkrecht auf eine der Projektionsebenen annehmen kann. In der Fig. 1. Taf. XXIX, haben wir dieselben vertikal angenommen. Jede von diesen Ebenen wird die Kegelfläche nach geraden Linien schneiden, und die Kugelfläche nach dem Umfang eines ihrer großen Kreise; und in jeder Ebene bestimmen die Begegnungen dieser Geraden mit dem Umfange des Kreises, Punkte des verlangten Durchschnittes. Man ziehe daher durch den Punkt A so viele unbestimmte Geraden C A E als man will, so hat man die Horizontalprojektionen eben so vieler Ebenen der Reihe. Jede dieser Vertikalebenen, wie A E, schneidet die Kegelfläche nach zwey Kanten, welche durch die Durchschnittspunkte C, E, des Risses B C D E, und der Geraden C A E gehen, und deren Vertikalprojektionen die Geraden $c a'$, $e a'$ sind. Es bleiben nun die Begegnungspunkte dieser Kanten mit dem Schnitte der Kugel durch dieselbe Ebene zu finden.

Nachdem man zu diesem Zweck durch den Punkt A der Geraden F A D' parallel zu der Projektionsaxe L M gezogen, denke man sich, daß die Vertikalebene C A E sich um die aus A errichtete Vertikale (A, $a a'$) drehe, bis sie parallel zur vertikalen Projektionsebene geworden sey; und daß sie überdies die in beyden Flächen gemachten Schnitte mit sich führe. Durch diese Bewegung werden die Punkte C, E nach G und F, kommen, und wenn man diese letzten Punkte auf die Vertikalebene nach f, g projektirt und die Geraden $f\ a'$, $g\ a'$ zieht, so sind diese Geraden nebst dem Umkreise $f'\ g'\ m$ die Schnitte der Ebene und der beyden Flächen, in der Stellung betrachtet, die sie, vermöge der Bewegung der Ebene genommen haben. Die Begegnungspunkte f', g' der Geraden $f\ a'$, $g\ a'$ mit dem Umkreise, sind daher die Projektionen der Punkte des verlangten Durchschnittes, gleichfalls in der neuen Stellung der Ebene betrachtet. Diese Punkte f', g' geben nun zugleich die Höhen derselben Punkte des Durchschnittes über der Horizontalebene an; man ziehe daher durch dieselben die Horizontalen $f'\ h'$, $g'\ i$, so bestimmen diese durch ihr Zusammentreffen in h, i mit den entsprechenden Geraden $a'\ e$, $a'\ e$ die Vertikalprojektionen jener Punkte des Durchschnittes in ihrer natürlichen Stellung; und wenn man h und i auf die Gerade C A E nach H und J projektirt, bestimmt man die Horizontalprojektionen H, J derselben Punkte.

Es ist leicht zu ersehen, daß die Punkte H, I in der nemlichen Entfernung vom Punkt A seyen, wie die entsprechenden Punkte f', g' von der Vertikalen $a\ a'$. Dieser Umstand giebt ein Bewährungsmittel für die Genauigkeit der Konstruktionen, was hauptsächlich bey den zu schrägen Durchschnitten der Geraden C E mit den projektirenden Geraden von Nutzen ist.

310. Um die Tangente an einem Punkt (J, i) des Durchschnittes zu erhalten, suchen wir, wie in den vorhergehenden Beyspielen den Durchschnitt dieser Tangente durch die Horizontalebene, welcher letztere Punkt sich aus dem Zusammentreffen der Horizontalrisse der tangirenden Ebenen zu beyden Flächen an dem Punkt (J, i) ergiebt.

Nun aber ist die Tangente in C zu der Krummen B C D E offenbar der Riß der genannten tangirenden Ebene zu der Kegelfläche. Was den Riß der tangirenden Ebene zu der Kugel betrifft, so verfahre man bey den Umdrehungsflächen, indem man nemlich an dem Punkt g' zu dem Kreise $e\ f'\ g'\ m$ die Tangente $g'\ o$ zieht, welche verlängert die Gerade L M in einem Punkt o trifft; sodann $a\ o$ auf der E A von A nach O trägt, und durch den Punkt O die Gerade O P senkrecht auf C E zieht. Die zwey gefundenen Risse C P, O P schneiden sich in dem Punkt (P, p), und wenn man die Geraden P J, $p\ i$ zieht, so hat man die Projektionen der Tangente in dem Punkt (J, i) des Durchschnittes der zwey Flächen.

311. Die Vertikalprojektion $n\ h\ i\ k$ der Durchschnittslinie hat mehrere merkwürdige Punkte, welche auf den begränzenden Linien der Projektionen beyder Flächen liegen, und welche bestimmt werden müssen, wenn man die genannte Kurve mit Genauigkeit ziehem will.

Die Projektionen $a' b$, $a' d$ der äußersten Kanten der Kegelfläche können (Art. 128) als die Projektionen von tangirenden Ebenen zu der Fläche betrachtet werden, welche senkrecht auf die Vertikalebene sind, woraus folgt, daß diese Projektionen $a' b$, $a' d$ auch die Krumme $n\ h\ k\ i$ in Punkten wie n, k berühren.

Man bestimme, um diese Punkte zu finden, vorerst die Kanten (A B, $a' b$), (A D, $a' d$) der Kegelfläche, deren Vertikalprojektionen die Gränzen der Vertikalprojektion der Fläche sind, was bey dem besonderen Falle eines elliptischen Kegels nach dem Verfahren geschieht, welches wir Art. 87. angegeben haben.

Nachdem dieses geschehen, beschreibe man aus A als Mittelpunkt, und mit den Halbmessern A B, A D Kreisbögen, welche die Gerade A F in den Punkten B′, D′ treffen; diese letzteren projektire man auf die L M nach b', d'; zieht man sodann Geraden $a' b'$, $a' d'$, welche den Kreisbogen $m\ f'\ g'$ in n', k' schneiden, und durch diese Punkte n', k' die Horizontalen $n' n$, $k' k$, so treffen diese in den Punkten n, k mit den Gränzen $a' b$, $a' d$ der Vertikalprojektion des Kegels zusammen. Die Senkrechten n N, k K auf L M treffen die Geraden A B, A D in den Punkten N, K der Horizontalprojektion N I K H des Durchschnittes des Kegels und der Kugel.

Die auf dem Kreise $g' f' m$ gelegenen Punkte der Krummen $n\ i\ k\ h$ ergeben sich sehr einfach, denn sie sind die Durchschnitte des Meridians (F A, $n' f' g''\ m$) der Kugel mit den in derselben Ebene enthaltenen Kanten der Kegelfläche. Konstruirt man eine dieser Kanten wie (A X, $a' x$), so ergiebt sich der Punkt (R, r), als derjenige, in welchem sie die Kugelfläche durchschneidet, und r ist folglich der Berührungspunkt des Kreises mit der Krummen $n\ i\ k\ h$. Auf dieselbe Weise bestimme man den ähnlichen Punkt r'. Die Kurve $n\ h\ k\ i$ hat einen doppelten Punkt ω, welcher auf einer Geraden $a\ \varepsilon'$ liegt, die durch den Punkt a', der Vertikalprojektion des Mittelpunkts der Kegelfläche, und durch den Punkt ε', der Vertikalprojektion des Punkts ε, geführt ist. Dieser letzte Punkt ε ist der Durchschnitt der zu L M parallelen Geraden F A D′ und des Durchmessers B D. Denn dieser Durchmesser (Art. 87) schneidet die Sehne $\pi\ \varepsilon\ \pi'$ der Ellipse in zwey gleiche Theile, und da die Mitte ε auf der Geraden F A G liegt, so folgt daraus, daß die Geraden A $\omega'\ \pi$, A $\omega''\ \pi'$ gleich sind. Betrachtet man diese Geraden als die Projektionen zweyer Vertikalebenen, die dem System der die zwey Flächen schneidenden Ebenen angehören, so projektiren die in diesen Ebenen enthaltenen Kanten sich auf die Vertikalebene, nach der einzigen Geraden $a'\ \varepsilon'$, und sie werden von der Kugel in zwey Punkten geschnitten, die auf der Horizontalen ($\omega'\ \omega''$, ω) liegen. Der Durchschnitt der zwey bekannten Geraden $\omega'\ \omega$, $a'\ \varepsilon'$ bestimmt den doppelten Punkt ω der Krummen $n\ i\ \omega\ k\ h$.

Vierte Aufgabe.

Man soll die Aufwicklung einer Kegelfläche von beliebiger Grundlinie konstruiren, und auf der aufgewickelten Fläche einen Schnitt derselben übertragen, dessen zwey Projektionen bekannt sind?

312. Auflösung. Man denke sich eine Kugel von beliebig genommenem Halbmesser, welche konzentrisch mit der Kegelfläche ist, und man konstruire, wie wir es in der vorstehenden Aufgabe gethan haben, die Projektionen des Durchschnittes dieser zwey Flächen. Nachdem dieses geschehen, sieht man leicht ein, daß alle Punkte des sphärischen Durchschnittes auch in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte des Kegels seyen, und daß sie sich daher auch auf der aufgewickelten Fläche in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt befinden müssen, und folglich auf einem Kreisbogen, welcher aus diesem Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser gleich jenem der Kugel beschrieben ist. Wenn man daher einen Punkt R (Fig. 3 Taf. XXIX.) als den Mittelpunkt der aufgewickelten Kegelfläche annimmt, und aus demselben mit einem Halbmesser gleich $a' m$ (Fig. 1.) einen unbestimmten Kreisbogen S T U beschreibt, so werden sich auf diesen Bogen alle Punkte des sphärischen Schnittes auflegen, so daß die Theile dieses Bogens wechselsweise gleich sind den entsprechenden Theilen des sphärischen Schnittes. Es handelt sich nun, nachdem man auf diesem Durchschnitt einen beliebigen Punkt als Ursprung genommen, zum Beyspiel den Punkt ($R' r'$) (Fig. 1.) und einen Punkt S (Fig. 3.) als seinen correspondirenden auf der aufgewickelten Fläche, die verschiedenen Bögen des sphärischen Durchschnittes aufzuwickeln, und dieselben nacheinander auf den Kreisbogen S T U von S nach den Punkten T....2c. zu tragen. Zu diesem Ende muß man der sphärischen Linie, da sie von doppelter Krümmung ist, nach und nach ihre zwey Krümmungen entziehen, ohne ihre Größe zu alteriren, was auf folgende Weise geschieht.

Die sphärische Durchschnittslinie ist auf der Horizontalebene in R J K H (Fig. 1.) projektirt, und man kann sie betrachten, als auf einer vertikalen Cylinderfläche verzeichnet, deren Basis R J K H wäre. Man kann daher diese Fläche aufwickeln, wie wir es (Taf. XX. Fig 2.) gezeigt haben, und auf diese aufgewickelte Cylinderfläche den sphärischen Durchschnitt übertragen, indem man den Bogen $R' J$ (Taf. XXIX. Fig. 1.) nach $R'' J'$ (Fig. 2.) aufwickelt, und alsdann die Vertikale (J, $i' i$) (Fig 1.) senkrecht auf $R'' R''$ (Fig. 2.) von J' nach J'' trägt. Die Krumme $R''' J'' H'' R'''$, welche durch alle, auf diese Art bestimmten Punkte J''... geht, ist die sphärische Durchschnittslinie, ihrer horizontalen Krümmung benommen, unbeschadet ihrer Länge. Man erhält die Tangente am Punt J'' dieser Krummen, wenn man J P (Fig. 1.) nimmt, dieselbe auf der $R'' R''$ (Fig. 2.) von J' nach P' trägt, und die Gerade $J'' P'$ zieht.

Ist dieses geschehen, so wickle man die Krumme $R''' J'' H'' R'''$ (Fig. 2.) auf, um sie wieder nach dem Kreisbogen S T U (Fig. 3.) zu biegen: zum Beyspiel, man trage den Bogen $R''' J''$ von S nach T, so ist T auf der aufgewickelten Fläche der Punkt, wohin sich der Punkt (J, *i*) (Fig. 1.) des sphärischen Schnittes auflegt. Wenn man daher die Gerade R T zieht, so hat man auf der Aufwicklung der Fläche die Stellung der Erzeugungslinie (A C, *a c*); (Fig. 1.): wenn endlich auf dieser Erzeugungslinie ein Punkt läge, den man auf die Aufwicklung übertragen sollte, wie der Punkt (C, *c*), so braucht man nur die Entfernung (Fig. 1) dieses Punkts vom Mittelpunkt der Kegelfläche zu nehmen, und sie (Fig. 3) auf der R T von R nach V zu tragen, so ist der Punkt V auf der aufgewickelten Fläche derjenige, den man betrachtet hat, und die Linie Y V W X der er angehört, ist die, auf dieselbe Aufwicklung übergetragene elliptische Grundlinie B C D E der Kegelfläche.

Die Tangente C P (Fig. 1) der Ellipse und die Tangente zu dem sphärischen Durchschnitt am Punkt (J, *i*) schließen mit dem Stücke (C J, *c i*) der Erzeugungslinie des Kegels ein in (J, *i*) rechtwinkliches Dreyeck ein, welches, da dasselbe in einer tangirenden Ebene zu der Kegelfläche enthalten ist, in der Aufwicklung sich nicht verändert; wenn man daher durch den Punkt T (Fig. 3) die Senkrechte T P'' auf die Gerade R T errichtet, auf dieser Senkrechten sodann die Länge (J P, *i p*) von T nach P'' trägt, und das rechtwinklige Dreyeck P'' T V vollendet, so ist die Seite P'' V Tangente zu der Krummen Y V W X, der Aufwicklung der elliptischen Basis B C D E der gegebenen Kegelfläche.

Fünfte Aufgabe.

Es sind zwey beliebige Kegelflächen gegeben; man soll ihren wechselseitigen Durchschnitt konstruiren?

313. Auflösung. Wir wählen als Beyspiel zwey schiefe Kegel, einen von kreisförmiger, und einen von elliptischer Basis, deren Axen in einer Ebene liegen, und wir nehmen die vertikale Projektionsebene parallel mit dieser Ebene an.

Es sey demnach (B, *b*) Taf XXX der Mittelpunkt der ersten Fläche und der Kreis Y D Z G ihre auf der Horizontalebene gegebene Grundlinie; (A, *a*) sey der Mittelpunkt der zweyten Fläche und die Ellipse V M X H ihre Grundlinie. Man führe durch die beyden Mittelpunkte eine Gerade (A B, *a b*) und konstruire ihren Durchschnittspunkt (I, i) mit der Horizontalebene. Durch diese Gerade (A B, a b) nehme man eine Reihe von Ebenen an, von welchen jegliche die beyden Kegelflächen nach zwey geraden Linien schneidet; so werden die geraden Schnitte der einen Fläche durch ihr Zusammentreffen mit den, in einerley Ebenen enthaltenen Schnitten der zweyten Fläche, die Punkte ihres wechselseitigen Durchschnittes bestimmen.

Die Horizontalrisse aller dieser Ebenen gehen nothwendig durch den Punkt I; man ziehe daher durch diesen Punkt die Tangenten zu einer von den Grundlinien der beyden Kegel, welche zu der andern Grundlinie entweder ebenfalls Tangenten sind oder Sekanten, wie in I E, I F in unserer Figur. Diese Tangenten sind die Horizontalrisse der äußersten schneidenden Ebenen; diejenige schneidende Ebene, deren Riß außerhalb des Winkels E I F fiele, könnte nicht beyden Flächen zugleich begegnen, und folglich keine Punkte des zu suchenden Durchschnittes enthalten. Der eine begränzende Riß I F schneidet die Grundlinie des einen Kegels in den Punkten D, D′, zieht man die Kanten (B D, b d), (B D′, b d') dieses Kegels und die Kante (A F, a f) des Zweyten, welche Letztere die beyden Ersten in den Punkten (α, α'), (γ, γ') des Durchschnittes trifft, so hat man in (B D, b d), (B D′, b d') zugleich auch die Tangenten zu der Durchschnittslinie an denselben Punkten; denn die genannten Kanten können als die Durchschnitte der, durch die Punkte (α, α'), (γ, γ') zu beyden Kegeln geführten tangirenden Ebenen betrachtet werden. Dieselbe Bemerkung gilt für die Punkte des Durchschnittes, welche man mittelst des Risses I E erhält.

Eine schneidende Ebene, deren Riß I G H in dem Winkel E I F liegt, trifft die Basis des ersten Kegels in den Punkten G, G′, und die des zweyten in den Punkten H, H′; wenn man durch diese Punkte die entsprechenden Kanten (B G, b g), (B G′, b g') und (A H, a h), (A H′, a h') der zwey Kegel zieht, so gehören die wechselseitigen Begegnungspunkte (P, p), (Q, q), (R, r), (S, s) dieser in einer nemlichen Ebene enthaltenen Kanten, dem Durchschnitte der zwey Flächen an. Bey einer jeden andern angenommenen Ebene, wiederhole man diese Operation und man erhält jedesmal einen entsprechenden Punkt mit (P, p), einen entsprechenden Punkt mit (Q, q), mit (R, r) und mit (S, s); alle auf diese Art analogen Punkte bemerke man mit dem gleichen Zeichen, weil sie offenbar einem nemlichen Zweige angehören. Wenn die zu konstruirende Durchschnittslinie geschlossene Zweige hat, so werden sich diese Zweige an den Punkten, welche durch die begränzenden Ebenen erhalten wurden, in einen Einzigen vereinen, wie bey (γ, γ'). Es ist daher rathsam, die Konstruktion von einer solchen Ebene ausgehend zu beginnen.

314. Wir haben bey dem Durchschnitte zweyer Cylinder (Art. 203) gesehen,

daß die Projektion dieses Durchschnittes auf der Ebene der beyden Grundlinien, unabhängig von der zweyten Projektionsebene konstruirt werde, sobald die zu den Erzeugungslinien der beyden Cylinder parallele Ebene bekannt ist. Derselbe Fall findet bey der vorliegen Aufgabe statt, sobald die Gerade (A B, *a b*), welche die Mittelpunkte beyder Flächen verbindet, bestimmt ist. Es folgt hieraus, daß in allen zwey Fällen die Horizontalprojektionen des Durchschnittes die gleichen bleiben, während die Neigungen der Erzeugungslinien bey den Cylindern, oder die Höhen der Mittelpunkte bey den Kegeln, verschiedene Stellungen annehmen können.

Wenn man jedoch die Punkte der Horizontalprojektion des Durchschnittes der zwey Kegelflächen verlangt, die auf der Geraden A B liegen, indem man diese Gerade als den Riß einer Ebene der angenommenen Reihe betrachtet, so lassen sich diese Punkte nur aus der Vertikalprojektion herleiten, indem man die Vertikalprojektonen $a\,v$, $a\,x$, $b\,y$, $b\,z$ der Kanten bestimmt, nach denen die Ebene A B die beyden Kegel schneidet, und die Begegnungspunkte δ', ε', β' ζ', dieser Geraden auf die Gerade A B nach δ, ε, β, ζ projektirt.

315. Diejenigen Ebenen der angenommenen Reihe, welche durch die Punkte X, Z, V, Y geführt sind, durch welche diejenigen Kanten beyder Flächen gehen, deren Vertikalprojektion die Gränze der Projektion der Fläche bilden, geben im Allgemeinen Punkte der Durchschnittslinie und zugleich die Vertikalprojektionen der Tangenten an denselben Punkten. Aber in unserm angenommenen Beyspiele, fallen alle diese Hülfsebenen mit der einzigen Vertikalebene Y A B Z zusammen, und die Tangente an irgend einem der genannten Punkte, (δ, δ') zum Beyspiel, ist in den zwey, auf die vertikale Projektionsebene senkrechten Ebenen $a\,v$, $b\,y$ enthalten; sie ist folglich ebenfalls senkrecht auf die Vertikalebene und ihre Vertikalprojektion fällt mit dem Punkt δ, zusammen. Derselbe Fall ist bey den Punkten (ε, ε'), (β, β'), (ζ, ζ'); die Tangenten an diesen Punkten sind senkrecht auf die Ebene Y A B Z. Es ergiebt sich hieraus, daß die Begränzungslinien $v\,a$, $x\,a$, $y\,b$, $z\,b$ der Vertikalprojektion beyder Kegel dieselbe Projektion ihrer Durchschnittslinie nicht berühren, sondern daß diese Projektionen an jenen Begränzungslinien scharf aufhören.

Dieses mit unserm in Art. 128. allgemein aufgestellten Satze im Widerspruch zu stehen scheinende Resultat folgt allein daraus, daß wir die beyden sich durchschneidenden Kegelflächen symetrisch auf eine Ebene angenommen haben, die zu einer Projektionsebene parallel ist. Die Durchschnittslinien der beyden Flächen muß deßhalb ebenfalls symetrisch seyn, in Bezug auf die Symetrieebene der Flächen, und die auf beyden Seiten dieser

Ebene gelegenen Theile der Durchschnittslinie, müssen sich auf die Ebene der Symetrie nach einer und derselben Linie projektiren.

Die Vertikalprojektionen $\beta' r \alpha'$, $\delta' p q \varepsilon'$, $\zeta' s$ der verschiedenen Zweige, sind daher an den Punkten β', δ', ε' ζ' kurz abgeschnitten, und sie entsprechen als Projektionen nur in dieser Ausdehnung der wirklichen Durchschnittslinie. Betrachtet man aber die genannten Linien $\beta' r \alpha'$, $\delta' p q \varepsilon'$, $s \zeta'$ als für sich bestehende Zweige einer geometrischen Linie, so können sie, zufolge des Gesetzes der Stetigkeit, dem alle geometrischen Kurven unterliegen, in β', δ' ε', ζ' nicht scharf abgebrochen seyn; sie müssen in sich selbst zurücklaufen, oder sich ins Unendliche ausdehnen. Obschon man daher durch die Konstruktionen, welche die gezeichneten Stücke der genannten Linie gaben, keine weiteren Punkte derselben mehr erhalten kann, so darf man daraus keine weitere Folgerung ziehen, als die, daß das Gesetz jener Konstruktionen nicht der ganzen Kurve, sondern blos einem gewissen Theile derselben entspreche, und so muß allein der Umstand erklärt werden, daß wenn man die Tangente an den Punkten δ', ε' der Kurve $\delta' p q \varepsilon'$ verlangt, man durch die gewöhnlichen Konstruktionen zu keinem Resultate komme, nicht aber als ob die Kurve an jenen Punkte keine Tangenten habe. Wir werden weiter unten bey einem ähnlichen Falle (Art. 326.) die Konstruktion derartiger Tangenten zeigen.

Wenn die Ebenen I X, I Z, I V, I Y von einander verschieden wären, so erhielte man mittelst dieser Ebenen Punkte der Durchschnittslinie, deren Vertikalprojektionen auf den Geraden $v a v'$, $x a x'$, $y b y'$, $z b z'$ lägen, und welche zugleich die Berührungspunkte dieser Geraden mit der Vertikalprojektion der Durchschnittslinie wären. Auf gleiche Weise würden, wenn die Projektionen A, B der Mittelpunkt beyder Flächen nicht innerhalb ihrer respektiven Grundlinien fielen, die Horizontalprojektionen beyder Kegel durch gerade Linien begränzt werden, und die Hülfsebenen, welche durch die Berührungspunkte dieser begränzenden Geraden mit den zugehörigen Grundlinien geführt wären, gäben Punkte des Durchschnittes, denen Tangenten entsprächen, welche als Horizontalprojektionen eben jene begränzenden Geraden hätten. Diese beyden Resultate sind ganz analog mit den im Art. 305. angeführten.

316. Zwey Cylinder, deren Basen geschlossene Kurven sind, können sich nur nach einer geschlossenen Kurve von einem einzigen, oder von zwey abgesonderten Zweigen durchschneiden. Ihre Durchschnittslinie erstreckt sich nur alsdann ins Unendliche, wenn die Basis eines Cylinders, oder auch die von beyden, Kurven von unendlichen Zweigen sind, zum Beyspiel Parabeln oder Hyperbeln. Die Durchschnittslinie zweyer Kegelflächen von geschlossenen Basen, können aber aus geschlossenen und unendlichen Zweigen zusammengesetzt seyn, und die nöthige Bedingung, daß das Letztere statt finde, ist, daß beyde Kegel

einige paralle Kanten haben; denn da jeder Punkt der Durchschnittslinie zweyer Kegelflächen durch die Begegnung zweyer von ihren Karten bestimmt ist, so kann offenbar ein solcher Punkt nicht im Unendlichen gelegen seyn, außer wenn die beyden Kanten parallel unter sich wären.

Um die parallelen Kanten zweyer sich durchschneidenden Kegelflächen aufzufinden, denke man sich, daß während der eine Kegel in unveränderlicher Stellung bleibt, der Andere dergestalt versetzt werde, daß sein Mittelpunkt mit jenen des ersten zusammenfalle, wobey jedoch alle seine Kanten parallel zu ihrer anfänglichen Stellung geblieben seyen. In dieser Lage schneide man beyde Kegel durch eine nemliche Ebene, so wird man als Schnitte zwey Kurven erhalten, die sich entweder selbst schneiden, oder berühren, oder gar keinen Punkt miteinander gemein haben. Wenn die Kurven sich schneiden oder berühren, und man denkt sich die, durch die Begegnungs- oder Berührungspunkte gehenden Kanten des ersten Kegels, so gehören diese zugleich auch dem versetzten Kegel an, und auf seiner ursprünglichen Stellung müssen diesen so gefundenen Kanten nothwendig eben so viele Parallelen entsprechen. Die Durchschnittslinie der zwey vorgelegten Kegelflächen muß daher in diesem Falle einen, oder ettliche sich ins Unendliche erstreckende Zweige haben.

Wenn die beyden oben genannten Kurven sich weder schneiden noch berühren würden, so wäre dies ein Beweis, daß die beyden Kegel keine parallelen Kanten hätten, und daß die Linie ihres wechselseitigen Durchschnittes nur aus geschlossenen Zweigen bestehen könnte.

317. In der Zeichnung der Tafel XXX. sind die gegebenen Kegelflächen von kreisförmiger und elliptischer Grundlinie. Der elliptische Kegel, dessen Mittelpunkt in (A, a) ist, wird durch die horizontale Ebene $f'\ n$ wiederum nach einer Ellipse (F′ V′ K′, $f'\ v'$) geschnitten, die man nicht nöthig hat punktweise zu konstruiren, weil sie der Basis V E H F ähnlich, und ihre Axen sich folglich zu denen der Basis verhalten, wie die Entfernungen der Mittelpunkte beyder Ellipsen zu dem Mittelpunkte der Fläche. Nimmt man den zweyten Kegel parallel zu seiner Urstellung so versetzt an, daß sein Mittelpunkt (B, b) nach (A, a) zu liegen komme, so wird er durch dieselbe Horizontalebene $f'\ n$ nach dem Kreise (M′ ψ′ K′, $f'\ \psi$) geschnitten werden.

Zur Bestimmung der Horizontalprojektion M′ ψ′ K′ dieses Kreises ziehe man durch (A, a) eine Parallele (A φ, $a\ \varphi'$) zu der Geraden (B χ, $b\ \chi'$), der Axe des zweyten Kegels. Der Durchschnittspunkt (φ, φ') dieser Parallelen mit der Ebene $f'\ n$ bestimmt den Mittelpunkt φ jenes gesuchten Kreises, und der Durchschnitt (ψ, ψ')

derselben Ebene mit einer durch (A, a) gezogenen Parallelen zu einer Kante (B X, $y\ b\ y'$) giebt einen Punkt ψ' seines Umfanges.

Der Kreis M′ ψ' K′ und die Ellipse F′ V′ K′ schneiden sich nun in zwey Punkten K′ und M′; zieht man durch diese Punkte, und durch A, die Geraden K′ A K, M′ A M, sodann durch B zu diesen Geraden die Parallelen $\varkappa'$ B $\varkappa$, μ' B μ, so hat man offenbar die Horizontalprojektionen von vier, wechselsweise zu zwey und zwey parallelen Kanten beyder gegebenen Kegelflächen. Die Durchschnittslinie dieser Flächen muß daher nothwendig Punkte im Unendlichen haben.

Betrachtet man aufmerksam die Stellung der beyden Flächen, so wird man einsehen, daß die Kanten des elliptischen Kegels, welche dem Bogen K X M seiner Grundlinie angehören, den kreisförmigen Kegel in den Punkten des unendlichen Zweiges ($\alpha\ \beta$ R, $\beta'\ r\ \alpha'$) treffen, die Kanten jenes ersten Kegels hingegen, die dem elliptischen Bogen M V K angehören, treffen das obere Netz des kreisförmigen Kegels, und zwar in den Punkten, des gleichfalls ins Unendliche sich ausdehnenden Zweiges (S ζ S′, $\zeta'\ s$).

Im Vorbeygehen wollen wir hier noch anführen, daß man mittelst der Hülfsebenen, deren Risse zwischen M μ I und F I fallen, Punkte des unteren unendlichen Zweiges findet, die auf dem Bogen $\alpha\ \omega$ zwischen dem Punkt α und dem Unendlichen gelegen sind. Diese Punkte haben keine analogen auf den übrigen Zweigen des Durchschnittes.

318. Die Tangente an einem Punkte des Durchschnittes zweyer Kegelflächen entsteht aus dem Durchschnitte der Ebenen, welche durch denselben Punkt tangirend zu den beyden Flächen geführt sind. Hat die Durchschnittslinie der zwey Kegel unendliche Zweige, so können diese auch Tangenten an den im Unendlichen gelegenen Punkten haben. Diese Tangemten, welche, wie schon bemerkt, Asymptoten heißen, werden, wie die gewöhnlichen Tangenten gebildet, nemlich aus dem Durchschnitte der, durch die Punkte im Unendlichen zu beyden Flächen geführten tangirenden Ebenen. Nun kann man nach dem im vorigen Artikel vorgetragenen Verfahren, die unter sich parallelen Kanten zweyer Kegelflächen finden, auf welchen Kanten, die im Unendlichen liegenden Punkte des Durchschnittes dieser Kegel sich befinden. Konstruirt man daher die Ebenen, welche die beyden Kegel nach ihren parallelen Kanten berühren, so werden diese tangirenden Ebenen, wenn sie anders nicht parallel sind, sich durchschneiden, und diese geraden Durchschnitte sind die Asymptoten zu der Durchschnittslinie der beyden Kegelflächen.

In unserer Figur (Taf. XXX.) kennen wir bereits die Horizontalprojektionen K′ A K, M′ A M, $\varkappa'$ B $\varkappa$, μ' B μ aller unter sich parallelen Kanten beyder gegebenen Kegel; zieht man daher durch die Punkte K, $\varkappa$, wo zwey solcher parallelen Kanten auf die Horizontalebene treffen, zu den beyderseitigen Grundlinien der Kegel die Tangenten

K L, ϰ L, so hat man die Horizontalrisse der Ebenen, welche die Kegel nach denselben Kanten berühren.

Der Begegnungspunkt L dieser Risse ist ein Punkt der einen Asymptote des Durchschnittes der beyden Kegel. Diese Asymptote muß überdies parallel zu den in K′ A K oder ϰ′ B ϰ projektirten Geraden seyn, weil jede der zwey Ebenen, deren Durchschnitt sie ist, durch eine dieser Geraden geht; daher ist die durch L gezogene Parallele L L′ zu ϰ′ B ϰ die Horizontalprojektion der gesuchten Asymptote; diese Projektion ist einerseits Asymptote zu dem Zweige α β R und anderer Seits Asymptote zu dem Zweige ζ S. Die Horizontalprojektion der Zweyten Asymptote, welche symetrisch mit der Ersten ist, in Bezug auf die Ebene A B I bestimmt sich auf die ganz gleiche Weise. Die beyden Asymptoten haben als gemeinsame Vertikalprojektion eine Parallele zu der Geraden $m\ a\ m'$, der Vertikalprojektion von K′ A K und M′ A M, und welche nur um die Tafel nicht zu überfüllen weggelassen sind. Diese Projektion wäre Asymptote zu den zwey Kurven $\alpha'\ r\ \beta',\ s\ \zeta$.

319. Wenn die beyden Kurven F′ V′ K′ und K′ ψ′ M′ statt sich zu schneiden, sich in einem oder in zwey Punkten berührten, so hätte jede Kegelfläche eine oder zwey Kanten, deren jeder eine Parallele auf der Andern entspräche; aber es ist leicht einzusehen, daß die Ebenen, welche die beyden Kegel nach diesen Kanten berührten, zu zwey und zwey parallel unter sich seyn müßten, weil sie wechselseitig durch zwey parallele Kantem und zwey parallele Tangenten giengen, und daß die Durchschnittslinie der Kegel, obgleich sie sich ins Unendliche erstreckte, dennoch keine Asymptoten hätte, oder vielmehr daß ihre Asymptoten ganz im Unendlichen lägen.

Wir bemerken noch, daß wir auf der Tafel XXX. die beyden Kegelflächen an den Horizontalebenen L M, $f'\ n$ beendigt angenommen haben, weil ihre Horizontalprojektionen, zufolge der angenommenen Stellung der Mittelpunkte, außerdem durchaus unbegränzt und die Zeichnung deßhalb zu undeutlich geworden wäre.

320. Bey zwey Kegeln vom zweyten Grad, wie in unserm angenommenen Beyspiele, besteht die Linie ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes außer den geschlossenen Zweigen, entweder noch aus parabolischen Zweigen ohne Asymptoten, oder aus hyperbolischen Zweigen mit zwey oder vier Asymptoten.

Die Anzahl dieser Zweige hängt von den respektiven Stellungen der beyden Kegel ab. Auf welche Art übrigens die verschiedenen Zweige zusammengesetzt seyn mögen, so können ihre Projektionen von einer Geraden in nicht mehr als in vier Punkten geschnitten werden. Befände sich der Mittelpunkt des einen Kegels auf der Fläche des Andern, so wäre dieser Mittelpunkt zugleich ein Punkt der Durchschnittslinie, und die Projektion dieses Punkts auf einer Ebene würde die Stelle eines Zweiges vertreten. Dieses Beyspiel zeigt in der Geometrie, was man in der Theorie der krummen Linien unter zusammengehörigem **Punkte** (punctum conjugatum, point isolé) verstehe.

Ist der Scheitel des einen Kegels auf der Fläche des Andern und diese Kegel haben noch eine Kante gemein, so ist diese Kante ein Zweig des Durchschnittes und die Zweige, welche diese Kurve vervollständigen können durch die gerade Linie nur in drey Punkten geschnitten werden.

Sechste Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt eines Cylinders und eines Kegels konstruiren?

321. **Auflösung.** Sind die Grundlinien des Kegels und des Cylinders auf einer Projektionsebene bestimmt, so wähle man als System durchschneidender Hülfsebenen, eine Reihe von Ebenen, welche durch den Mittelpunkt des Kegels, parallel zu den geraden Erzeugungslinien des Cylinders geführt sind. Diese Ebenen werden beyde Flächen nach geraden Linien schneiden, welche sich in Punkten des zu konstruirenden Durchschnittes begegnen.

Man ziehe daher durch den Mittelpunkt des Kegels eine Parallele zu einer Kante des Cylinders, und konstruire den Begegnungspunkt dieser Parallelen mit der Ebene der Grundlinien beyder Flächen. Durch diesen Punkt müssen die Risse aller durchschneidenden Hülfsebenen auf der Ebene der Grundlinien gehen.

Die Bestimmung der begränzenden Ebenen der angenommenen Reihe, und die Konstruktion der merkwürdigen Punkte ist ganz ähnlich mit der, welche wir bey der Konstruktion des Durchschnittes zweyer Kegel und zweyer Cylinder angewendet haben.

Sind die gegebenen Grundlinien des Kegels und des Cylinders geschlossene Linien, so kann ihre Durchschnittslinie aus geschlossenen oder unendlichen Zweigen bestehen. Um dieses im Voraus zu erkennen, bemerke man nur, ob die durch den Mittelpunkt des Kegels geführte Parallele zu den Kanten des Cylinders, die Ebene der Grundlinie des Kegels in einem Punkte des Umfanges dieser Grundlinie trifft, oder nicht. Findet das Letztere statt, so haben die beyden Flächen offenbar keine parallelen Kanten, und die aus ihrem Durchschnitte entstehende Linie hat blos geschlossene Zweige. Trifft aber die Parallele auf einen Punkt des Umfanges der Basis des Kegels, so sind alle Kanten des Cylinders parallel zu einer Kante des Kegels, und die tangirende Ebene zu dem Kegel an dieser Kante ist eine **asymptotische Ebene** der Durchschnittslinie des Kegels und des Cylinders. Wir überlassen dem Leser die Ausführung dieser Konstruktionen.

Siebente Aufgabe.

Es sind zwey Umdrehungsflächen gegeben, deren Axen sich in einem Punkte begegnen, man soll die Durchschnittslinie dieser Flächen konstruiren?

322. Wir wählen als Beyspiel der zwey Umdrehungsflächen ein Hyperboloid und und ein Paraboloid, und um die einfachsten Konstruktionen zu erhalten, wählen wir die Projektionsebenen dergestalt, daß die Horizontalebene, zum Beyspiel, senkrecht auf eine der beyden Axen sey, und die Vertikalebene parallel zu beyden Axen.

Bisher haben wir die Punkte des Durchschnittes zweyer Flächen bestimmt, indem wir jeden dieser Punkte, als den Begegnungspunkt zweyer Schnitte betrachteten, die in beyden Flächen durch eine nemliche Ebene gemacht wurden; und wir haben bey jedem einzelnen Falle dasjenige System durchschneidender Ebenen aufzufinden gesucht, welche die vorgelegten Flächen nach den am leichtesten zu konstruirenden Linien schnitten. Wie wir aber bereits (Art. 290.) bemerkt haben, so kann manchmal das System von durchschneidenden Ebenen mit Vortheil durch ein System durchschneidender krummer Flächen ersetzt werden. Dieser Fall findet bey dem vorliegenden Beyspiele statt.

Man betrachte den Begegnungspunkt der beyden gegebenen Axen als gemeinsamen Mittelpunkt einer Reihe von Kugeln, welche jede der beyden Umdrehungsflächen, nach dem Umfange von Kreislinien schneiden, deren Mittelpunkt auf den entsprechenden Axen liegen, und deren Ebenen senkrecht auf dieselben Axen sind. Zwey Kreise, deren Ebenen gegen einander geneigt sind, können sich nur auf der geraden Durchschnittslinie ihrer Ebenen begegnen. Wenn diese Gerade einen der Kreise trifft, so gehören die Begegnungspunkte der Durchschnittslinie der beyden Flächen an.

Es sey demnach (A, $a\,a'$) (Taf. XXXI.) die Axe des Hyperboloids und $c\,l\,e$, $e\,m\,c$ der Erzeugungsmeridian dieser Fläche; (A B, $a'\,b$) sey die geneigte Axe des Paraboloids, so daß (A, a') der Begegnungspunkt der zwey Axen, und daß ihre Ebene A B parallel zu der vertikalen Projektionsebene ist; $f\,d\,h\,n$ sey der Erzeugungsmeridian des Paraboloids. Eine Kugel, deren Mittelpunkt in (A, a'), und deren Halbmesser gleich $a'\,s$ ist, wird von der Meridianebene A B nach einem größten Kreise $i\,k\,m\,p$ geschnitten. Diese Kugel schneidet das Hyperboloid nach zwey horizontalen Kreisen, welche als Durchmesser die Sehnen $l\,m$ und $k\,o$ haben; dieselbe Kugel schneidet das Paraboloid nach zwey Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf (A B, $a'\,b$) sind, und deren Durchmesser gleich den Sehnen $i\,q$ und $n\,p$ sind.

Die Ebenen der vier genannten Kreise, welche sonach sämmtlich senkrecht auf die Vertikalebene A B sind, schneiden sich daher nach vier horizontalen Geraden; und da die Kreise auf einer nemlichen Kugel liegen, so gehören ihre vertikal in r, u, z projektirten Durchschnittspunkte dem zu bestimmenden Durchschnitte an.

Um die Horizontalprojektion eines dieser Punkte zu erhalten, zum Beyspiel des in r projektirten, konstruire man die Horizontalprojektion K R R′ des Kreises $k\,r\,u$, und ziehe durch r auf die Projektionsaxe die Senkrechte R r, so sind die Punkte R, R′ wo diese den Umkreis R K R′ trifft, die gesuchten Horizontalprojektionen, so daß die zwey Punkte (R, r), (R′, r) zwey Punkte der verlangten Durchschnittslinie sind.

Indem man den Halbmesser der durchschneidenden Hülfskugeln verändert, findet man so viele andere Punkte dieser Durchschnittslinie als man verlangt. In unserm Beyspiele besteht dieselbe aus zwey geschlossenen Zweigen. (R U T R′ V, $t\,r\,u\,v$), (Y Z W Z′, $y\,z\,w$).

323. Bey den so eben angewendeten Konstruktionen ist zu bemerken, daß die Sehnen $l\,m$, $i\,q$ und ihre entsprechenden in den andern Kreisen, sich in Punkten wie x schneiden können, welche Punkte, da sie nicht mehr innerhalb der Begränzungslinien $c\,l\,e$, $e\,m\,c$, $f\,d\,h$ der Projektionen beyder Flächen fallen, offenbar als Projektionen keinen Punkten der Durchschnittslinie mehr entsprechen können.

Es findet hier ganz der ähnliche Fall statt, wie bey den Konstruktionen Art. 315. Die Durchschnittslinie der zwey gegebenen Umdrehungsflächen ist symetrisch, in Bezug auf die, den beyden Flächen gemeinsame Meridianebene A B. Die Projektionen der zwey symetrischen Theile diese Linie auf der Ebene der Symetrie, fallen deßhalb in eine einzige Linie zusammen, welche Linie selbst nur ein Stück einer sich ins Unendliche erstreckenden Linie won zwey Zweigen ist. Obgleich aber dieselben Konstruktionen, mittelst welcher die Punkte dieser Linie erhalten wurden, die als Projektionen den Punkten der Durchschnittslinie entsprechen, auch noch angewendet werden können, um weitere Punkte der Linie $y\ z\ w$, $t\ r\ u\ v'$ zu finden, so entspricht doch das Gesetz dieser Konstruktionen nicht der Linie in ihrer ganzen Ausdehnung, sondern nur einem gewissen Theile derselben. Zu beyden Zweigen $t\,u\,v$, $z\,w$ können zum Beyspiel keine größeren Kreise angewendet werden, als die von Durchmesser $a'\,f$.

Da dieses Ergebniß durchaus unabhängig von der Gestalt der Erzeugungsmeridiane $c\ v\ l\ e$, $f\ g\ h$ ist, so folgt daraus, daß, von welcher besondern Art auch zwey Umdrehungsflächen seyn mögen, deren Axen sich begegnen, die Projektion ihres gemeinsamen Durchschnittes auf der Ebene der Axen keine vollendete Linie seyn könne. Uebriges aber kann diese Projektion Theil einer Linie von geschlossenen Zweigen seyn, oder einer Linie von unendlichen Zweigen, wie in unserm vorliegenden Falle.

324. Die Tangente an irgend einem Punkte (R, r) des Durchschnittes ergiebt sich wie in den vorhergehenden Beyspielen aus dem Durchschnitte der tangirenden Ebenen, die durch jenen Punkt zu beyden Flächen geführt sind. Wenn man daher die Risse dieser Ebenen auf der Horizontalebene konstruirt, und ihren Begegnungspunkt mit dem Punkte (R, r) durch eine Gerade verbindet, so ist diese Gerade die verlangte Tangente.

Die tangirende Ebene zu dem Hyperboloid, dessen Axe vertikal ist, konstruirt sich wie in Art. 89. angegeben worden. Der Parallelkreis, dessen Ebene $k\,o$ durch den Punkt (R, r) geht, schneidet den Meridian $c\,l\,e, e\,m\,c$ in einem Punkte k, durch welchen man die Tangente $c\,\alpha$ zu diesem Meridan zieht. Die Entfernung $a\,\alpha$ des Punkts α, wo jene Tangente die Projektionsaxe schneidet, von der Axe $(A, a\,a')$ trägt man von A aus auf der Geraden $A\ R$ nach β. Die Senkrechte $\delta\,\beta$ auf $A\,R$ ist der Horizontalriß der tangirenden Ebene zu dem Hyperboloid am Punkte (R, r).

Suchen wir nun den Horizontalriß der tangirenden Ebene zu dem Paraboloid in (R, r). Der Parallelkreis dieser Fläche von dem Durchmesser $n\,p$, dessen Ebene senkrecht auf die Axe $(A\ B, a'\ b)$ ist, schneidet den Meridian $h\ n\ f\ d$ in einem Punkte n; man ziehe durch n die Tangente $n\ \vartheta$ zu diesem Meridian. Es ist klar, daß wenn man den Punkt konstruirt, wo diese Tangente die Axe $(A\ B, a'\ b)$ trifft, und diesen Punkt mit (R, r) durch die Gerade $(R\,\lambda, r\,\lambda')$ verbindet, diese letztere Gerade, die Tangente zu dem Meridian des Paraboloids sey, welcher durch den Punkt (R, r) geht.

Durch den Punkt n ziehe man die Senkrechte $n\ \varepsilon'$ auf die Tangente $n\ \vartheta$; so ist der Punkt $(\varepsilon, \varepsilon')$, in welchem diese Senkrechte die Axe $(A\,B, a'\ b)$ trifft, derjenige, nach welchem alle Normalen zu dem Paraboloid längs den Punkten des Kreises $n\ p$ zusammenlaufen. (Art. 91.)

Wenn man daher durch $(\varepsilon, \varepsilon')$ und durch (R, r) die Gerade $(\varepsilon\ R, \varepsilon'\ r)$ zieht, so ist diese die Normale zu dem Paraboloid ein Punkt (R, r). Nun aber geht die tangirende Ebene an demselben Punkt dieser Fläche durch die Tangente $(R\ \lambda, r\ \lambda')$ und ist senkrecht auf die Normale $(\varepsilon\,R, \varepsilon'\,r)$; wenn man daher den Punkt konstruirt, wo die Gerade $(R\,\lambda, r\ \lambda')$ die Horizontalebene trifft, und durch diesen Punkt auf die $\varepsilon\,R$ die Senkrechte $\omega\,\delta$ errichtet, so ist diese Senkrechte $\omega\,\delta$ der Horizontalriß der gesuchten tangirenden Ebene zu dem Paraboloid. Sind die Risse $\delta\,\beta$ und $\delta\,\omega$ bekannt, so konstruire man die Projektion δ' ihres Begegnungspunktes δ, und die Gerade $(\delta\,R, \delta'\,r)$, die durch diesen letzten Punkt und durch (R, r) geführt wurde, ist die verlangte Tangente.

325. Die Konstruktion der Tangente mittelst der Normalebene zu der Durchschnittslinie läßt in dem vorliegenden Falle ein weit einfacheres Verfahren zu. Denn wenn man durch

den Punkt (R, r) zu beyden Umdrehungsflächen wechselsweise die Normalen zieht und durch diese Normalen eine Ebene führt, so ist diese normal zu dem Durchschnitte und die durch (R, r) auf diese Ebene geführte Senkrechte offenbar die verlangte Tangente. *)

Die Normale (R A, $r\,\gamma$) zu dem Hyperboloid schneidet die Axe (A, $a\,a'$) in dem Punkte (A, γ), welcher leicht zu bestimmen ist; die Normale (R ε, $r\,\varepsilon'$) zu dem Paraboloid trifft die Axe (A B, $a'\,b$) in dem schon gefundenen Punkt (ε, ε'); woraus folgt, daß die, durch diese beyden Normalen geführte Ebene, die Ebene der beyden Axen, welche zufolge der Annahme parallel mit der vertikalen Projektionsebene ist, nach der Geraden $\varepsilon'\,\gamma$ schneide. Die Senkrechte $r\,\delta'$, welche durch r auf die $\varepsilon'\,\gamma$ geführt wurde, ist daher die Vertikalprojektion der zu bestimmenden Tangente.

Die beyden Normalen (R A, $r\,\gamma$) und (R ε, $r\,\varepsilon'$) treffen die Horizontalebene in den Punkten π, ϱ; daher ist die Gerade $\pi\,\varrho$ der Horizontalriß der Ebene der zwey Normalen, und die Senkrechte R δ auf diesen Riß ist die Horizontalprojektion der Tangente am Punkt (R, r).

Alle so eben gemachten Konstruktionen, in Betreff der Tangente zu der Durchschnittslinie zweyer Umdrehungsflächen, deren Axen sich begegnen, sind auch noch in dem Falle gültig, wenn die beyden Axen sich nicht begegnen.

326. Wenn man die Tangenten zu der Kurve $t\ r\ u\ v$, $y\ z\ w$, an irgend einem ihrer äußersten Punkte t, v, y, w finden wollte, welche analog mit den in Art. 315. untersuchten Punkten sind, so würde man durch das gewöhnliche Verfahren zu keinem Resultate kommen; man würde in der That finden, daß die Tangenten an den Punkten (T, t), (V, v), (Y, y), (W, w) senkrecht auf die Vertikalebene sind, und daß ihre Vertikalprojektionen sich auf die Punkte t, v, y, w selbst reduzirten.

Durch das mit einigen Modifikationen angewendete Verfahren mittelst der Normalebene, lassen sich jedoch diese Tangenten bestimmen. In der That ist die Tangente an irgend einem Punkt der Kurve $t\ r\ u\ v$, $y\ z\ w$ durch die Bedingung bestimmt, daß sie senkrecht auf die Gerade, wie $\varepsilon'\,\gamma$ sey, nach welcher die entsprechende Normalebene dieses Punkts, die Ebene der beyden Axen schneidet. An den genannten Punkten t, v, rc. fällt aber die zugehörige Normalebene mit der Ebene der Axen zusammen, und ihr Durchschnitt scheint daher unbestimmt zu seyn; bemerkt man jedoch, daß diese gerade Durchschnittslinie, immer durch die beyden Punkte bestimmt wird, in welchen die Normalen, wie $r\,\varepsilon'$, $r\,\gamma$, die beyderseitigen Axen schneiden, so wird man einsehen, daß die

*) Dieses sehr anwendungsreiche Verfahren ist von J. Binet angegeben. Correspondance sur l'école polytechnique. Tom. III. pag. 190.

Tangenten an den Punkten t, v, y, w der Kurve $t\ u\ v$, $y\ z\ w$ nach der Vorschrift des Art. 325. zu finden seyen. Auf eben diese Weise würde man die Tangenten finden, welche den in Art. 315. untersuchten Punkten entsprechen.

Von den Durchschnitten der windischen Flächen. — Allgemeine Methode für die Bestimmung der Tangenten zu den krummen Linien.

327. Wenn zwey windische Flächen sich durchdringen, so ist die einfachste Art, ihre gemeinschaftlichen Punkte zu bestimmen, daß man die Flächen durch Ebenen schneidet, welche durch die geraden Erzeugungslinien der Einen von ihnen geführt sind. Da jedoch diese einzige Bedingung die Stellung der durchschneidenden Ebenen nicht festsetzt, so kann man dieselben überdies noch senkrecht auf eine der Projektionsebenen annehmen, und man erhält dadurch die gesuchten Punkte durch die Begegnungen von Geraden mit ebenen Kurven.

Nach der (Art. 154.) vorgetragenen allgemeinen Konstruktionsart der tangirenden Ebenen zu den windischen Flächen, ist es immer möglich an jedem beliebigen Punkte des Durchschnittes zweyer windischen Flächen die tangirenden Ebenen zu beyden Flächen zu bestimmen, und folglich die Tangente an demselben Punkte der Durchschnittslinie.

328. Diese letzte Eigenschaft der windischen Flächen leitet unmittelbar zu einer allgemeinen Auflösung des Problems der Tangenten. In der That, nehmen wir an, es sey an irgend einem Punkte einer ebenen krummen Linie die Tangente zu bestimmen; so kann man, welches auch der Umriß der Linie seyn mag, dieselbe immer betrachten, als auf einer windischen Fläche gelegen, die als Leitlinien erstlich die gegebene Krumme hat, und sodann noch zwey auf willkührliche Art im Raume gelegene Gerade. Nach Art. 154. kann man aber die tangirende Ebene zu dieser Fläche, an dem gegebenen Punkte konstruiren; der Durchschnitt dieser tangirenden Ebene mit der Ebene der Linie ist die verlangte Tangente.

Läge die gegebene Linie nicht in einer Ebene, so kann sie als der Durchschnitt zweyer windischen Flächen genommen werden, die eine gemeinschaftliche Leitlinie haben, nemlich die gegebene Linie, und von denen jegliche als besondere Leitlinien, zwey, willkührlich im Raume genommene Gerade hat. Für jede dieser zwey windischen Flächen läßt sich, wie schon bemerkt, an dem gegebenen Punkt die tangirende Ebene konstruiren, der wechselseitige Durchschnitt der beyden tangirenden Ebenen ist die gesuchte Tangente zu der Linie von doppelter Krümmung. *).

*) Eine Anwendung dieser Methode auf einer Ellipse, von ihrem Erfinder Hachette, findet man

In der Ausübung läßt sich diese Methode noch vereinfachen, wenn man bey jeder von den zwey windischen Flächen der einen geraden Leitlinie eine leitende Ebene substituirt, wodurch die Flächen sich in zwey Konoide verwandeln, (Art. 105.) und überdies kann man sowohl die geraden Leitlinien als die Ebenen des Parallelismus auf bequeme Art, in Bezug auf die Projektionsebenen gestellt annehmen.

Drittes Kapitel.

Von der Wahl der Projektionsebenen. — Erklärung verschiedener Projektionsmethoden.

329. Durch die bisher abgehandelten Aufgaben über die Durchschnitte der Flächen, haben wir hinlängliche Gelegenheit gehabt, einsehen zu lernen, wie sehr durch eine schickliche Wahl der Projektionsebenen, die bey jedem einzelnen Falle erfoderlichen Konstruktionen vereinfacht werden können. Von den zwey, zur Bestimmung der Durchschnittslinie einer Fläche und einer Ebene erfoderlichen Projektionen reduzirt sich Eine auf eine gerade Linie, wenn die Projektionsebene senkrecht auf die durchschneidende Ebene ist.

Bey dem Durchschnitte einer Umdrehungsfläche und einer Ebene oder einer andern Fläche wählt man als Projektionsebene eine Ebene, welche senkrecht auf die Axe der Umdrehungsfläche ist; dadurch projektiren sich alle Kreise der Fläche auf dieselbe wiederum als Kreise. Wenn zwey sich durchschneidende Flächen eine gemeinschaftliche Ebene der Symetrie haben, so vereinfacht man die Konstruktionen sehr, wenn man diese Ebene der Symetrie als eine der Projektionsebenen nimmt. Bey der Konstruktion des Durchschnittes zweyer Cylinder ist es, wie wir Art. 290. bemerkt haben,[1] vortheilhaft, diese Linie auf zwey Ebenen zu projektiren, wovon die eine parallel zu den Erzeugungslinien beyder Cylinder ist, und die Andere, senkrecht auf eine von denselben Erzeugungslinien.

---

in dessen zweytem Supplement zur Geometrie von Monge, §. II. Seite 4. und auf eine beliebige Kurve in Vallee's Géom. descr. Seite 267. Die sehr komplicirten Konstruktionen, welche diese Auflösung erfodert, machen dieselbe übrigens für die Praxis nicht so wichtig, als sie es für die spekulative Geometrie ist, wodurch dieselbe eine große bisher gewesene Lücke ausgefüllt. Ueber eine zweyte, auf ähnliche Betrachtungen gegründete Auflösung des nemlichen Problems sehe man den §. 2. des Anhanges.