Drittes Buch.

Durchschnitte der Flächen.

Erstes Kapitel.

Von den Durchschnitten der krummen Flächen und Ebenen.

208. Sind die Erzeugungen zweyer krummen Flächen vollkommen bestimmt und bekannt; hat, bey keiner von ihnen die Reihe aller Punkte des Raumes, durch welche sie geht, mehr etwas willkührliches; kann bey jedem dieser Punkte, sobald die eine der beyden Projektionen gegeben ist, stets die Andere konstruirt werden; und haben sodann diese Flächen einige Punkte im Raume gemein, so ist die Stellung aller dieser gemeinschaftlichen Punkte absolut bestimmt; sie hängt von der Gestalt der beyden krummen Flächen und von ihren respektiven Stellungen ab; und sie ist von solcher Beschaffenheit, daß sie immer aus der Erklärung der Erzeugung der Flächen hergeleitet werden kann, von der sie eine nothwendige Folge ist.

Die Reihe aller, zweyen bestimmten krummen Flächen gemeinschaftlichen Punkte, bildet im Allgemeinen im Raume eine gewisse krumme Linie, welche in ganz besonderen Fällen sich in einer gewissen Ebene befinden, und nur eine einzige Krümmung haben kann; welche in noch viel besonderern Fällen eine gerade Linie werden kann, ohne irgend eine Krümmung; welche endlich in noch unendlich besonderern Fällen sich auf einen einzigen Punkt beschränken kann; welche aber im allgemeinen Falle, eine krumme Linie von doppelter Krümmung ist.

209. Zwischen den Operationen der Analysis und den Methoden der darstellenden Geometrie herrscht eine Uebereinstimmung, von welcher hier nothwendig ein Begriff gegeben werden muß.

Wenn in der Algebra eine Aufgabe in Gleichungen gebracht ist, und man hat so viele Gleichungen als unbekannte Größen, so kann man stets die nemliche Anzahl von Gleichungen erhalten, bey denen, in einer jeden, nur eine unbekannte Größe vorkommt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Werthe jeder dieser Größen zu erkennen. Das Verfahren, wodurch man diesen Zweck erreicht, und welches Elimininátion genannt wird, besteht darinn, daß man mittelst einer Gleichung eine der Unbekannten aus allen übrigen Gleichungen wegschafft; und indem man auf solche Art die verschiedenen unbekannten Größen hinwegbringt, gelangt man zu einer Endgleichung, welche nur noch eine Einzige enthält, deren Werth sie hervorbringen muß.

Die Elimination in der Algebra hat die größte Aehnlichkeit mit den Operationen, mittelst welcher man in der darstellenden Geometrie die Durchschnitte krummer Flächen bestimmt.

In der That, nehmen wir an, daß man, einen Punkt im Raume betrachtend, und indem man durch x, y, z, die Abstände dieses Punkts von drey, unter sich senkrechten Ebenen vorstellt, ein wechselseitiges Verhältniß zwischen diesen drey Abständen festsetze; und daß dieses Verhältniß durch eine Gleichung ausgedrückt sey, in welcher die drey Größen x, y, z, nebst Konstanten vorkommen. Vermöge dieses Verhältnisses ist die Stellung des Punkts noch nicht bestimmt; denn die Größen x, y, z, können die Werthe ändern, und folglich der Punkt die Stellung im Raume, ohne daß das durch die Gleichung ausgedrückte Verhältniß zu bestehen aufhört, und die krumme Fläche, welche durch alle Stellungen geht, die der Punkt auf diese Weise einnehmen kann, ohne daß das Verhältniß zwischen jenen drey Coordinaten gestört werde, ist die, zu welcher die Gleichung gehört.

210. Nehmen wir zum Beyspiel an, eine Kugel, deren Halbmesser durch A ausgedrückt sey, habe ihren Mittelpunkt in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte von drey senkrechten Ebenen; und, indem man einen gewissen Punkt auf der Kugelfläche betrachtet, denke man sich aus diesem Punkt senkrechte Gerade auf die drey Ebenen gefällt, und durch die drey Buchstaben x, y, z, vorgestellt; so ist einleuchtend, daß der, nach dem betrachteten Punkt gerichtete Halbmesser der Kugel die Diagonale eines senkrechten Parallepipedums sey, dessen drey Kanten x, y, z sind; daß sein Quadrat gleich sey, der Summe der Quadrate der drey Kanten; und daß man demnach die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$ erhalte. Dieses festgesetzt, wenn der Punkt die Stellung auf der Kugelfläche verändert, so ändern sich auch seine Abstände x, y, z, von den drey senkrechten Ebenen, aber sein Abstand vom Mittelpunkte ändert sich nicht, und die Summe der Quadrate der drey Coordinaten, welche immer dem Quadrate des Halbmessers gleich

bleibt, behält stets den nemlichen Werth; daher findet zwischen den drey Coordinaten dieses Punkts abermals das wechselseitige Verhältniß statt, was durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$ ausgedrückt ist. Diese Gleichung, welche für alle Punkte der Kugelfläche gilt, und nur allein für diese, ist die Gleichung der Fläche. Alle krummen Flächen haben auf diese Art ihre Gleichungen; und wenn man diese Gleichungen auch nicht leicht immer in so einfachen Größen ausgedrückt erhalten kann, wie die Entfernungen x, y, z sind, so ist es doch stets möglich, dieselben in zusammengesetzteren Größen zu erhalten, wie die Neigungen der tangirenden Ebenen, die Krümmungshalbmesser u. dgl., für unsern Zweck war es hinreichend, eine als Beyspiel zur Kenntniß gebracht zu haben.

211. Hat man nun in x, y, z die Gleichungen zweyer verschiedenen krummen Flächen, in der Voraussetzung, daß für die Punkte der zwey Flächen die Abstände, in Bezug auf die nemlichen senkrechten Ebenen genommen seyen; und man eliminirt eine der drey Größen x, y, z, zum Beyspiel z aus den beyden Gleichungen, so setzt man durch die Gleichzeitigkeit der zwey Gleichungen vorerst fest, daß man sich weder ausschließlich mit allen Punkten der ersten Fläche beschäftige, noch mit allen Punkten der zweyten, sondern blos mit jenen ihres Durchschnittes, für welche Punkte sämmtlich die beyden Gleichungen gelten, weil sie zu gleicher Zeit auf beyden Flächen liegen. Die Gleichung aus x, y, welche durch die Elimination von z entsteht, drückt sodann das Verhältniß aus, was für alle Punkte des Durchschnittes, zwischen diesen zwey Abständen statt hat, welches auch der Abstand z seyn mag, der verschwunden, und von dem in der Gleichung weiter keine Rede ist; sie ist daher die Gleichung der Projektion des Durchschnittes der zwey Flächen auf die den z senkrechte Ebene.

Man sieht hieraus, daß in der Algebra der Zweck der Elimination unter mehreren Gleichungen von drey Unbekannten, der ist, auf den drey Ebenen, auf welche aller Raum bezogen wird, die Projektionen der Durchschnitte der Flächen zu bestimmen, zu welchen die Gleichungen gehören.

212. Die Uebereinstimmung zwischen den Operationen der Analysis und den Methoden der darstellenden Geometrie beschränkt sich nicht blos auf das so eben Angeführte, sie herrscht überall. Wenn man im Raume, um irgend beliebige Erzeugungen zu bewirken, Punkte, Linien, Flächen sich bewegen läßt, so können diese Bewegungen immer durch analytische Operationen vorgeschrieben werden, und die neuen Gegenstände, zu welchen sie Veranlassung geben, sind selbst wieder durch die Resultate jener Operationen ausgedrückt. Umgekehrt, giebt es keine analytische Operation in drey Dimensionen, welche nicht die Urkunde (écriture) einer im Raume bewirkten, und von ihr diktirten

Bewegung sey. Um die Mathematik auf die vortheilhafteste Weise zu erlernen, muß sich demnach der Schüler frühzeitig gewöhnen, die Uebereinstimmung zu fühlen, welche die Operationen der Analysis und der Geometrie unter sich haben, er muß sich in den Stand setzen, eines Theils alle Bewegungen, die er sich im Raume zu denken vermag, analytisch aufzeichnen zu können, und andern Theils sich beständig im Raume das bewegende Schauspiel vergegenwärtigen, von dem jede analytische Operation die Urkunde ist.

213. Kehren wir zu unserm Gegenstande zurück, dieser ist nemlich die Konstruktionsart der Durchschnitte krummer Flächen. Wie wir im nächstfolgenden Kapitel sehen werden, hängt die allgemeine Lösung dieser Aufgabe von derjenigen ab, wenn die eine der sich durchschneidenden Flächen eine Ebene ist. Wir haben uns aus diesem Grunde hier vorerst mit der Bestimmungsart der ebenen Schnitte der krummen Flächen zu beschäftigen.

214. Die Durchschnittslinie einer krummen Fläche und einer Ebene, ist nichts Anderes, als die Reihe der Punkte, in denen die Erzeugunglinie der krummen Fläche, in ihren verschiedenen Stellungen die Ebene durchschneidet. (Art. 66.) Nun aber kann diese Erzeugungslinie entweder eine gerade Linie seyn, oder eine einfach gekrümmte, oder drittens eine krumme Linie von gedoppelter Krümmung; und die Aufgabe: den Durchschnitt einer krummen Fläche und einer Ebene zu konstruiren, kommt also darauf zurück, die Durchschnitte jener drey genannten Gattungen von Linien durch eine Ebene zu bestimmen.

215. Wenn die vorgelegte Fläche durch eine Gerade erzeugt wird, so suche man den Begegnungspunkt irgend einer Erzeugungslinie mit der durchschneidenden Ebene nach den bereits bekannten Methoden, und man hat einen Punkt der zu bestimmenden Durchschnittslinie.

Dieses Verfahren, bey einer hinreichend erachteten Anzahl von geraden Erzeugungslinien wiederholt, giebt bey einer jeden einen solchen Durchschnittspunkt; die Projektionen aller auf diese Weise gefundenen Punkte bilden eine horizontale und eine vertikale Kurve, es sind die Projektionen des Durchschnittes der krummen Fläche und der Ebene.

216. Hat die krumme Fläche zur Erzeugungslinie eine ebene Kurve, so trifft diese Linie in irgend einer ihrer Stellungen, die durchschneidende Ebene in einem, oder in einer gewissen Zahl von Punkten. Diese Punkte liegen aber sowohl in der Ebene der Erzeugungskurve, als auch in der durchschneidenden Ebene, wenn man daher die Gerade konstruirt, nach welcher diese beyden Ebenen sich schneiden, so wird diese letzte Gerade, die Erzeugungskurve, mit der sie in einer Ebene liegt in irgend einer Anzahl von Punk-

ten treffen, welches eben so viele Punkte des Durchschnittes der vorgelegten krummen Fläche und der Ebene sind.

217. Der dritte Fall und zugleich der allgemeinste ist derjenige, wenn die krumme Fläche durch eine Linie von doppelter Krümmung erzeugt ist. Um die Punkte zu finden, in demen eine solche Erzeugungslinie die durchschneidende Ebene trifft, wendet man ein ähnliches Verfahren an, wie bey den einfach gekrümmten Linien. Man versetzt die Linie von doppelter Krümmung auf eine Fläche, welche die Gerade zur Erzeugungslinie hat. Die durchschneidende Ebene wird diese Fläche nach einer krummen Linie schneiden, und da diese letzte Linie und die gegebene Erzeugungslinie, auf einer nemlichen Fläche liegen, so müssen sie sich in einer gewissen Anzahl von Punkten begegnen; diese Punkte sind dieselben, in denen die Erzeugungslinie von doppelter Krümmung die durchschneidende Ebene trifft. Die Auflösung dieses dritten Falles wird durch diese Behandlung auf die des Ersten zurückgebracht.

Eine jede krumme Fläche ist in der darstellenden Geometrie durch ihre beyden Projektionen gegeben, und mit diesen Projektionen zugleich auch zwey projektirende Flächen derselben Linie, welche Flächen, wie bekannt zu dem Geschlechte der Cylinder gehören. Man konstruire daher die Durchschnitte dieser projektirenden Flächen mit der gegebenen Ebene (Art. 215.); die Punkte, in denen die erhaltene Durchschnittslinie und die gegebene Erzeugungslinie sich treffen, und deren Projektionen in den nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen müssen, sind die Begegnungspunkte dieser Erzeugungslinie mit der durchschneidenden Ebene.

218. Wenn zwey Flächen nach Gestalt und gegenseitiger Stellung bekannt sind, so ist nicht nur die Linie ihres Durchschnittes im Raume bestimmt, sondern alle Eigenschaften dieser Linie fließen auch unmittelbar daraus her. Nehmen wir an, man verlange zum Beyspiel die Tangente an irgend einem Punkte einer Kurve, die aus dem Durchschnitte einer krummen Fläche und einer Ebene entstanden sey? —

Wenn man durch den angegebenen Punkt eine tangirende Ebene zu der krummen Fläche führt, welcher die vorgelegte Kurve angehört, so berührt diese Ebene die Durchschnittslinie in dem gegebenen Punkt, und sie enthält folglich die verlangte Tangente. (Art. 70.) Da aber die Tangente auch in der Ebene des Schnittes liegen muß, so kann sie keine Andere seyn, als die Gerade, nach welcher diese letzte Ebene und die genannte tangirende sich schneiden. Die in der Ebene der Durchschnittskurve und durch den Berührungspunkt gezogene Senkrechte auf die Tangente, wäre die Normale zu der Kurve an demselben Punkte.

Aufgaben über die Konstruktion der ebenen Schnitte krummer Flächen.

Erste Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer gegebenen Cylinderfläche und einer Ebene von bekannter Stellung konstruiren?

219. Wir setzen zuerst voraus, daß, was immer thunlich ist, die Stellung der Projektionsebene so gewählt sey, daß die Eine senkrecht auf die Erzeugungslinie der Fläche sey, und die Andere senkrecht auf die durchschneidende Ebene, weil die Konstruktionen sich dadurch sehr vereinfachen. Wir werden sodann zur Uebung in den Projektionen die zwey Projektionsebenen auf beliebige Art gestellt annehmen.

220. Auflösung. Erster Fall: **Die Erzeugungslinie der Fläche ist senkrecht auf eine der Projektionsebenen, zum Beyspiel, auf die Horizontalebene, und die durchschneidende Ebene ist senkrecht auf die Andere genommen.**

Es sey (A, $a\,a'$) (Taf. XX.) eine zu der Erzeugungslinie der Cylinderfläche parallele Gerade; B C D E sey der Riß dieser Fläche auf der Horizontalebene, welcher zugleich die Projektion der unbestimmten Fläche ist, und folglich auch die des zu suchenden Durchschnitts; $f\,g$ sey die Vertikalprojektion der durchschneidenden Ebene, welche Projektion zugleich die der verlangten Durchschnittslinie ist; und die Senkre F G auf die Projektionsaxe L M sey der Horizontalriß derselben Ebene. Wenn man zu der Kurve B C D E und senkrecht auf L M die unbestimmten Tangenten E e'', C c'' zieht, so sind die Geraden $e\,e''$, $c\,c''$ die Projektionen der Erzeugungslinie in ihren äußersten Stellungen. und die Punkte e', c', in welchen sie die Projektion $f\,g$ der durchschneidenden Ebene treffen, begränzen auf der $f\,g$ die Vertikalprojektion des verlangten Durchschnitts.

Dieses festgesetzt, wenn man durch einen beliebig genommenen Punkt (H, i') des Durchschnittes eine Tangente zu diesem Schnitte führen will; so ist diese Tangente einmal in der durchschneidenden Ebene enthalten, und ihre Vertikalprojektion ist folglich die Gerade $f\,g$, sie muß aber auch in der tangirenden Ebene zu der Cylinderfläche enthalten seyn (Art. 218.), ihre Horizontalprojektion ist daher dieselbe wie die der tangirenden Ebene, nemlich die Gerade F H N, welche den Riß B C D E in H berührt. Somit ist, in Bezug auf den verlangten Durchschnitt, alles bestimmt.

221. Nehmen wir nun an, diese Durchschnittslinie solle, so wie sie wirklich in ihrer Ebene vorhanden ist, konstruirt, und durch irgend einen ihrer Punkte eine Tangente zu ihr gezogen werden.

Sollte die Vertikalebene zu weit von der Krummen B C D E abstehen, so kann man eine zu ihr parallele und in das Innere der Linie B C D E gehende Vertikalebene annehmen, deren Horizontalprojektion die Parallele E C zu L M seyn soll. Diese Vertikalebene schneidet die durchschneidende Ebene nach einer Geraden, welche parallel zu ihrer Projektion $f\,g$ ist, und wir nehmen an, die durchschneidende Ebene drehe sich um dieselbe als Scharnier, um selbst vertikal zu werden, und die verlangte Linie in ihrer wahren Gestalt zu zeigen. Dieses festgesetzt, denken wir uns, durch eine beliebige Anzahl willkührlich auf B C D E genommener Punkte H... ꝛc. vertikale Ebenen senkrecht auf die vertikale Projektionsebene geführt, deren Risse H K, $i\;i'$ demzufolge senkrecht auf L M sind. Jede dieser Ebenen schneidet die durchschneidende Ebene nach einer, auf das Scharnier rechtwinkligen horizontalen Geraden (H i, i'); überdem trifft in jeder Ebene, diese horizontale Gerade das Scharnier in einem Punkte (J, i), und die Durchschnittslinie in zwey Punkten (H, i'), (K, i'); endlich ist diese Gerade mit allen ihren Theilen gleich ihrer Horizontalprojektion. Nun aber, wenn die durchschneidende Ebene sich um das Scharnier dreht, um vertikal zu werden, so bleiben alle diese Geraden, welche anfänglich horizontal waren, immer senkrecht auf das Scharnier und ändern ihre Größe nicht. Wenn man daher durch alle Punkte i'... auf $f\,g$ die unbestimmten Senkrechten $h\,k$.. errichtet, und auf denselben J H von i' nach h trägt, und J K von i' nach k, so erhält man eine beliebige Anzahl Punkte h..., k..., durch welche man die verlangte krumme Linie $e'\;k\;c'\;h$ gehen läßt.

Um durch einen beliebig genommenen Punkt h der in ihrer Ebene konstruirten Durchschnittslinie $e'\;k\;c'\;h$ eine Tangente zu führen, bringe man diesen Punkt in seine ursprüngliche Stellung (H, i') zurück; man erhält sodann die Horizontalprojektion der verlamgten Tangenten, indem man die Gerade F N in H tangirend zu der Krummen B C D E führt. Wenn man einen beliebig genommenen Punkt (N, a') des Durchschnittes der tangirenden Ebene H N und der Ebene (G F, $f\,g$) auf die Vertikalebene E C zurücklegt, indem man auf $f\,g$ die Senkrechte $a'\;n$ zieht und auf derselben A N von a nach n trägt, so ist der Punkt n ein zweyter Punkt der verlangten Tangente, und diese ist folglich die Gerade $h\;n$.

222. Wir haben als Beyspiel einen geraden kreisförmigen Cylinder gewählt: der Schnitt desselben durch die gegebene Ebene ist eine Ellipse, deren Axen die Geraden $e'\;c'$, $b\;d$ sind. Welches übrigens die gegebene Linie B C D E seyn mag, so ist ersichtlich, daß der Durchschnitt $e'\;k\;c'\;h$ die Eigenthümlichkeit besitze, daß an irgend einem seiner Punkte die Subtangente $a'\;n$ gleich sey, der Subtangente A N des Ersten. Diese Eigenthümlichkeit, welche bey dem Kreise und der Ellipse, wenn diese Linien eine gemein-

schaftliche Axe haben, ganz bekannt ist, findet bey denselben nur darum statt, weil sie die Durchschnitte einer nemlichen Cylinderfläche durch zwey verschiedene Ebenen sind.

Aufwicklung des geraden Cylinders.

223. Nehmen wir an, man verlange die Aufwicklung der Cylinderfläche zu konstruiren, und auf derselben die erhaltene Durchschnittslinie zu verzeichnen.

Wenn man alle Kanten des Cylinders als eben so viele Scharniere betrachtet, um welche sich die Elemente der Fläche drehen, um sich nacheinander auf eine und dieselbe Ebene aufzulegen, so werden diese Kanten auch nach der Aufwicklung parallel unter sich seyn, und es ist einleuchtend, daß ein Schnitt des Cylinders, wie (B C D E, *e c*) dessen Ebene senkrecht auf seine Kanten ist, sich durch die Aufwicklung in eine gerade Linie verwandle. Denn die unendlich kleinen Bögen dieser Linie, welche auf jedem Element des Cylinders liegen, und welche man als geradlinig betrachten kann, sind senkrecht auf die parallelen Geraden, um welche sich diese Elemente drehen, sie fallen daher, nach der Aufwicklung, einer in die Verlängerung des andern, das heißt in eine gerade Linie.

Nachdem man sonach die Linie B C D E (Fig. 1.) mit allen ihren Abtheilungen auf eine Gerade R Q (Fig. 2.) aufgewickelt hat, und durch die Theilpunkte der R Q unbestimmte Senkrechte errichtet, so sind diese auf der Aufwicklung, die Stellungen der verschiedenen Kanten des Cylinders; und man braucht nur noch auf diesen Senkrechten die Theile der entsprechenden Kanten aufzutragen, welche zwischen dem senkrechten Schnitt (B C D E, *e c*) (Fig. 1.) und der durchschneidenden Ebene gefaßt sind. Nun aber sind diese Theile der Kanten gleich ihren Vertikalprojektionen, und diese Projektionen sind alle, einerseits an der Geraden L M, und andernseits an der Geraden *f g* begränzt. Wenn daher der Punkt H, zum Beyspiel, auf der Geraden R Q (Fig. 2.) nach S fällt und man trägt *i i′* auf der, durch S gehenden Senkrechten, von S nach T, so ist T auf der aufgewickelten Fläche der Punkt, in welchem die durch S gehende Kante von der durchschneidenden Ebene geschnitten wird. Die Linie X T Y Z, welche durch alle auf die nemliche Art bestimmten Punkte geht, ist die, in welche sich der vorliegende Schnitt durch die Aufwicklung verwandelt.

224. Es ist hier zu bemerken, daß obschon die Durchschnittsline des Cylinders und der Ebene eine geschlossene, in sich zurückkehrende Linie ist, sie sich durch die Aufwicklung doch in eine solche Linie verwandle, die sich in immer wiederholten Umwälzungen ins Unendliche erstreckt. Es ist in der That leicht einzusehen, daß man die Abtheilungen der Krummen B C D E (Fig. 1.) nach ihrer Reihenfolge unzählige male hintereinander auf der Geraden R Q (Fig. 2.) auftragen könne, und zwar nach den beyden

entgegengesetzten Seiten dieser Geraden; indem durchaus kein Grund vorhanden ist, aus welchem dieser Operation irgendwo eine Gränze angewiesen werden sollte. Durch jede so aufgetragene Länge der Linie B C D E (Fig. 1.) würde man auch wiederum einen neuen, dem schon gefundenen ganz ähnlichen Zweig der Aufwicklung des Schnittes (B C D E, $e' c'$) erhalten.

225. Die angegebene Konstruktion der Figur 2 liefert ein eben so einfaches, als genaues Mittel, um auf einem, dem gegebenen Cylinder gleichen körperlichen Cylinder die Wirkung des Schnittes der Ebene (F G, $f g$) (Fig. 1.) aufzutragen. Denn man brauchte nur die ebene Fläche P Q P′ Q′ (Fig. 2.) dergestalt auf den körperlichen Cylinder aufzurollen, daß die Punkte P und Q in Einen zusammen fielen, so würde die Linie X T Y Z auf diesem Cylinder eine, dem Schnitte (B C D E, $e' c'$), (Fig. 1.) vollkommen gleiche krumme Linie bilden.

Es ist einleuchtend, daß wenn man die Tangente an dem Punkt (H, i') (Fig. 1.) verlängert, bis sie die horizontale Projektionsebene in einem Punkt F trifft, und sodann H F auf der R Q (Fig. 2.) von S nach U trägt; die Gerade T U Tangente zu der aufgewickelten Durchschnittslinie sey. Denn das Element, das irgend eine Linie einer aufwickelbaren Fläche mit ihrer Tangente gemein hat, verändert durch die Aufwicklung den Winkel nicht, den dasselbe mit der durch den Berührungspunkt gehenden Kante der Fläche macht; daher bleibt auch der Winkel, den die Tangente mit der Berührungskante bildet, sowohl auf der Fläche, als auf ihrer Aufwicklung unverändert.

Zweyter Fall. (Taf. XXI.)

Die Cylinderfläche und die durchschneidende Ebene sind in beliebiger Stellung gegen die Projektionsebenen angenommen.

226. Auflösung. Es sey ($\alpha\ \beta$, $\alpha'\ \beta'$) eine Parallele zu der Erzeugungslinie der Cylinderfläche; A C B E der auf der Horizontalebene gegebene Riß derselben; und (H G, G f) die durchschneidende Ebene. Da die Neigung dieser Ebene gegen die Kanten des Cylinders durchaus in keiner Beziehung mit der vorliegenden Aufgabe steht, so haben wir diese Neigung rechtwinklig angenommen, und folglich die Risse H G, G f wechselsweise senkrecht auf $\alpha\ \beta$, und $\alpha'\ \beta'$, um die aus dieser Annahme sich ergebenden Konstruktionen bey der Lösung der nächstfolgenden Aufgabe benützen zu können. Die Projektionen der begränzenden Kanten des Cylinders bestimme man wie bereits angegeben. (Art. 78.)

Nachdem dieses geschehen, denke man sich eine Reihe von Ebenen, welche sämmtlich parallel zu der Erzeugungslinie der Cylinderfläche, und senkrecht auf eine Projektionsebene sind, zum Beyspiel senkrecht auf die Horizontalebene. Jegliche von diesen Ebenen wird sich auf die Honrizontalebene nach einer zu $\alpha\,\beta$ parallelen Geraden A C Q....rc. projektiren, und sie wird die Cylinderfläche nach zwey Erzeugungslinien schneiden, welche die Horizontalebene in den Begegnungspunkten C, A der Geraden A Q und der Kurve A C B E treffen. Man erhält demnach die Vertikalprojektionen dieser nemlichen Erzeugungslinien, wenn man die Punkte A, C auf die Vertikalebene nach a und c projektirt, und durch diese letzteren Punkte zu $\alpha'\,\beta'$ die Parallelen $a\,i$, $c\,p$ zieht. Aber die Vertikalebene A C Q schneidet die gegebene Ebene nach einer Geraden, welche durch den Punkt (K, k) geht, und deren Vertikalprojektion die Gerade $k\,n$ ist. Um einen zweyten Punkt n dieser letzten Geraden zu finden, ziehe man durch einen willkührlich genommenen Punkt (F, f) des Risses G f eine in der Ebene (H G, G f) gelegene Horizontale (F N, $f\,n$); diese schneidet die Vertikalebene A C Q in einen Punkt, dessen Horizontalprojektion N ist, und als dessen Vertikalprojektion man den gesuchten Punkt n findet. Die Begegnungspunkte i, p der Geraden $k\,n$ mit den Parallelen $a\,i$, $c\,p$ sind daher die Vertikalprojektionen derjenigen Punkte, in deren die Erzeugungslinien (A Q, $a\,i$), (C Q, $c\,p$) die Ebene (H G, G f) treffen: man bringe diese Punkte in Horizontalprojektion nach J, P, und man hat die Projektionen zweyer Punkte der zu bestimmenden Durchschnittslinie.

Ist die Richtung $n\,k$ der Vertikalprojektion eines Schnittes der angenommenen Hülfsebenen und der Ebene (H G, G f) einmal bekannt, so ergeben sich die Punkte beyder Projektionen der gesuchten Durchschnittslinie auf sehr einfache Art. Man braucht nur die Punkte K, O,...rc. in denen die verschiedenen Vertikalebenen A Q, E K...rc. den Riß H G treffen, auf die Vertikalebene zu projektiren, wodurch man eine Reihe von Punkten K, O...rc. erhält, und durch die Letzteren zu $n\,k$ die Parallelen $o\,m$....rc. zu ziehen; die Begegnungspunkte einer jeden Parallelen mit den entsprechenden Projektionen $b\,l$, $c\,m$ der Kanten des Cylinders bringe man in Horizontalprojektion auf die zugehörigen Geraden E K..., so erhält man die weiteren Punkte (L, l), (M, m)....rc. des verlangten Durchschnittes, dessen Projektionen I P L M, $i\,m\,l\,p$ man verzeichnen kann, so wie man eine zureichende Zahl jener Punkte bestimmt hat.

227. Um die Tangenten zu diesen beyden Projektionen an den Punkten L, l zu erhalten, erinnern wir uns, daß diese Tangenten die Projektionen der Tangente zu der Durchschnittslinie sind. Da nun aber diese letzte Tangente sowohl in der durchschneidenden Ebene, als in der tangirenden Ebene zu dem Cylinder an dem Punkt (L, l) enthalten ist, so kann der Punkt zum Beyspiel, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet, kein anderer seyn, als der Begegnungspunkt der Horizontalrisse jener bey-

den genannten Ebenen, und wenn man die Projektionen dieses Begegnungspunktes mit den entsprechenden Punkten L, l verbindet, so hat man die verlangten Tangenten, oder die Projektionen der Tangente zu der Durchschnittslinie am Punkt (L, l). Aber die tangirende Ebene zu dem Cylinder an diesem Punkt hat als Horizontalriß die Tangente in D zu dem Risse A C D E. Man ziehe daher diese Tangente und verlängere sie bis zu ihrer Begegnung in H mit dem Risse H G; den Punkt H bringe man in Vertikalprojektion nach h; man ziehe die Geraden H L, $h\ l$, und man hat die verlangten Tangenten.

228. Nach dem (Art. 128. I.) Gesagten ist es ersichtlich, daß auf der Horizontal- und Vertikalebene die geraden Begränzungslinien der Projektion des Cylinders die respektiven Projektionen der Kurve (I M L P, $i\ l\ m\ p$) berühren müssen. Allein es ist eben so leicht einzusehen, daß die beyden, durch die Geraden $\gamma\ \mu$, $\delta\ \pi$ geführten Vertikalebenen tangirend zu dem gegebenen Cylinder seyen. Die Schnitte dieser Vertikalebenen und der Ebene (H G, G f) sind daher auch berührend zu dem Durchschnitte des Cylinders und derselben Ebene. Durch die Anwendung der genannten Vertikalebenen $\gamma\ \mu$, $\delta\ \pi$ erhält man sonach zu gleicher Zeit zwey Punkte (ϱ, ϱ') (s, s') des gesuchten Durchschnittes und die Tangenten ($\mu\ \varrho$, $\mu'\ \varrho'$), ($\pi\ s$, $\pi'\ s'$) an denselben Punkten.

229. Soll die Durchschnittslinie so konstruirt werden, wie sie in ihrer Ebene vorhanden ist; so nehme man die Ebene (H G, G f) sammt dem in ihr enthaltenen Durchschnitte um ihren Riß H G gedreht, und auf die horizontale Projektionsebene zurückgelegt an. Bey der Bewegung der Ebene wird jeglicher Punkt des Schnittes, zum Beyspiel der in L projektirte, den Umfang eines Kreises beschreiben, dessen Ebene vertikal ist, und unbestimmt in der Geraden B L O projektirt. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist in O, und sein Halbmesser die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen Seiten O L und $l'\ l$ sind. Trägt man daher diese Länge auf der Geraden B L von O nach R, so ist R die Stellung des Punktes (L, l) der Durchschnittslinie des Cylinders, nachdem die Ebene derselben sich auf die horizontale Projektionsebene zurückgelegt hat. Die durch alle, auf ähnliche Art konstruirten Punkte gezogene Krumme R S Q Z ist diese Durchschnittslinie selbst in ihrer Ebene betrachtet.

Die Tangente an irgend einem Punkt R der Krummen R S Q Z ergiebt sich nach der einzigen Bemerkung, daß diese Tangente während der Bewegung der durchschneidenden Ebene nicht aufhört, durch den Punkt H zu gehen, wo sie die Horizontalebene durchschneidet: H R ist daher diese Tangente.

Mittelst der Zurücklegung der Ebene (H G, G f) auf die vertikale Projektionsebene hätte man die, der Krummen R S Q Z ganz gleiche Krumme R′ T′ S′ erhalten, und zwar durch ein ganz ähnliches Verfahren.

Aufwicklung des schiefen Cylinders.

230. Wir haben bereits (Art. 223.) gesehen, daß bey der Aufwicklung irgend einer Cylinderfläche die Kanten derselben ihre parallele Stellung unter sich beybehalten. Es folgt aus diesem, daß jede Linie, welche die sämmtlichen Kanten einer Cylinderfläche unter einem nemlichen Winkel durchschneidet, sich durch die Aufwicklung der Fläche in eine gerade Linie verwandle. Die einfachste Linie dieser Art ist der gerade Schnitt des Cylinders, das heißt, der Schnitt durch eine auf die Erzeugungslinie der Fläche senkrechte Ebene. Dieser Schnitt wird in der Aufwicklung eine Gerade, welche die parallelen Kanten rechtwinklig durchschneidet. Wenn man daher diesen Schnitt des Cylinders auf einer Ebene rektifizirt und durch jeden seiner Punkte eine Gerade zieht, welche auf ihn senkrecht ist, so bildet das Ganze dieser senkrecht Geraden die vollständige Aufwicklung des Cylinders.

Es sey der (Taf. XXI. Fig. 1.) gegebene schiefe kreisförmige Cylinder aufzuwickeln und die kreisförmige Grundlinie desselben auf die Aufwicklung überzutragen.

Nachdem man zu diesem Ende den geraden Schnitt (I L M P, $i\ m\ l\ p$), und die Zurücklegung R S Q dieses Schnittes auf eine der Projektionsebenen konstruirt hat, theile man die Kurve R S Q in Bögen V X, X Z, Y S.... V R, R Z, die klein genug sind, um von ihren respektiven Sehnen nicht bemerkbar zu differiren. Sodann trage man auf einer willkührlich gezogenen Geraden $q'\ q'$ (Fig. 2.) und von einem Punkt v dieser Geraden anfangend, auf einer Seite nacheinander die Theile V X, X Y, Y Z....rc. (Fig 1.) nach $v\ x$, $x\ y$, $y\ z$ (Fig. 2.); sodann die Theile V R, R Z....rc. (Fig. 1.) von v (Fig. 2.) nach $v\ r$, $r\ z$....rc. Die unbestimmte Gerade $q\ q'$ stellt die Rektifikation der Kurve R S Q (Fig. 1.) vor, wenn man nemlich diese Kurve als unendliche male in sich selbst zurücklaufend betrachtet.

Wenn man sofort durch die verschiedenen Punkte v, x, y... r, z...rc. der unbestimmten Geraden $q\ q'$ Senkrechte auf diese Gerade errichtet, so hat man die verschiedenen Kanten des Cylinders, die den Punkten V, X, Y.... R, Z... (Fig. 1.) entsprechen, und das Stück der Ebene der Fig. 2., was zwischen den zwey Senkrechten $q\ a$, $q'\ a'$ gefaßt ist, stellt das Stück der Aufwicklung des Cylinders vor, was einem Umlaufe der Kurve V R S Q (Fig. 1.) entspricht.

Wir haben den Punkt v (Fig. 2.) genommen, um den Punkt V (Fig. 1.), oder was das nemliche ist, den Punkt (P, p) vorzustellen; den Punkt r (Fig 2.) um den

Punkt R (Fig. 1.) oder den Punkt (L, l) vorzustellen ꝛc. Um daher die Grundlinie A C D E des Cylinders auf die Aufwicklung überzutragen, braucht man nur die wahren Längen der Kanten des Cylinders, die zwischen der Grundlinie und dem geraden Schnitte gefaßt sind, auf die entsprechenden Senkrechten der Figur 2 aufzutragen; zum Beyspiel die Länge (P C, p c) von v nach c (Fig. 2) die Länge (L D, l d) (Fig. 1) von r nach d (Fig. 2) u. s. w., und man erhält jedesmal einen Punkt c, d... ꝛc. der übergetragenen Grundlinie.

Es ist einleuchtend, daß die solchergestalt erhaltene Linie a' l' d c a sich nach beyden Seiten ins Unendliche erstrecke. Das zwischen den Punkten a, a' gefaßte Stück dieser Linie entspricht einem Umlaufe der Kurve A C D E (Fig. 1).

231. Will man an irgend einem Punkt d der Kurve a' c' d c a (Fig. 2.) die Tangente erhalten; so ziehe man durch diesen Punkt die Senkrechte d r auf q q'; man bestimme sodann auf dem geraden Schnitte (Fig. 1) den Punkt (L, l), welcher dem Punkte r, (Fig. 2) entspricht, und indem man durch (L, l) die Erzeugungslinie des Cylinders führt, findet man den Punkt D der Grundlinie als entsprechenden Punkt des Punktes d (Fig. 2) der Aufwicklung. Ist dieses geschehen; so ziehe man in D die Tangente zu der Grundlinie A C E D, woraus man die Tangente (H L, h l) zu dem geraden Schnitte in (L, l) und die Tangente R H zu der Kurve R S Q ableitet.

Nun aber liegt die Tangente D H mit der Tangente (H L, h l) in einer nemlichen tangirenden Ebene zu dem Cylinder, und sie bildet mit der Geraden (L D, l d) ein in (L, l) rechtwinkliges Dreyeck, dessen Hypothenuse H D, und dessen eine Seite gleich H R ist. Man trage daher die Länge R H (Fig. 1) auf q q' (Fig. 2) von r nach lh; und ziehe h d, so bildet man ein Dreyeck d r h gleich dem Dreyecke (D L H, d l h) (Fig. 1); und da der Winkel (H D L, h d l) der Erzeugungslinie und der Tangente sich durch die Aufwicklung des Cylinders nicht ändert, so ist einleuchtend, daß die Gerade h d (Fig. 2) Tangente in d zu der Kurve a' c' d c a sey.

Zweyte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer Kegelfläche durch eine gegebene Ebene konstruiren?

232. Auflösung. Wir nehmen als Beyspiel einen geraden kreisförmigen Kegel, und, um so einfach als möglich zu operiren, nehmen wir die horizontale Projektionsebene senkrecht auf die Axe des Kegels, und die vertikale Projektionsebene senkrecht auf die durchschneidende Ebene an.

Es sey (A, a) (Taf. XXII.) der Mittelpunkt der Kegelfläche; der aus A als Mittelpunkt beschriebene Kreis B C D Q sey der Schnitt des Kegels durch die horizontale Projektionsebene F d sey der vertikale Riß der durchschneidenden Ebene, und die Senkrechte F E auf die Projektionsaxe L M ihr horizontaler Riß. Man bestimmt die Gränzen $r\,a\,u$, $q\,a\,s$ der Vertikalprojektion des Kegels, indem man die Endpunkte R Q des zu L M parallelen Durchmessers des Kreises B C D Q nach r und q projektirt, und diese Punkte mit der Projektion a des Mittelpunktes der Fläche verbindet.

Dieses festgesetzt, so sieht man sogleich, daß die zwey Punkte B, C, in denen sich die Risse des Kegels und der durchschneidenden Ebenen begegnen, nothwendig zwey Punkte ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie sind. Auf der Vertikalebene ist dieser Durchschnitt unbestimmt in der Geraden F d projektirt; aber die Punkte m und g bestimmen die Gränze dieser Projektion, man bringe daher dieselbe Punkte in Horizontalprojektion nach M und G auf der Geraden R Q, so hat man zwey weitere Punkte der Horizontalprojektion des verlangten Durchschnittes.

Um andere Punkte dieser Linie zu erhalten, konstruire man eine beliebige Zahl von geraden Erzeugunglinien (H K, $h\,k$), (H′ K′, $h\,k$) .... ꝛc.; man bestimme die Punkte (I, i), (I′, i), in denen sie die durchschneidende Ebene treffen, so sind diese die gesuchten.

Die auf solche Weise erhaltene Durchschnittslinie besteht aus zwey, auf beyden Netzen der Kegelfläche gelegenen Zweigen (B J M C... P G P′, F m... $g\,d$). Aus der Stellung des Risses F d läßt sich schließen, daß der Kegel und die durchschneidende Ebene immer fortfahren werden sich zu durchschneiden, wie weit man sie auch verlängeren möge, und daß demnach die beyden Zweige ihres Durchschnittes sich ins Unendliche ausdehnen werden.

233. Um jedoch sogleich bestimmen zu können, ob die Durchschnittslinie eines Kegels und einer Ebene aus geschlossenen oder unendlichen Zweigen bestehe, bemerke man nur, daß dieser Umstand allein davon abhängt, ob die durchschneidende Ebene die sämmtlichen Kanten der Kegelfläche trifft, oder ob sie einer oder mehreren nicht begegnet, was aber nur alsdann geschehen kann, wenn diese Kanten parallel zu der schneidenden Ebene wären. Im ersten Falle wäre die Durchschnittslinie geschlossen, im andern Falle bestünde sie aus unendlichen Zweigen.

Um sofort zu finden, ob die vorliegende Kegelfläche Kanten habe, welche parallel zu der durchschneidenden Ebene sind, führe man durch den Mittelpunkt (A, a) der Fläche eine Ebene parallel zu der durchschneidenden. Diese Ebene schneidet in unserm Beyspiele den Kegel nach zwey Kanten (δ A, $\alpha\,a$), (β A,; $\alpha\,a$), welche sonach parallel zu der Ebene (E F, F d) sind, und von dieser letzteren nicht getroffen werden können, außer im Unendlichen. Es folgt hieraus, daß die beyden Zweige der gesuchten Durchschnittslinie sich ins Unendliche erstrecken. Die Reihe von Erzeugungslinien, welche durch die Punkte des Bogens δ R β gehen, treffen die durchschneidende Ebene in den Punkten des Zweiges (B M C, F m). Die Erzeugungslinien hingegen, welche den Punkten des Bogens δ Q β entsprachen, bilden durch ihr Zusammentreffen mit der durchschneidenden Ebene den oberen Zweig (P G P′, g d) des Durchschnittes.

234. Man erhält die Tangente an irgend einem Punkte der gefundenen Durchschnittslinie, wenn man die Gerade konstruirt, nach welcher die tangirende Ebene an demselben Punkte des Kegels, der durchschneidenden Ebene begegnet.

Wenn, wie in unserem Beyspiele, die Durchschnittslinie der Kegelfläche und der Ebene aus unendlichen Zweigen besteht, so kann es seyn, daß diese Linie Tangenten habe, welche dieselbe an den Punkten im Unendlichen berühren, und welche man die Asymptoten des Schnitts nennt. Aber auch diese Tangenten sind nichts anderes, als die Durchschnitte der Ebenen, welche den Schnitt im Unendlichen berühren, mit der durchschneidenden Ebene.

Da wir nun die Erzeugungslinien (δ A, α a), (β A, α a) kennen, auf denen die Punkte im Unendlichen liegen, so können wir auch die tangirenden Ebenen an diesen Punkten konstruiren. Diese Ebenen haben haben als Horizontalrisse die Tangenten $\delta\,\zeta$, $\beta\,\pi$ zu dem Kreise B C D Q an den Punkten δ, β. Diese Risse treffen den Riß E F in den Punten ζ, π, welche daher den Asymptoten des Schnittes angehören. Aber diese Asymptoten müssen wechselsweise parallel seyn, zu den Erzeugungslinien (δ A, α a), (β A, α a), weil die durchschneidende Ebene sowohl als die beyden tangirenden Ebenen, wechselseitig parallel zu diesen Erzeugungslinien sind. Daher endlich sind die Parallelen $\zeta\,\vartheta$, $\pi\,\varphi$ zu den Projektionen δ A, β A die Horizontalprojektionen der gesuchten Asymptoten.

235. Will man die Zurücklegung der Ebene des Schnittes (B M C.. P G P′, F m.. g d) auf eine der Projektionsebenen konstruiren, um diesen Schnitt in seiner wahren Gestalt zu erhalten, so verfahre man auf dieselbe Weise wie bey den beyden vorhergehenden Fällen. In unserer Figur (Taf. XXII.) haben wir die Ebene des Schnittes als auf die vertikale Projektionsebene zurückgelegt angenommen, und die Kurve (b' m' c', p' g' p'') als die Gesuchte erhalten. Sollen die Asymptoten ζ' ϑ', π' φ' der in ihrer Ebene konstruirten Durchschnittslinie bestimmt werden, so sind für jede von ihnen zwey Punkte nöthig: man ziehe zum Beyspiel. ζ' F senkrecht auf F d und trage die Weite π F von F nach π'; die Weite ζ F von F nach ζ', ferner ziehe man p φ'

ebenfalls senkrecht auf F d und bestimme auf derselben zwey weitere Punkte, deren Abstände von der Geraden F d auf der Vertikalen P P′ gemessen werden; so hat man das Gesuchte.

Aufwicklung des geraden kreisförmigen Kegels.

236. Bemerken wir vorerst, daß, wenn eine Kegelfläche sich aufwickelt, um eben zu werden, die geraden Linien dieser Fläche weder Gestalt noch Größe ändern, weil jegliche nach der Reihe das Scharnier wird, um welches die Aufwicklung sich bewerkstelligt: sonach bleiben alle Punkte der Fläche stets in der nemlichen Entfernung von dem Mittelpunkte. Wenn aber eine Kegelfläche gerade und kreisförmig ist; so sind alle Punkte der kreisförmigen Basis gleich weit vom Mittelpunkte entfernt; sie müssen daher auf der Aufwicklung abermals in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte seyn, und folglich auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser gleich ist, der beständigen Entfernung des Mittelpunktes der Fläche von ihrer kreisförmigen Grundlinie.

Hat man daher auf einer Ebene (Taf XXIII.) einen Punkt a genommen, um auf der Aufwicklung den Punkt (A, a) des (Taf. XXII.) gegebenen Kegels vorzustellen; und man beschreibt aus diesem Punkt als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser gleich $a\,r$ (Taf. XXII.) einem bestimmten Kreisbogen $q\,r\,q'$ (Taf. XXIII), so ist dieser Kreisbogen auch unbestimmt, die Aufwicklung der Grundlinie B C D des gegebenen Kegels (Taf. XXII.). Nehmen wir nun die beliebig gezogene Gerade $r\,a\,u$ (Taf. XXIII.) um die Kante (R A Q, $r\,a\,u$) (Taf. XXII.) vorstellen, und indem wir annehmen, die Fläche öffne sich nach der Kante (Q A R, $q\,a\,s$); trage man den Bogen R B Q auf den Bogen $q\,r\,q'$ (Taf. XXIII.) von r nach q und den Bogen R C Q (Taf. XXII.) von r (Taf. XXIII.) nach $r\,c\,q'$; ziehe sodann die Geraden $q\,a\,s$, $q'\,a\,s'$, so werden diese beyden Geraden der Kante (Q A R, $q\,a\,s$) (Taf. XXII.) entsprechen, dergestalt, daß der Ausschnitt $a\,q\,q'$ die Aufwicklung des untern Netzes der Kegelfläche, und der Ausschnitt $a\,s\,s'$ die Aufwicklung ihres oberen Netzes vorstellt,

Um nun den Schnitt des Kegels durch die gegebene Ebene auf der Aufwicklung zu erhalten, fange man damit an, die verschiedenen Kanten der Kegelfläche übertragen. Zum Beyspiel, man trage den Bogen R H (Taf. XXII.) von r (Taf XXIII.) nach h und ziehe die Gerade $h\,a$, so hat man auf der Aufwicklung die Stellung der Kante (H A K′, $h\,a$) (Taf. XXII.) bestimmt. Auf dieser Kante liegt der Punkt (I, i) des Schnittes; man trage daher die Entfernung (I A, $i\,a$) $=$ $a\,l$ dieses Punktes von dem Punkt (A, a) auf der $h\,a$ (Taf XXIII.) von a nach i, und man hat einen Punkt der übertragenen Durchschnittslinie. Durch diese, bey einer hinlänglichen Zahl von Punkten des Schnittes (B M C.. P G P′, F m,.. $g\,d$) (Taf. XXII.) wiederholte Operation erhält man die Uebertragung ($b\ m\ c \ldots g\ p\ d \ldots g'\ p'\ d'$) (Taf. XXIII.) dieses Schnittes auf der Aufwicklung.

Nach der Voraussetzung, daß die Kegelfläche (Taf. XXII.) sich an der Kante (Q A R, $q\ a\ s$) öffne, ist es ersichtlich, daß der obere Zweig des überzutragenden Schnittes sich auf der Aufwicklung des Kegels in zwey Theile $g\ p\ d$, $g'\ p'\ d'$ theilen müsse.

237. Die Asymptoten des Schnittes der Kegelfläche und der Ebene (G F, F d) (Taf. XXII.) trägt man auf die Aufwicklung (Taf. XXIII.) über, indem man sie als Tangenten an den Punkten des Schnittes im Unendlichen betrachtet. Nun sind aber die beyden Asymptoten in den tangirenden Ebenen zu dem Kegel in β und δ enthalten (Taf, XXII,), in welchen Ebenen auch die zu der durchschneidenden Ebenen parallelen Kanten (δ A, $\alpha\ a$), (β A, $\alpha\ a$) gelegen sind; die Asypmtoten werden folglich in der Aufwicklung weder ihre parallele Lage gegen diese Kanten, noch ihre respektiven Entfernungen von denselben verändern. Nachdem man daher auf der Taf. XXIII. (Fig. 1.) die Stellungen $\beta'\ a$, $\delta'\ a$ jener Kanten bestimmt hat, so ziehe man $\beta'\ \pi'$ senkrecht auf $\beta'\ a$; mache $\beta'\ \pi' = \beta\ \pi$ (Taf. XXII.) und ziehe $\pi'\ \varphi'$, so hat man die eine Asymptote übergetragen, und auf gleiche Weise bestimme man die Stellung $\zeta'\ \vartheta'$ der Zweyten. Diese so gefundenen Geraden $\pi'\ \varphi'$, $\zeta'\ \vartheta'$ sind beyde wiederum Asymptoten zu der Kurve $b\ m\ c$, und die Eine ist noch Asymptote zu dem Kurvenstück $g\ p\ d$, und die Andere zu dem Kurvenstück $g'\ p'\ d'$.

238. Um die beyden vorliegenden Figuren (Taf. XXII. XXIII.) möglichst deutlich zu machen, haben wir die Kegelfläche (Taf. XXII.) begränzt angenommen: einmal durch die horizontale Projektionsebene, und zweytens, durch die horizontale Ebene $s\ u$, deren Abstand vom Mittelpunkt (A, a) gleich A a ist, so, daß der Schnitt der Kegelfläche und dieser Ebene ein Kreis ist, vom Halbmesser $a''\ u = a\ q$, und dessen Horizontalprojektion mit dem Kreise B C D zusammenfällt. Es ist einleuchtend, daß die Aufwicklung dieses Schnittes $s\ u$ mit der Aufwicklung der Basis B C D in einen einzigen Umkreis zusammenfalle.

Wir haben ebenfalls die Aufwicklung $q\ r\ q'$ (Taf XXIII.) des Kreises B C D Q als an den Punkten q, q' begränzt angenommen, so daß der Bogen $q\ r\ q'$ einem Umlaufe des Kreises B C D Q entspricht. Diese Gränze ist jedoch offenbar ganz willkühr-lich und nur die erfoderliche Einfachheit der Zeichnung hat dazu bestimmt. Durch fortgesetzte Uebertragung der Punkte des Kreises B C D Q würde man auch immer wieder einen neuen Zweig der Aufwicklung des Schnittes (B M C.. P G P', F m, $g\ d$) erhalten haben, welcher dem schon gefundenen ganz gleich wäre, so daß die vollständige

Aufwicklung dieses Schnittes aus einer unendlichen Anzahl abgesonderter Zweige bestünde. Nur wenn der Bogen $q\ r\ q'$ (Taf. XXIII.) ein aliquoter Theil des ganzen Umkreises wäre, würde die Aufwicklung des vorliegenden Schnittes aus einer endlichen Anzahl abgesonderter Zweige zusammengesetzt seyn.

239. Die bisher angeführten Konstruktionen zu Bestimmung des verlangten Schnittes, der Tangenten und Asymptoten zu diesem Schnitte, und der Zurücklegung desselben würde bey jeder beliebigen Kegelfläche ihre Anwendung finden.

In Bezug auf den vorliegenden Fall haben diese Konstruktionen übrigens das Nachtheilige, daß die Kanten der gegebenen Kegelfläche die durchschneidende Ebene unter sehr spitzen Winkeln treffen, und daß daher sehr leicht eine Irrung in der Bestimmung der zu suchenden Punkte möglich ist. Diese Unrichtigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man den gegebenen Kegel als durch einen Kreis erzeugt annimmt, und nach dieser Hypothese arbeitet.

Eine horizontale Ebene wie $l'\ \lambda'$ (Taf. XXII.) schneidet den Kegel nach einer kreisförmigen Erzeugungslinie (IItes Buch. Note I.), der Durchmesser dieses Kreises ist gleich $l'\ \lambda'$, und seine Horizontalprojektion ist der Kreis P Λ P′ von demselben Durchmesser. Nun aber schneidet die Ebene dieses Kreises die durchschneidende Ebene (E F, F d) nach einer Geraden (P p', p), welche den Kreis selbst in zwey Punkten (P, p), (P′, p) trifft, die deßhalb dem Durchschnitte des Kegels und der Ebene (E F, F d) angehören. Der Umkreis P Λ P′ entspricht als Horizontalprojektion zweyen kreisförmigen Schnitten des Kegels, deren Ebenen $l\ \lambda$, $l'\ \lambda'$ gleichweit vom Punkte (A, a) entfernt sind. Mittelst des zweyten Kreises findet man die Punkte (I, i), (I′, i) des unteren Zweiges der zu suchenden Durchschnittslinie.

Es ist hier noch zu bemerken, daß die beyden Kreise (P Λ P′, $l\ \lambda$), (P Λ P′, $l'\ \lambda'$) sich durch die Aufwicklung der Kegelfläche in zwey Kreise verwandeln, deren Durchmesser gleich $a\ l$ oder gleich $a\ l'$ sind, und deren Umfänge folglich in Eins zusammen fallen. Will man zum Beyspiel die Punkte (P, p), (P′, p) mittelst dieser Umkreise auf die Aufwicklung (Taf. XXIII.) übertragen, so hat man nur mit einem Halbmesser gleich $a\ l$ (Taf. XXII.) den Kreisbogen $l\ p\ p'$ (Taf. XXIII.) aus dem Mittelpunkte a zu ziehen, und auf demselben den Bogen Λ P (Taf. XXII.) von l nach p, und den Bogen Λ P′ (Taf XXII.) von l (Taf. XXIII.) nach p' zu tragen, und die Punkte p, p' sind bestimmt. Es ist leicht einzusehen, daß auf dem nemlichen Umkreise $l\ p\ p'\ t\ t'$ auch die Punkte i, i' des Zweiges $b\ m\ c$ liegen müssen, die den Punkten (I, i) (I′, i) (Taf. XXII.) entsprechen.

Die Aufwicklung einer andern als geraden kreisförmigen Kegelfläche erfodert noch einige weitere Operationen, die wir im nächsten Kapitel (Art. 312.) vortragen werden.

Dritte Aufgabe.

Es ist eine Umdrehungsfläche und eine Ebene gegeben; man soll ihren wechselseitigen Durchschnitt konstruiren?

240. Auflösung. Die allen Umdrehungsflächen gemeinschaftliche Erzeugungslinie, und zugleich die einfachste aller krummen Linien, ist die Kreislinie. Bey ihrer Bewegung ist die Ebene dieser Linie immer senkrecht auf die Axe der Fläche.

Um daher die vorliegende Aufgabe mittelst der leichtesten Konstruktionen zu lösen, werden wir annehmen, die horizontale Projektionsebene sey so gewählt, daß sie senkrecht auf die Axe der Fläche ist, und die vertikale Projektionsebene sey senkrecht auf die durchschneidende Ebene. Dadurch werden sich die Parallelkreise der Fläche wiederum als Kreise von den nemlichen Durchmessern projektiren, und man erhält die Punkte des zu suchenden Durchschnittes, indem man die Begegnungspunkte der verschiedenen Parallelkreise und durchschneidenden Ebene bestimmt.

Erstes Beyspiel. (Taf. XXIV.)

241. Es sey (A, $a\,a'$) die vertikale Axe, und $a\,h\,a'\,f$ der Erzeugungsmeridian der Umdrehungsfläche, dessen Ebene P′ F parallel zur vertikalen Projektionsebene ist; (D E, E g) sey die durchschneidende Ebene (D E ist senkrecht auf die Projektionsaxe).

Auf der vertikalen Projektionsebene ziehe man eine beliebige Anzahl von Geraden senkrecht auf die Projektion $a\,a'$; und indem man diese Geraden, als die unbestimmten Projektionen von horizontalen Ebenen betrachtet, verfahre man bey allen, wie wir es bey der Ebene $n\,n'$ angeben wollen. Diese Ebene schneidet die Umdrehungsfläche nach einem Kreise vom Durchmesser $n\,n'$, als dessen Horizontalprojektion man den Kreis N R O N′ findet. Die nemliche Ebene $n\,n'$ schneidet aber auch die Ebene (D E, E g) nach einer Geraden (R R″, r); und da nun diese beyden Schnitte sich selbst in zwey Punkten begegnen, deren Horizontalprojektionen R und R′ sind, so gehören diese dem zu konstruirenden Durchschnitte an. Man wiederhole dieses Verfahren, bey so vielen Ebenen $n\,n'$ als man Punkte nöthig hat, um die Horizontalprojetion R′ X V Y jenes Durchschnittes zeichnen zu können.

Die Ebenen der horizontalen Schnitte, mittelst welcher sich auf diese Weise Punkte

R, R′... ꝛc. bestimmen lassen, sind zwischen den zwey Horizontalebenen $x\,x'$, $y\,y'$ eingeschlossen.

242. Betrachtet man auf einer Umdrehungsfläche das zweyte System von Erzeugungslinien, nemlich ihre Meridiane, so kann man auch die Punkte des verlangten Durchschnittes konstruiren, indem man die Begegnungspunkte der durchschneidenden Ebene und der verschiedenen Meridiane bestimmt.

Um diese zweyte Konstruktionsart anzuwenden, suchen wir die Begegnungspunkte des in der Ebene A P enthaltenen Meridians mit der Ebene (D E, E g). Zu diesem Zwecke denken wir uns die Ebene A P, in die zur vertikalen Projektionsebene parallele Stellung A H zurückgelegt, mittelst einer Drehung um die Axe (A, $a\,a'$). In Folge dieser Bewegung wird die gerade Durchschnittslinie der Meridianebene A P und der Ebene (D E, E g) die Stellung (A P′, $k\,p$) annehmen, welche man bestimmt, indem man (A P′, $c\,p$) gleich A P macht, und den Punkt (P′, p) mit dem Begegnungspunkt (A, k) der Axe (A, $a\,a'$) und der Ebene (D E, E g) verbindet. Die so gefundene Gerade $p\,k$ begegnet der Projektion $a\,h\,a'\,f$ in zwey Punkten n, s. Die Abstände $n\,u$, $s\,t$ dieser Punkte von der Geraden $a\,a'$ trage man auf der A P von A nach R und S; und man hat in R, S zwey Punkte der Projektion R X V Y.

Der aus A als Mittelpunkt, und mit dem Halbmesser A P beschriebene Kreisbogen trifft den Riß D E der durchschneidenden Ebene in den Punkten P und Q. Zieht man A Q und betrachtet diese Gerade als die Projektion einer neuen Meridianebene, so erhält man zwey neue Punkte der Krummen R′ V X Y, indem man die nemlichen Abstände $n\,u$, $s\,t$ auf der Geraden A Q von A nach R′ und S′ trägt.

243. Man konstruirt die Tangente an einem Punkt (R, r) des Schnittes der Umdrehungsfläche und der Ebene (D E, E g), indem man gleich der bisher befolgten Methode den Punkt (K, k) bestimmt, in welchem sich die Risse der tangirenden Ebene zu der Umdrehungsfläche am Punkte (R, r), und der Ebene (D E, E g) kreuzen; und indem man diesen Punkt mit dem gegebenen Berührungspunkt verbindet.

Der Riß der fraglichen tangirenden Ebene wird gefunden, wenn man durch den Punkt (N, n), welcher den auf die Meridianebene H A F zurückgelegten Berührungspunkt (R, r) vorstellt, die Tangente (N J, $n\,i$) zu dem Meridiane zieht; sodann den Abstand $i\,c$ des Punkts, in welchem diese Tangente die Horizontalebene trifft von der Axe (A, $a\,a'$), auf der Geraden A R von A nach J trägt; und durch J die Senkrechte J K auf A R errichtet (Art. 89.). Diese Senkrechte trifft die Gerade D E in dem gesuchten Punkt K.

244. Die Durchschnittslinie der Umdrehungsfläche und der gegebenen Ebene durchschneidet auf der Fläche den größten Parallelkreis in den zwey Punkten (V, v), (V′, v). Es folgt hieraus, daß die Horizontalprojektion R′ X V Y der Durchschnittslinie, und die Horizontalprojektion H V F V′ des genannten Parallelkreises, welche die Begränzungslinie dieser Projektion der Fläche ist, sich selbst in den Punkten V, V′ wechselseitig berühren (Art. 128.).

Die in der Meridianebene H A F gelegenen Punkte (X, x), (Y, y) der Durchschnittslinie sind diejenigen, deren Höhen über der Horizontalebene ein Größtes und ein Kleinstes sind. Daher sind die Tangenten an diesen Punkten horizontal; in der Horizontalprojektion sind sie senkrecht auf die Projektionsaxe, und fallen mit den projektirenden Geraden der Punkte X, Y zusammen.

245. Man erhält die Durchschnittslnie der Umdrehungsfläche und der gegebenen Ebene in ihrer wirklichen Gestalt $\omega\, \varrho\, \chi\, \varrho'$, indem man jeden ihrer Punkte sich um den Riß E g drehen läßt, um sich auf die vertikale Projektionsebene aufzulegen. Jeder Punkt beschreibt bey dieser Bewegung einen Kreis, dessen Ebene, Mittelpunkt und Halbmesser bekannt sind, und woraus sich seine neue Stellung ergiebt.

Der gerade Durchschnitt (H F, E g) der Meridianebene H A F und der Ebene (D E, E g), auf die vertikale Projektionsebene nach $\chi\, \omega$ übergetragen, theilt die Linie $\varrho\, \chi\, \varrho'\, \omega$ in zwey symetrische Theile. Wenn man E $\varkappa$ senkrecht auf E g zieht und auf ihr die Weite E K von E nach $\varkappa$ trägt, sodann die Gerade $\varkappa\, \varrho$ zieht, so ist diese Tangente zu der Krummen $\chi\, \varrho\, \omega\, \varrho'$ an dem Punkt ϱ.

Zweytes Beyspiel. (Taf. XXV.)

246. Es sey (A, $a\, a'$) eine vertikale Axe, um welche sich eine Gerade (B C, $b\, c$) dreht, um eine Umdrehungsfläche zu erzeugen. Da diese Gerade mit der Axe nicht in einer Ebene ist, so wird durch ihre Bewegung ein Umdrehungs-Hyperboloid von einem Netze entstehen. (Art. 120.) Es sey (F G, G g) eine auf die vertikale Projektionsebene senkrechte Ebene, deren Durchschnitt mit dem Umdrehungs-Hyperboloid verlangt wird.

Man führe senkrecht auf die Axe eine beliebige Zahl von Ebenen. Irgend eine derselben wie $p\, i$ schneidet die Umdrehungsfläche nach einem Kreise (I J P, $p\, i$), dessen Mittelpunkt und Halbmesser durch die beyden Punkte (A, p'), (P, p) bestimmt sind, in denen die Ebene $p\, i$ die Axe (A, $a\, a'$) und die gerade Erzeugungslinie (B C, $b\, c$) durchschneidet. Dieser Kreis (I P J, $p\, i$) trifft nun die Ebene (F G, G g) in zwey Punkte (I, i), (J, i), welche auf der geraden Durchschnittslinie (I J, i) dieser letzten

Ebene und der Ebene $p\,i$ liegen. Diese Punkte gehören dem verlangten Durchschnitte an, dessen Horizontalprojektion I P K I′ man beschreiben kann, sobald man durch dieses wiederholte Verfahren die erfoderliche Anzahl von Punkten bestimmt hat.

Auf andere Weise betrachtet, kann man die Punkte dieser Projektion erhalten, indem man eine hinlängliche Anzahl Stellungen der geraden Erzeugungslinie (B C, $b\,c$) konstruirt, und die Punkte wie (H, h) bestimmt, in denen jegliche die durchschneidende Ebene trifft. Was die Konstruktion der Tangente an irgend einem Punkt (I, i) der gefundenen Durchschnittslinie, und die Zurücklegung $i'\,j'\,o'\,n'$ auf eine der Projektionsebenen anbelangt, so geschieht dieses ganz wie in dem vorigen Beyspiele.

247. Wenn man die Punkte der in Rede stehenden Durchschnittslinie verlangte, die in irgend einer Meridianebene, wie A G′ enthalten sind; so lassen sich diese Punkte auf folgende Art unmittelbar bestimmen.

Die Meridianebene A G′ wird von der gegebenen Ebene (F G, G g) nach einer Geraden geschnitten, welche in dem Punkt (A, α) die Umdrehungsaxe trifft. Betrachtet man diese Gerade als Erzeugungslinie eines geraden Kegels, welcher den Punkt (A, α) als Scheitel hat, und als Basis auf der Horizontalebene den Kreis vom Halbmesser A G′, dessen Endpunkt G′ durch das Zusammentreffen der Risse F G und O A N bestimmt ist, so werden dieser Kegel und das Hyperboloid, da sie die nemliche Axe haben, sich nach zwey Kreisen schneiden, und auf diesen Kreisem müssen die gesuchten Punkte liegen.

Um sofort die Stellung der genannten zwey Kreise zu finden, bestimme man die Durchschnittspunkte des Kegels und der geraden Erzeugungslinie des Hyperboloids in irgend einer ihrer Stellungen wie (B C, $b\,c$). Die Abstände dieser Punkte von der gemeinschaftlichen Axe sind gleich den Halbmessern jener Kreise.

Man findet die Durchschnittspunkte eines Kegels, und einer Geraden, wenn man durch den Mittelpunkt des Kegels und durch die Gerade eine Ebene führt, und die Kanten bestimmt, nach welchen diese Ebene den Kegel schneidet. Diese Kanten und die gegebene Gerade, da sie in einer nemlichen Ebene enthalten sind, werden sich selbst schneiden, und ihre Begegnungspunkte sind die gesuchten Durchschnitte des Kegels und der Geraden.

Man führe demzufolge durch den Mittelpunkt des Kegels eine Parallele (A E, α E′) zu der Erzeugunslinie (C B, $c\,b$). Die durch diese letzte Gerade, und durch ihre Parallele gehende Ebene schneidet die horizontale Projektionsebene nach einer Geraden, welche durch die Punkte C und E geht, und welche die kreisförmige Grundlinie des geraden Kegels in den Punkten S und T trifft. Die Kanten des Kegels, welche durch diese

Punkte gehen, begegnen der Erzeugungslinie ($C B$, $c b$) in zwey Punkten, von denen Q und R die Horizontalprojektionen sind. Die Parallelkreise der Umdrehungsfläche, die diesen nemlichen Punkten entsprechen, begegnen der Geraden ($G' A$, $G \alpha$) der durchschneidenden Ebene in den verlangten Punkten, die sich in N und O auf die Horizontalebene projektiren.

Vierte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer gegebenen windischen Fläche und einer Ebene konstruiren?

248. Auflösung. Erstes Beyspiel. Die windische Fläche, welche wir (Art. 104.) gerades Konoid genannt haben, wird durch eine bewegliche Gerade erzeugt, die sich auf zwey Leitlinien stützt, wovon Eine eine gegebene Kurve, und die Andere eine Gerade ist, und welche während ihrer Bewegung stets parallel zu einer auf der geraden Leitlinie senkrechten Ebene bleibt.

Es seyen die Vertikale (A, $A' a$) (Taf. XXVI.), und die in der Vertikalebene L M gegebene Kreislinie $B a C$ die Leitlinien einer beweglichen, beständig horizontalen Geraden, der Erzeugungslinie des geraden Konoids. Der Mittelpunkt A' der kreisförmigen Leitlinie ist auf der Projektionsaxe angenommen; die zwey Horizontalen A B, A C sind folglich die Risse des Konoids auf der horizontalen Projektionsebene, und die Horizontalprojektionen aller übrigen Erzeugungslinien der Fläche gehen durch den Punkt A.

Dieses festgesetzt, so sey $L' M'$ die unbestimmte Horizontalprojektion einer zur vertikalen Projektionsebene parallelen Ebene, man verlangt die Projektionen des Durchschnittes dieser Ebene und des Konoids; und die Tangente an einem Punkt der Durchschnittslinie, dessen Horizontalprojektion C sey?

249. Die gerade Erzeugungslinie des Konoids, welche durch den gegebenen Punkt geht, hat als Projektion auf der Horizontalebene die Gerade A P K; sie trifft die kreisförmige Leitlinie der Fläche in einem Punkt k; und sie hat folglich zur Vertikalprojektion die, durch k gezogene Horizontale $k k'$. Die aus P auf die Projektionsaxe errichtete Senkrechte $P p$ trifft die Horizontale $k k'$ in einem Punkt p, welcher der Vertikalprojektion des Durchschnittes des Konoids und der Ebene $L' M'$ angehört.

Auf dieselbe Weise konstruirt man jeden andern Punkt der Krummen $D' \pi' p E'$, der Vertikalprojektion jener gesuchten Durchschnittslinie.

250. Die Tangente an dem Punkt (P, p) dieser Durchschnittslinie entspringt, wie bekannt, aus dem Durchschnitt der tangirenden Ebene an demselben Punkt des

Konoids und der durchschneidenden Ebene. Um die tangirende Ebene zu erhalten, werden wir, nach der wie Art. 154. vorgetragenen allgemeinen Methode, ein hyperbolisches Paraboloid konstruiren, welches die vorliegende Fläche nach der durch den Berührungspunkt (P, p) gehenden Erzeugungslinie (A P K, $k\,k'$) tangirt, und welches an allen Punkten derselben Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit dem Konoid hat. Nun aber sind zwey gerade Leitlinien hinreichend, um jenes Paraboloid zu bestimmen, weil die gerade Erzeugungslinie desselben gleich jener des Konoids beständig horizontal bleiben muß. Als eine dieser Leitlinien kann man die Tangente $k\,h$ zu dem Kreise (B C, B a C) nehmen, die durch den Punkt k gezogen ist, wo die Gerade (A P K, $k\,k'$) diesen Kreis trifft. Außerdem ist die Gerade (A, A′ a) sowohl eine Linie des Konoids als auch ihre eigene Tangente, sie kann daher als die zweyte gerade Leitlinie des tangirenden Paraboloids betrachtet werden.

Diese beyden Leitlinien sind parallel zu der Vertikalebene L′ M′, die erste derselben, nemlich die Tangente $k\,h$ des Kreises B a C trifft die Horizontalebene in dem Punkt h, und folglich ist die Gerade A h der Riß des Paraboloids auf derselben Projektionsebene. Die gegebene Vertikalebene L′ M′ schneidet den Riß A h in dem Punkt G, dessen Projektion auf der Vertikalebene G′ ist; dieses bestimmt die zweyte, durch den Berührungspunkt (P, p) gehende gerade Erzeugungslinie (P G, p G′) des Paraboloids, und die Parallele N G O zu der Geraden A K als den Horizontalriß der tangirenden Ebene an dem genannten Punkt desselben Paraboloids. Diese tangirende Ebene wird durch die Ebene L′ M′ der Kurve D′ a E′ nach der Geraden (G M, G′ p) geschnitten, daher ist die Vertikalprojektion G′ p dieser Geraden Tangente zu der Krummen D′ a E′.

Auf dieselbe Art würde man die Tangente π' F′ an dem auf der Horizontalen $k\,k'$ gelegenen Punkt π' dieser Krummen bestimmen.

251. Man hätte als Leitlinien des, das Konoid nach der Geraden (A P K, $k\,k'$) berührenden Paraboloids auf die zwey Horizontalen (A h, h' h), (A A′, i) nehmen können. Die durchschneidende vertikale Ebene L′ M′ trifft die zweyte Leitlinie (A A′, i) in dem Punkt (I, i); die Gerade (G P I, G′ p i) die dem Paraboloid angehört, und welche die tangirende Ebene dieser Fläche an dem Punkt (P, p) bestimmt, geht daher durch den Punkt (I, i) und folglich muß auch die Tangente G′ p am Punkt p der Kurve D′ a E′ durch den Punkt i der Vertikalen A′ i gehen.

Zweytes Beyspiel.

252. Es seyen L M, L′ M′ Taf. XXVI. (Fig. 2.) die parallelen Risse zweyer Vertikalebenen; sie enthalten zwey Kreise von den Durchmessern A B, C D, deren Mit-

telpunkte α, β in einer Geraden α, β liegen, die schief auf die Risse L M, L′ M′ ist. Die Durchmesser A B, C D bilden mit den Geraden A C, B D ein Parallelogramm, das durch die zu A B parallele Gerade E F in zwey gleiche Theile getheilt ist. Durch die Mitte G′ dieser Geraden E F errichte man eine Senkrechte I G′ H N auf die Ebenen der zwey Kreise. Diese Senkrechte und die beyden Kreise seyen die Leitlinien einer windischen Fläche.

253. Eine zur vertikalen Projektionsebene parallele Ebene $l\ m$ schneidet die Fläche nach einer krummen Linie, die sich parallel zu ihr selbst nach $\gamma' p\ \omega\ \delta'$ projektirt.

Um diese Krumme zu konstruiren, führe man durch die horizontale Leitlinie I G′ H irgend eine Ebene. Diese wird die Vertikalebene L M nach einer Geraden H $k\ r$ schneiden, welche dem ersten Kreis, vom Durchmesser C D in einem Punkt (K, k) begegnet, und dem zweyten Kreis in einem Punkt (R, r). Diese beyden Punkte bestimmen die Stellung einer Erzeugungslinie (R K N, H K r) der Fläche. Die durchschneidende Ebene $l\ m$ trifft diese Gerade in einem Punkte (P, p), dessen Vertikalprojektion p der Krummen $\gamma' p\ \omega\ \delta'$ angehört. Man bestimmt auf diese Art so viele Punkte p diese Krummen als man verlangt, wobey noch folgendes zu bemerken ist: 1tens da auf der Vertikalebene die Projektionen der zwey kreisförmigen Leitlinien der Fläche sich in einen Punkt ω begegnen, welcher in der Verlängerung der Geraden I G′ H liegt, so müssen die Vertikalprojektionen aller Schnitte der windischen Fläche durch Ebenen, die zu den zwey Kreisen parallel sind, gleich der Kurve $\gamma'\ \omega\ \delta'$ durch den Punkt ω gehen: 2tens daß die horizontalen Erzeugungslinien A C, B D der Fläche durch die Vertikalebene $l\ m$ in den Punkten γ, δ geschnitten werden, deren Vertikalprojektionen $\gamma'\ \delta'$ sind.

254. Es sey (P, p) ein Punkt der Durchschnittslinie der windischen Fläche und der Ebene $l\ m$, und wir nehmen an, man verlange die Tangente an diesem Punkt des Durchschnittes.

Um die tangirende Ebene an demselben Punkt der Fläche zu erhalten, welche die verlangte Tangente enthält, konstruiren wir zuerst die Leitlinien eines Paraboloids, welches die vorliegende Fläche nach der bekannten durch (P, p) gehenden Geraden (R K N, H $k\ r$) berührt. Die zwey ersten Leitlinien, welche in den Ebenen der Kreise enthalten sind, sind die Geraden (L M, $k\ s$) und (L′ M′, $r\ t$); die dritte gerade Leitlinie des Paraboloids, die in einer zu den Ebenen der Kreise parallelen Ebene L″ M″ enthalten ist, geht durch den Punkt N dieser Ebene, in welchem die Erzeugungslinie der Fläche die horizontale gerade Leitlinie I K N derselben schneidet. Da die gesuchte dritte Leitlinie in der tangirenden Ebene zu der windischen Fläche an dem Punkt N enthalten seyn muß, deren Risse auf beyden Projektionsebenen die Geraden N H l, H k r sind, so hat sie zu Projektionen die Geraden H k r und N L″ M″.

Da man nun die drey Leitlinien (L M, k s V), (L′ M′, r t U′), (L″ M″, H k r) kennt, so ist auch die Stellung einer Geraden, welche sich auf diese drey Leitlinien anlehnt, bestimmt, sobald man einen Punkt dieser Geraden auf der ersten Leitlinie giebt, zum Beyspiel den Punkt V, wo die Tangente k s die Horizontalebene trifft. Die Ebene, die durch diesen Punkt V, und durch die Leitlinie (L′ M′, r t) geführt ist, hat als Riß auf der Horizontalebene die Gerade U V O, welche die Gerade L″ M″ in dem Punkt O schneidet; diese Ebene schneidet folglich die Vertikalebene L″ M″ nach einer, durch diesen Punkt O gehenden Parallelen zu der Geraden (L′ M′, r t) Die Projektion dieser Geraden auf der Vertikalebene ist daher eine Parallele O′ x zu der Tangente r t U′ des Kreises A′ r B′, und geht durch den Punkt O′, der Projektion des Punkts O auf der Ebene L M. Diese Parallele O′ x schneidet aber die Projektion H k r der dritten Leitlinie (L″ M″, H k r) im Punkt x; daher schneidet die Ebene, deren Horizontalriß U V O ist, diese dritte Leitlinie in dem Punkt (X, x). Es ergiebt sich aus diesen Konstruktionen, daß die gerade Erzeugungslinie des Paraboloids, welche durch den Punkt V der ersten Leitlinie (L M, V k s) dieses Paraboloids und durch die zweyte Leitlinie (L′ M′, U′ r t) geht, als Horizontalprojektion die Gerade V X hat, und als Vertikalprojektion die Gerade V x; diese beyden Projektionen gehen von einem nemlichen Punkt V der Projektionsaxe L M aus. Diese gerade Erzeugungslinie (V X, V x) des tangirenden Paraboloids begegnet der zweyten Leitlinie (L′ M′, U′ r t) im Punkt (Q, q), welcher durch das Zusammentreffen, der im Punkt q sich kreuzenden bekannten Geraden U′ r t, V x bestimmt wird. Die Senkrechte q Q auf L M trifft die Gerade L′ M′ in dem Punkt Q, der in der Verlängerung der Geraden V X liegt.

255. Die Vertikalebene l m P, welche durch den Berührungspunkt (P, p) parallel zu den Ebenen L′ M′ der beyden Kreise geführt ist, schneidet das, die windische Fläche berührende Paraboloid ebenfalls nach einer geraden Erzeugungslinie (P G, p g); diese Gerade und die gerade Berührungslinie (R P K, r p k) bestimmen die tangirende Ebene am Punkt (P, p) des Paraboloids, und diese Ebene berührt zugleich die windische Fläche an demselben Punkt. Die Vertikalebene l m schneidet die windische Fläche nach einer Kurve, deren Vertikalprojektion γ' p ω δ' ist; der Durchschnitt derselben Ebene und der tangirenden Ebene am Punkt (P, p) ist die Gerade (G P, g p) und folglich ist die Vertikalprojektion g p derselben Tangente zu der Krummen γ' p ω δ' an dem Punkt p eben dieser Krummen.

Drittes Beyspiel. (Fig. 3. Taf. XXVI.)

256. Nachdem man senkrecht auf eine horizontale Gerade I H zwey Vertikalebenen geführt hat, deren Risse auf der horizontalen Projektionsebene die Senkrechten L M, L′ M′ auf die I H sind; denke man sich in der ersten Ebene einen Kreis, dessen Mittelpunkt in H ist, und welcher als Durchmesser die Gerade C D hat; in der zweyten Ebene sey ein anderer Kreis beschrieben, welcher als Sehne die Gerade A B hat, dessen Mittelpunkt in der Vertikalen (I, H φ) liegt, und welcher sich auf die Vertikalebene L M nach A′ φ B′ projektirt: die beyden Kreise und die Horizontale I H seyen die Leitlinien einer windischen Fläche.

257. Irgend eine durch die Horizontale H I geführte Ebene (I H, H k) schneidet die Kreise in zwey Punkten (K, k), (R, r); die in dieser Ebene enthaltene gerade Erzeugungslinie der Fläche hat zu Horizontal- und Vertikalprojektionen die Geraden $r\ k$, R K. Die verlängerte Horizontalprojektion R K begegnet der Horizontalen I H N in einem Punkt N, welcher der Erzeugungslinie (R K, $r\ k$) der Fläche angehört; jede andere Erzeugungslinie der Fläche trifft die Leitlinie I H in einem Punkt, den man auf dieselbe Weise bestimmt; die Vertikalprojektionen aller dieser Geraden laufen nach dem Punkt H zusammen.

258. Eine Vertikalebene $l\ m$ schneidet die Gerade (R K, $r\ k$) in einen Punkt (P, p), welcher sich auf die Vertikalebene nach p projektirt; der Punkt (P, p) gehört der Durchschnittslinie der Fläche durch die Ebene $l\ m$ an. Die Erzeugungslinien A C, B D der Fläche, welche auf der Horizontalebene gegeben sind, und nach einem Punkt der Horizontalen I H zusammenlaufen, bilden mit dem Durchmesser C D des kleinen Kreises und mit der Sehne A B des Größeren, das Trapez A B C D. Die Vertikalebene $l\ m$ schneidet die Geraden A C, B D in den Punkten γ, δ, deren Vertikalprojektionen γ', δ' der Krummen $\gamma'\ p\ \psi\ \delta'$ angehören. Um den Punkt ψ dieser Krummen zu konstruiren, welcher auf der Verlängerung der Geraden I H liegt, trage man die Höhe H φ des Bogens A′ φ B′ auf der Geraden L′ M′ von I nach φ'; man verbinde φ' und den Endpunkt D des Halbmessers H D durch die D φ'; diese Gerade D φ' schneidet die Gerade $l\ m$ in π, der Abstand $\pi\ \pi'$ dieses Punkts von der Horizontalen I H ist gleich der Länge H ψ. Diese Konstruktionen werden deutlich werden, wenn man sich durch die Gerade I H eine Vertikalebene geführt denkt, welche die beyden Vertikalebenen der Kreise nach den Parallelen H D, I φ' schneidet, und die Fläche nach der Geraden D φ'. Es ist einleuchtend, daß die Vertikale $\pi\ \pi'$ sich auf die Vertikalebene nach der Geraden H ψ projektire, und daß H $\psi = \pi\ \pi'$.

259. Man bestimmt die Tangente (G P, g p) in irgend einem Punkt (P, p) der Durchschnittslinie (l m, γ' p ψ δ') durch dasselbe Verfahren, was für die vorstehende Figur angegeben wurde. Die auf diese Operation sich beziehenden Konstruktionen sind auf den Figuren 2 und 3 der Taf. XXVI. mit den gleichen Buchstaben bezeichnet.

260. Die zwey windischen Flächen, welche in den Figuen 2 und 3 der Taf. XXVI. vorgestellt sind, werden in der Baukunst bisweilen zur Konstruktion von kleinen Gewölben angewendet. Ersteres gehört zu den schrägen Tonnengewölben, letzteres zu den sogenannten Kernbögen. (In der französischen Schule sind sie unter dem Namen des biais passé und der arrière - voussure de Marseille bekannt.)

In den drey Figuren dieser Tafel haben wir nur die Projektionen derjenigen Theile der gegebenen windischen Flächen konstruirt, die sich unmittelbar auf unsern Gegenstand bezogen, weil eine weitere Ausdehnung dieser Flächen die Zeichnungen zu sehr überladen haben würde. Eben so haben wir der größeren Einfachheit wegen, zur Bestimmung der Tangenten zu den Durchschnitten dieser Flächen, die tangirenden Ebenen zu denselben nur mittelst der berührenden hyperbolischen Paraboloide konstruirt. Bey der allgemeinern Auflösung dieser Aufgabe mittelst eines die windische Fläche berührenden Hyperboloids von einem Netze, würde man übrigens ganz auf ähnliche Weise arbeiten.

Von den ebenen Schnitten einiger Flächen der zweyten Ordnung.

261. Der Schnitt irgend einer krummen Fläche der zweyten Ordnung durch eine Ebene gehört zu dem Geschlechte der Linien der zweyten Ordnung. Dieses Geschlecht besteht aus den drey krummen Linien, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel und es begreift als besondere Abarten: den Kreis, das System zweyer sich schneidenden oder parallelen Geraden und den Punkt. Alle diese Linien haben so wie die krummen Flächen der zweyten Ordnung die Eigenthümlichkeit, von einer Geraden in nicht mehr als in zwey Punkten geschnitten werden zu können.

262. Es ist eine Folge dieser letzten Eigenthümlichkeit, daß jede Ebene, welche eine Fläche von der zweyten Ordnung nach einer Geraden schneidet, auch noch durch eine andere Gerade derselben Fläche gehen muß. Aus dieser Ursache können alle Flächen der zweyten Ordnung, welche die Gerade zur Erzeugungslinie haben, auf zwey verschiedene Weisen durch die Gerade erzeugt werden. Die Ebene, welche durch eine Gerade des ersten Erzeugungssystems geht, enthält nothwendig noch eine andere Gerade, die dem zweyten System angehört.

Unser Gegenstand in diesem Paragraphen ist hauptsächlich die geometrische Untersuchung der ebenen Schnitte derjenigen Flächen der zweyten Ordnung oder des zweyten Grads, welche durch die Gerade erzeugt werden können, und welche aus diesem Grunde am häufigsten in den technischen Künsten angewendet werden.

Von den Schnitten des elliptischen Kegels.

263. Der Kegel von kreisförmiger oder elliptischer Basis ist die einfachste Fläche der zweyten Ordnung, welche durch eine Ebene nach den drey krummen Linien, der Ellipse der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden kann, weßhalb man diesen Linien auch insbesondere den Namem der Kegelschnitte gegeben hat.

Wir haben in der Aufgabe II. Art 232. gezeigt, auf welche Weise die Projektionen des Durchschnittes einer Kegelfläche und einer Ebene zu konstruiren seyen. Die verschiedenen Arten der Durchschnittslinie hängen blos von der Stellung der durchschneidenden Ebene ab. Bey dem Kegel des zweyten Grads läßt die besondere Art dieser Linie sich bestimmen, ohne hiezu erst ihre Projektionen selbst konstruirt zu haben.

264. Wenn der elliptische Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, so sind entweder alle Kanten der Fläche von der durchschneidenden Ebene getroffen, oder es sind eine oder zwey Kanten des Kegels parallel zu dieser Ebene. Im ersten Fall ist der Durchschnitt offenbar eine geschlossene krumme Linie, eine Ellipse oder ein Kreis, im andern Fall, wenn gewisse Kanten des Kegels parallel zu der durchschneidenden Ebene sind, besteht die Durchschnittslinie aus einer oder aus zwey unendlichen Zweigen. Der Schnitt des Kegels von einem einzigen unendlichen Zweige, welcher nur auf einem Netze der Fläche liegt, ist eine Parabel; die Durchschnittslinie von zwey auf beyden Netzen gelegenen Zweigen ist eine Hyperbel.

265. Man erkennt, ob die Durchschnittslinie des Kegels und der Ebene sich ins Unendliche ausdehne, und auf welchen Kanten die Punkte im Unendlichen gelegen seyen, durch das in Art. 233. angewendete Verfahren, indem man durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene parallel zu der durchschneidenden führt. Entweder begegnet diese Ebene der elliptischen Grundlinie nicht, oder sie schneidet sie in zwey Punkten, oder sie ist endlich tangirend zu der Fläche. Im ersten Fall hat die Kegelfläche keine Kante, welche parallel zu der durchschneidenden Ebene wäre, und der Schnitt ist eine Ellipse. Trifft die parallele Ebene die Grundlinie in zwey Punkten, so sind die, durch diese Punkte gehenden Kanten des Kegels parallel zu der durchschneidenden Ebene. Die Durchschnittslinie dehnt sich alsdann in zwey Zweigen auf den beyden Netzen der Kegelfläche ins Unendliche aus; sie ist eine Hyperbel. Im dritten Fall, wenn die parallele Ebene die Kegelfläche nach einer Kante berührt, so hat die Durchschnittslinie, die sich nur auf einem Netz der Kegelfläche ausdehnt, auch nur einen Punkt im Unendlichen, welcher auf der, zu der durchschneidenden Ebene parallelen Berührungskante liegt, sie ist eine Parabel.

266. Wenn man die Kanten des Kegels kennt, welche parallel zu der durchschneidenden Ebene sind, so ist es leicht, die Tangenten zu konstruiren, welche den Kegelschnitt an den Punkten im Unendlichen berühren, und welche die Asymptoten desselben heißen. Denn diese Asymptoten sind die Durchschnitte der durchschneidenden Ebene mit derjenigen, welche die Kegelfläche nach den, zu der durchschneidenden Ebene parallelen Kanten tangiren. (Art. 234.) Wenn der Schnitt eine Hyperbel ist, so hat der Kegel zwey, zu der durchschneidenden Ebene parallele Kanten; einer jeden Kante entspricht eine tangirende Ebene, welche der Durchschneidenden nach einer Geraden begegnet; die Hyperbel hat daher zwey Asymptoten.

Der Durchschnittspunkt der zwey Asymptoten ist der Mittelpunkt der Hyperbel; es ist einleuchtend, daß dieser Mittelpunkt auch zugleich der Begegnungspunkt der durchschneidenden Ebene und der geraden Durchschnittslinie der zwey Ebenen sey, welche den Kegel nach den beyden Kanten berühren, die zu der durchschneidenden Ebene parallel sind. Die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr ihren beyden Asymptoten so wie die durchschneidende Ebene sich mehr dem Mittelpunkt der Fläche nähert, und wenn diese Ebene durch den Mittelpunkt geht, so wird jeder Zweig der Hyperbel eine gerade Linie, oder mit andern Worten, die Hyperbel fällt mit ihren Asymptoten zusammen.

267. Der Schnitt des Kegels ist eine Parabel, sobald die durchschneidende Ebene und die Ebene, welche den Kegel nach der Kante berührt, die durch den Punkt im Unendlichen geht, parallel sind. Diese beyden Ebenen haben alsdann keine Punkte gemein, außer im Unendlichen; es folgt daraus, daß die Parabel keine Asymptote habe, oder vielmehr daß diese Asymptote sammt dem Mittelpunkt der Linie ganz im Unendlichen liege.

268. Alles bisher Gesagte über die krummen Linien, die aus dem Durchschnitt des Kegels von kreisförmiger oder elliptischer Grundlinie und einer Ebene entstehen, gilt sowohl von dem schiefen Kegel wie von dem geraden. Nehmen wir an, der gerade Kegel sey durch eine Ebene geschnitten; wenn man durch die Axe des Kegels eine zweyte Ebene senkrecht auf die erste führt, so liegt die gerade Durchschnittslinie dieser zwey Ebenen in der Richtung einer der Geraden, welche man die Axen des Kegelschnittes nennt. (Art. 114.)

269. Es sey B C D Q (Taf XXII.) die horizontale Grundlinie eines geraden Kegels, welcher durch die Ebene R Q, die durch die Axe (A, $a\ a'$) geht, nach zwey Kanten geschnitten wird, die sich auf die, zur durchschneiden Ebene parallele Vertikalebene nach $r\ a\ u$, $q\ a\ s$ projektiren. Es seyen F d, $n\ x$, $\omega\ \psi$, die Risse auf der Vertikalebene von drey, auf der vertikalen Projektionsebene senkrechten Ebenen. Der elliptische Schnitt ist in einer Ebene, wie $n\ x$; die Parabel in einer Ebene $\omega\ \psi$, welche parallel ist zu der in $q\ a\ s$ projektirten tangirenden Ebene des Kegels. Die Hyperbel ist in einer Ebene F $a\ d$ enthalten, welche die zwey Flächennetze des geraden Kegels schneidet. (R Q, n x), (R Q, $\omega\ \psi$), (R Q, F d) sind in dieser Figur parallele Gerade zu den Axen der drey Kegelschnitte der Ellipse der Hyperbel und der Parabel.

270. Die Ellipse, sie mag aus dem Schnitte eines Kegels oder eines Cylinders von kreisförmiger Grundlinie entstehen, ist in beyden Fällen eine Linie von derselben Art; wovon man sich überzeugen kann, wenn man die Ellipse mit dem Kreise vergleicht, der als Durchmesser die große Axe der Ellipse hat. Stellt man diese Vergleichung auf, so haben wir schon die Gleichheit der Subtangente des Kreises und der Ellipse bewiesen, wenn die Ellipse als Axe einen Durchmesser des Kreises hat. (Art. 222.)

Von den Schnitten der Kugel.

271. Wenn zwey Kugeln sich durchschneiden, so ist der Umfang ihres Durchschnittes eine Kreislinie; denn alle Punkte der Durchschnittslinie sind gleich weit von dem Mittelpunkt der ersten Kugel und gleich weit von jenem der Zweyten entfernt; sie sind daher in einer Ebene die senkrecht

ist, auf die Gerade, welche die Mittelpunkte verbindet, und in gleichem Abstande von dem Punkt, in welchem diese Ebene diese Gerade der Mittelpunkte schneidet. Sie gehören daher einem Kreise an, dessen Mittelpunkt auf der Geraden ist, die die Mittelpunkte der zwey Kugeln verbindet, und welche als Halbmesser die Senkrechte hat, die aus einem beliebigen Punkt des Durchschnittskreises auf die durch die Mittelpunkte der Kugeln gehende Gerade gefällt ist.

272. Eine Kugel von einem unendlichen Halbmesser ist eine Ebene. Eine Kugel und eine Ebene schneiden sich daher immer nach einem Kreise. Man kann diesen Satz direkt beweisen, wenn man annimmt, es seyen durch den Mittelpunkt der Kugel, und durch die Gerade, welche aus diesem Mittelpunkt senkrecht auf die gegebene Ebene gefällt ist, eine Reihe von Ebenen geführt, welche die Kugel nach größten Kreisen, und die Ebene nach Geraden schneiden. Betrachtet man blos die Stücke dieser Geraden, welche den großen Kreisen als Sehnen dienen, so gehören die Endpunkte dieser Sehnen dem Durchschnitte der Kugel und der Ebene an: nun aber sind in allen durchschneidenden Ebenen, die Sehnen der großen Kreise der Kugel, welche in der gegebenen Ebene liegen, von gleicher Länge; daher sind diese Sehnen die Durchmesser des kleinen Durchschnittskreises der Kugel und der Ebene.

Wenn demnach eine Ebene eine Kugel schneidet, so ist der Schnitt ein Kreis, welcher als Mittelpunkt den Fuß der Senkrechten hat, die aus dem Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene gefällt ist. Umgekehrt, ist die Gerade, welche den Mittelpunkt einer Kugel und den Mittelpunkt eines kleinen Kreises dieser Kugel verbindet, senkrecht auf die Ebene des kleinen Kreises.

273. Wenn zwey Ebenen eine Kugel nach zwey kleinen Kreisen schneiden, so bestimmen die Mittelpunkte dieser Kreise und der Mittelpunkt der Kugel die Stellung einer dritten Ebene, welche senkrecht auf die beyden ersten ist. Dieser Satz ist eine Folgerung der Vorhergehenden, weil die Geraden, die durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Mittelpunkte der kleinen Kreise der Kugel gehen, senkrecht auf die Ebenen dieser kleinen Kreise sind.

274. *Durch zwey beliebige Kreise einer Kugel, kann man zwey schiefe Kegel führen.*

Man denke sich durch den Mittelpunkt O der Kugel und die Mittelpunkte E, F der zwey gegebenen Kreise, eine Ebene, welche die Kugel nach einem Kreise A B C D (Taf. XXIII. Fig. 2.) schneidet, und die Ebenen der gegebenen Kreise nach den Geraden A B, C D. Da die Sehnen A B, C D des großen Kreises A B C D die Durchmesser der gegebenen Kreise sind, so verbinde man die Endpunkte dieser Sehnen durch die Geraden A B, C D, welche sich in G begegnen, und durch zwey andere Geraden A D, B C, die sich im Punkt G' kreuzen. Die Punkte G, G' sind die Mittelpunkte zweyer schiefen Kegel, die durch die zwey Kreise geführt sind, welche als Halbmesser die Geraden A B, C D haben, und deren Ebenen senkrecht auf die Ebene der drey Mittelpunkte O, E, F sind. Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir die Eigenthümlichkeit des Kreises als bekannt an, daß, wenn eine Sehne und ein Durchmesser senkrecht unter sich sind, die Sehne den Durchmesser in zwey Theile theile, so daß die Hälfte der Sehne die mittlere Proportionale ist, zwischen den zwey Theilen des Durchmessers. Nachdem man die Gerade G I K gezogen, welche die Sehnen A B, C D in den Punkten K, I schneidet, und man betrachtet diese Gerade als die Projektion einer Kante des schiefen Kegels, dessen Scheitel oder Mittelpunkt in G ist, so muß bewiesen werden, daß diese Kante sich zu gleicher Zeit auf die beyden Kreise lehnt, welche als Durchmesser die Sehnen A B, C D haben.

Nehmen wir an, daß sie durch den Punkt des Kreises vom Durchmesser C D gehe, welcher sich in I auf die Ebene der drey Mittelpunkte O, E, F projektirt. Die halbe Sehne dieses Kreises, welche durch denselben Punkt senkrecht auf den Durchmesser C D geführt ist, ist die mittlere Proportionale zwischen den zwey Theilen C I, D I dieses Durchmessers. Zieht man durch den Punkt I die Gerade L I M parallel zu A B, so sind die zwey Dreyecke D I L, M I C ähnlich; denn die Winkel B A D und D C G oder D C M, von denen jeder als Maaß die halbe Summe der Bögen B C, C D hat, sind gleich; aber der Winkel B A D ist gleich dem Winkel M L D; daher haben die beyden Dreyecke D I L, M I C drey gleiche Winkel. Die Aehnlichkeit derselben giebt folgende Proportion

$$DI : IL :: IM : IC$$

woraus folgt daß

$$DI \times IC = IL \times IM.$$

Demnach ist die halbe Sehne am Punkt I nicht nur die mittlere Proportionale zwischen den Geraden D I und I C, sondern auch zwischen den Theilen I L, I M der Geraden L M; sie ist daher auch die Sehne des Kreises, welcher die Gerade L M als Durchmesser hat, und dessen Ebene senkrecht auf jene der drey Mittelpunkte O, E, F ist. Aber in einem Kegel sind alle parallelen Schnitte ähnlich (II. Buch. Note I.); daher schneidet die durch A B senkrecht auf die Ebene der drey Mittelpunkte geführte Ebene, die Kegelfläche, deren Mittelpunkt in G ist, nach einem Kreise vom Halbmesser A B. Auf dieselbe Art läßt sich beweisen, daß de Gerade, welche als Projektion auf der Ebene der drey Mittelpunkte die Gerade I′ G′ K′ hat, sich auf die zwey Kreise von den Durchmessern A B und C D stützt. Man kann daher durch je zwey, auf einer Kugel gegebene Kreise zwey schiefe Kegel führen; deren Scheitel in der Ebene liegen, die durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Mittelpunkte der gegebenen Kreise geht.

275. Umgekehrt, wenn ein Kreis der Kugel gegeben ist, und ein Punkt außerhalb dieser Kugel, so geht der schiefe Kegel, welcher als Basis den Kreis hat und als Scheitel den Punkt, noch durch einen zweyten Kreis der Kugel, dessen Ebene senkrecht auf diejenige ist, welche durch den Scheitel des Kegels, den Mittelpunkt der Kugel und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geführt wurde. Diese Ebene schneidet den Kegel nach zwey Kanten, und der Winkel den diese zwey Kanten einschließen, ist das was man den Haupt-Schnitt des schiefen Kegels nennt. Dieser Schnitt hat die Eigenthümlichkeit, daß eine der ihn bildenden Kanten mit den Ebenen der zwey kreisförmigen Schnitte des Kegels, Winkel macht, welche im Allgemeinen untereinander verschieden sind, aber in jedem Falle gleich den Winkeln der andern Kante des Hauptschnittes mit den nemlichen Ebenen sind. In der Figur 2. Taf. XXIII. macht die Kante A G mit den Ebenen der Kreise A B, C D gleiche Winkel, mit jenen, welche die Kante B G mit denselben Ebenen C D, A B bildet. Wenn demnach ein schiefer Kegel vom zweyten Grad gegeben ist, so ist aus dem

vorhergehenden ersichtlich, daß er durch einen Kreis auf zwey verschiedene Arten erzeugt werden kann; und daß es keinen Punkt desselben gebe, durch den man nicht zwey Kreise führen könne, welche in Ebenen gelegen sind, von verschiedener Richtung und senkrechter Stellung auf die Ebene des Hauptschnittes der Kegelfläche; was dem in Art. 125. II. Buch vorgetragenen Satze gemäß ist.

276. Sind die Ebenen der zwey Kreise einer Kugel parallel, so wird der durch diese zwey Kreise gehende Kegel, welcher vor den Parallelismus der Ebenen schief war, ein gerader Kegel. Wenn die zwey Kreise von gleichem Halbmesser sind und in parallelen Ebenen liegen, so gestaltet sich der gerade Kegel in einen geraden Cylinder um.

277. Wenn eine Kugel und ein schiefer Kegel von kreisförmiger Grundlinie sich durchdringen, so besteht die Durchschnittslinie aus zwey Kreisen, welche in verschiedenen Ebenen gelegen; wie wir so eben bewiesen haben. Es kann sich ereignen, daß der schiefe Kegel, welcher die Kugel schneidet, als Mittelpunkt, einen Punkt der Kugelfläche habe; alsdann wird der eine von den Durchschnittskreisen der zwey Flächen auf einen Punkt reduzirt, welcher der Mittelpunkt des Kegels ist.

Nehmen wir an, daß, während die Gerade A B, (Fig. 2. Taf. XXIII.) und der Punkt O unveränderlich bleiben, die Gerade C D stets kleiner werde, indem sie dabey parallel zu sich selbst bleibt, so wird sie endlich auf den Punkt H zurückkommen, welchen man als Scheitel der Kegelfläche nimmt, und welcher dem Umkreise A B C D angehört.

In Folge dieser Hypothese fallen aber die zwey Geraden O H, O F in einander, daher wird jede Ebene, welche senkrecht auf den durch den Scheitel des Kegels geführten Halbmesser der Kugel ist, diesen Kegel nach einem Kreise schneiden, was auch noch auf folgende Art erwiesen werden kann.

Es sey A C Q (Fig. 3. Taf. XXIII.) der Hauptschnitt des schiefen Kegels, welcher seinen Mittelpunkt in dem Punkt C der Kugelfläche hat, und als Grundlinie den kleinen Kreis vom Halbmesser A B. Die Ebene P Q, welche senkrecht auf den Halbmesser O C der Kugelfläche ist, schneidet den Kegel nach einem Kreise vom Halbmesser R S; denn die Winkel der Kanten A C, B C mit der Ebene A B sind offenbar gleich den Winkeln der nemlichen Kanten B C, A C mit der Ebene P Q oder R S. (Art. 275.) Daher sind A B und R S die Risse von Ebenen, welche senkrecht sind auf die Ebene des Hauptschnittes des Kegels, und welche diesen Kegel nach Kreisen schneiden.

278. Auf diese Eigenthümlichkeit des Kegels, welcher als Scheitel einen Punkt der Kugelfläche hat, und als Basis einen Kreis derselben Kugel, ist die Konstruktion der geographischen Karten mittelst der Methode der stereographischen Projektion gegründet. Nach dieser Methode sind die projektirenden Linien Gerade, welche nach einem Punkt der Kugelfläche zusammenlaufen, und die Projektionsebene ist senkrecht auf den Halbmesser der Kugel, welcher jenem Punkt entspricht. Die nach den Punkten eines Kreises der Kugel gerichteten projektirenden Linien gehören einem schiefen Kegel, welcher von der Projektionsebene nach einem Kreise geschnitten wird; aber dieser letzte Kreis ist die Projektion des ersten, daher werden alle Kreise der Kugel wiederum durch andere Kreise dargestellt. Die Erde, als eine Kugel betrachtet, ist in Meridiane und Parallelkreise eingetheilt, die sich auf den stereographischen Karten nach anderen Kreisen projektiren.

Von den ebenen Schnitten des Umdrehungs-Hyperboloids.

279. Alle ebenen Schnitte des Umdrehungshyperboloids sind krumme Linien vom zweyten Grad. Durch ein einfaches Verfahren läßt sich bestimmen, welche Stellung die durchschneidende Ebene, in Bezug auf die Fläche, haben müsse, damit der Schnitt eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel sey.

Denken wir uns durch einen beliebigen Punkt der Umdrehungsaxe eine Parallele zu der geraden Erzeugungslinie der Fläche geführt, und nehmen wir an, diese Parallele drehe sich zu gleicher Zeit mit der Erzeugungslinie um die Axe. Durch diese Bewegung wird die Erzeugungslinie das Hyperboloid hervorbringen, und ihre Parallele wird eine gerade Kegelfläche beschreiben: dergestalt, daß es auf dem Hyperboloid keine Gerade giebt, welche nicht ihre Parallele auf der Kegelfläche hätte, und eben so umgekehrt, keine Gerade der Kegelfläche, der nicht eine Parallele auf dem Hyperboloid entspräche.

Führt man nun durch den Scheitel des Kegels eine parallele Ebene zu der Durchschneidenden, so schneidet entweder diese Ebene den Kegel nach zwey Kanten, oder sie berührt ihn nach einer Kante, oder endlich sie hat gar keinen Punkt außer dem Scheitel mit dem Kegel gemein. Je nachdem einer dieser drey Fälle statt findet, ist der Schnitt des Umdrehungshyperboloids eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse. Dieses ist einleuchtend bey der Ellipse, denn da die durchschneidende Ebene in diesem Fall zu keiner der Geraden des Hyperboloids parallel ist, so ist die Durchschnittslinie, wie in dem Beyspiel der Taf. XXV. eine geschlossene Linie. Wenn die Ebene den Kegel nach zwey Kanten schneidet, so werden die Geraden des Hyperboloids, die zu diesen beyden Kanten, und folglich zur durchschneidenden Ebene parallel sind, nur im Unendlichen von der letzten Ebene getroffen werden können; die Tangenten an den auf diesen Erzeugungslinien gelegenen Punkten sind die Asymptoten des Schnittes.

Die tangirende Ebene an einem Punkt des Umdrehungshyperboloids ist durch die zwey Bedingungen bestimmt, durch eine Gerade der Fläche zu gehen, und senkrecht auf die Meridianebene des Berührungspunkts zu seyn. (Art. 136.) Liegt aber der Berührungspunkt im Unendlichen auf einer geraden Erzeugungslinie der Fläche, so ist die Meridianebene dieses Punkts nothwendig parallel zu jener Geraden.

Eine Ebene, welche durch die bekannte Gerade rechtwinklig auf die zu derselben parallelen Meridianebene geführt wurde, ist die tangirende Ebene an dem Punkt, welcher auf jener Geraden im Unendlichen liegt: der Durchschnitt dieser Ebene und der Ebene des Schnittes ist die Asymptote.

Es ist hieraus ersichtlich, daß jeder Meridianschnitt der Fläche eine Hyperbel sey; und daß eine solche Hyperbel als Asymptoten die Projektionen derjenigen Geraden des Hyperboloids auf der Ebene des Meridianes habe, welche parallel zu dieser Ebene sind.

280. Im Falle die Ebene das Umdrehungshyperboloid nach einer Parabel schneidet, so ist die tangirende Ebene an dem Punkt, welcher im Unendlichen auf der Geraden liegt, die zu der durchschneidenden Ebene parallel ist, selbst parallel zu dieser letzten Ebene und der Schnitt hat keine Asymptote. Um den Parallelismus der genannten zwey Ebenen zu beweisen, bemerken wir, daß

die Ebene, welche durch den Mittelpunkt des Kegels parallel zu der durchschneidenden geführt ist, zufolge der Hypothese, den Kegel nach einer Kante berührt, und daß diese beyden Ebenen folglich senkrecht auf die Meridianebene sind, welche durch die Berührungskante geht; nun aber ist diese Kante parallel zu der Erzeugungslinie des Hyperboloids, auf welcher der im Unendlichen gelegene Punkt des Schnittes sich befindet, die tangirende Ebene an dem Punkt im Unendlichen, welche durch jene Erzeugungslinie geht, und die durchschneidende Ebene gehen daher durch zwey Parallelen und sind beyde senkrecht auf eine und dieselbe Meridianebene, sie sind daher parallel unter sich; die Tangente an jenem Punkt liegt daher ganz im Unendlichen, und es folgt daraus, daß der Schnitt keine Asymptote habe, welche Eigenthümlichkeit die Parabel von den andern krummen Linien des zweyten Grades auszeichnet.

Von den ebenen Schnitten des hyperbolischen Paraboloids.

281. Nehmen wir an, ein hyperbolisches Paraboloid sey durch eine Ebene nach einer krummen Linie vom zweyten Grad geschnitten, und man verlange die besondere Art der Linie zu kennen?

Wenn die durchschneidende Ebene durch eine Gerade der Fläche geht, so enthält sie noch eine zweyte Gerade der nemlichen Fläche, welche zusammen den totalen Schnitt bilden, und die Ebene berührt die Fläche in dem Begegnungspunkt der zwey Geraden. (Art. 138.)

Wenn die Ebene durch keine Gerade der Fläche geht, so giebt es, welche Stellung sie auch haben mag, immer zwey Gerade der Fläche, welche zu derselben parallel sind, und die Punkte der Durchschnittslinie, welche auf diesen Geraden liegen, sind im Unendlichen. Um dieses darzuthun, bezeichnen wir die Ebene, zu welcher die Erzeugungslinien des einen Systems, des hyperbolischen Paraboloids parallel sind, mit P und die Ebene des Parallelismus, der zweyten Erzeugungsart, mit Q. Die gegebene Ebene wird diese beyden Ebenen nach zwey Geraden schneiden, welche wir mit p und q bezeichnen wollen. A und A′ seyen zwey Erzeugungslinien parallel zu der Ebene P; B und B′ seyen zwey Gerade des zweyten Erzeugungssystems, welche parallel zu der Ebene Q sind. Man bestimme die Parallele zu p, welche sich auf die zwey Geraden B, B′ stützt; und die Parallele zu q, welche sich auf die Geraden A, A′ als Leitlinien anlehnt. Um diese Parallelen zu konstruiren, führe man durch die Gerade B und durch eine Parallele zu p eine Ebene, welche die Gerade B′ in einem Punkte trifft, durch den man eine andere Parallele zu p führe, welches eine Erzeugungslinie des ersten Systems ist. Durch die Gerade A und durch eine Parallele zu q führe man eine Ebene, welche die Gerade A′ in einem Punkte trifft, durch welchen man eine zu q parallele Erzeugungslinie führt. Die zu p und q parallelen Erzeugungslinien, welche wir mit p', q' bezeichnen wollen, sind offenbar parallel zu der durchschneidenden Ebene, weil jene diese beyden ersten Geraden enthält, nun aber sind die Punkte der Durchschnittslinie des Paraboloids und einer Ebene diejenigen, in welchen die Erzeugungslinien des Paraboloids auf die Ebene treffen; welches daher auch die Stellung der durchschneidenden Ebene seyn mag, so giebt es zwey Punkte des Durchschnittes, die in einer unendlichen Entfernung auf den zu derselben Ebene parallelen Erzeugungslinien liegen; woraus folgt, daß das hyperbolische Paraboloid durch eine Ebene nach keiner geschlossenen Linie geschnitten werden kann; die ebenen Schnitte dieser Fläche sind daher entweder Parabeln oder Hyperbeln. Wir werden nun beweisen, daß die Ebenen, welche parallel sind, zu der geraden Durchschnittslinie der Ebenen

P und Q, zu denen die beyden Systeme von geraden Erzeugungslinien des Paraboloids parallel sind, diese Fläche nach Parabeln schneiden, und daß die Schnitte jeder andern Ebene Hyperbeln sind.

282. Die durchschneidende Ebene trifft die zwey Ebenen P und Q nach zwey Geraden; die zu denselben Geraden parallelen Erzeugungslinien p', q' enthalten in im Unendlichen gelegenen Punkte der Durchschnittslinie, und wenn die Ebenen, welche die Fläche an diesen Punkten berühren, die gegebene Ebene schneiden, so sind die geraden Durchschnitte dieser Ebenen, Asymptoten der Durchschnittslinie des Paraboloids und der gegebenen Ebene, woraus folgt, daß diese Linie alsdann eine Hyperbel seyn müsse.

Irgend eine Ebene X, welche durch die zur durchschneidenden Ebene parallele Erzeugungslinie p' geht, trifft eine andere Erzeugungslinie von demselben System die einen Punkt; die durch denselben Punkt parallel zur Ebene Q geführte Ebene schneidet die Erzeugungslinie p' in dem Berührungspunkt des Paraboloids und der Ebene X; wenn daher die Ebene X parallel zu der Ebene P ist, so ist sie auch parallel zu allen Erzeugungslinien, welche wie A, A′ zu derselben Ebene parallel sind, sie trifft daher keine dieser Geraden, und da sie tangirend zu dem Paraboloid ist, so liegt der Berührungspunkt im Unendlichen auf der Geraden p'; daher ist der Durchschnitt dieser tangirenden Ebene und der Ebene, welche das Paraboloid schneidet, die Asymptote, des in der letzten Ebene enthaltenen Schnittes. Aus dem gleichen Grunde trifft die Ebene, welche durch die Gerade q' parallel zu der Ebene Q geführt ist, keine der zu dieser Ebene parallelen Erzeugungslinien der Fläche, und sie ist, wie jede Ebene, die durch eine Gerade der Fläche geht, tangirend zu derselben (Art. 131.); der Berührungspunkt ist daher im Unendlichen gelegen. Der Durchschnitt dieser letzten Ebene und der durchschneidenden, bestimmt die zweyte Asymptote. Die beyden erhaltenen Asymptoten sind, zufolge dieser Konstruktionen, parallel zu den Geraden p, q, den geraden Durchschnitten der durchschneidenden Ebene und der Ebenen P und Q.

283. Im Falle die durchschneidende Ebene parallel wäre zu dem Durchschnitt der Ebenen P und Q, so ist einleuchtend, daß die Asymptoten parallel unter sich werden. Ueberdies sind sie in einer unendlichen Entfernung; denn die zwey, zu dem geraden Durchschnitt der Ebenen P und Q parallelen Erzeugungslinien liegen in einer unendlichen Entfernung von dieser geraden Durchschnittslinie. Die Ebenen, welche durch diese Erzeugungslinien parallel zu den Ebenen P und Q geführt sind, können daher die durchschneidende Ebene nur nach Geraden treffen, welche ganz im Unendlichen liegen. Nun aber sind diese Geraden die Asymptoten; wenn daher die durchschneidende Ebene parallel ist, zu dem geraden Durchschnitt der zwey Ebenen des Parallelismus des Paraboloids, so ist der Schnitt eine von den Linien des zweyten Grads, welche sich ins Unendliche ausdehnen, und keine Asymptoten haben, das heißt eine Parabel; in jeder andern Richtung bringt die durchschneidende Ebene eine Hyperbel hervor, und in keinem Fall kann der Schnitt eine geschlossene, in sich selbst zurückkehrende krumme Linie seyn.

284. Ob nun die Linie eine Parabel oder eine Hyperbel sey, so erhält man die Tagente an einen ihrer Punkte, indem man den gemeinsamen Durchschnitt der Ebene, welche das Paraboloid an diesem Punkt berührt, und der Ebene des Schnittes konstruirt.

Von den ebenen Schnitten des Hyperboloids von einem Netze.

285. Wenn man durch einen beliebigen Punkt des Raumes, die Parallelen führt zu fünf Geraden eines Hyperboloids, die einem nemlichen Erzeugungssystem angehören, so besitzt der elliptische Kegel, welcher durch diese Parallelen geht, die Eigenthümlichkeit, daß es keine, dem einen oder dem andern Erzeugungssystem angehörende Gerade des Hyperboloids gäbe, die nicht ihre Parallele auf jenem Kegel habe. Wenn man diesen Satz als bewiesen annimmt, und den Kegel konstruirt hat, von welchem man den Mittelpunkt kennt, und fünf Punkte der Grundlinie, die auf den fünf gegebenen Kanten gelegen sind, *) so kann man daraus die Art der krummen Linie erkennen, welche aus dem Durchschnitt des Hyperboloids und einer gegebenen Ebene entsteht; denn nachdem man durch den Mittelpunkt des Kegels eine Ebene parallel zu der gegebenen geführt hat, so hat diese Ebene mit dem Kegel entweder nichts gemein als den Mittelpunkt, oder sie ist tangirend zu demselben oder sie enthält zwey Kanten des Kegels.

Der entsprechende Schnitt, nach einer dieser drey Hypothesen, ist entweder eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Nehmen wir an, der Schnitt sey eine Hyperbel, so sind alsdann zwey gerade Erzeugungslinien des Hyperboloids von einem Netze, parallel zu der durchschneidenden Ebene, und sie bestimmen die Asymptoten der Hyperbel. In der That, bezeichnen wir mit A, die erste von jenen Geraden und mit B, C, zwey andere Gerade des Hyperboloids, von dem nemlichen Erzeugungssystem.

286. Jede durch die Gerade A gehende Ebene schneidet die Geraden B und C in zwey Punkten; die Gerade, welche diese beyden Punkte verbindet, und die Gerade A bestimmen die Stellung einer Ebene, welche die Fläche in dem Begegnungspunkt der zwey Geraden tangirt. Wenn man durch die Geraden B, C, und parallel zu der Geraden A zwey Ebenen führt, so ist der Durchschnitt dieser Ebenen parallel zu A, und schneidet die zwey Geraden B und C; wenn man daher durch denselben Durchschnitt und durch die Gerade A eine Ebene führt, so ist diese tangirend zu der Fläche an einem auf der Geraden A im Unendlichen gelegenen Punkt, und folglich ist der Durchschnitt dieser tangirenden Ebene, und einer zur Geraden A parallelen durchschneidenden Ebene die Asymptote der Hyperbel.

Arbeitet man eben so bey der Geraden A′ der Fläche, welche parallel zur durchschneidenden Ebene ist, so bestimmt man zwey weitere beliebige Gerade B′, C′ von der nemlichen Erzeugung; durch diese Geraden führe man parallele Ebenen zu der Geraden A′. Der Durchschnitt dieser Ebenen bestimmt mit der Geraden A′ eine zweyte tangirende Ebene, deren Berührungspunkt im Unendlichen liegt, und welche die Ebene der Hyperbel nach der zweyten Asymptote schneidet.

Der elliptische Kegel, welcher die verschiedenen Arten der ebenen Schnitte des Hyperboloids von einem Netze bestimmt, verwandelt sich in einen geraden kreisförmigen Kegel, wenn das Hyperboloid eine Umdrehungsfläche wird.

---

*) Wir nehmen als bekannt an, daß durch je fünf Punkte einer Ebene nur eine einzige Kegelschnittslinie möglich ist.