Noten zum zweyten Buch.

Note I.

Ueber die Cylinder- und Kegelflächen. Kap. I. Art. 58 — 61.

Lehrsatz.

Die Schnitte einer Cylinderflächen durch parallele Ebenen sind gleiche, sich deckende Linien.

Beweis. Es seyen A B C, *a b c* (Taf. XII. Fig. 3.) zwey parallele Schnitte eines Cylinders C a, A *a*, B *b* seyen zwey gerade Erzeugungslinien desselben, und A, *a*, B, *b*, die Begegnungspunkte dieser Erzeugungslinien, mit den Schnitten.

Man verbinde diese Punkte durch die Geraden A B, *a b*. Da sowohl die Erzeugungslinien A *a*, B *b*, als die Ebenen der Schnitte wechselsweise parallel sind, so sind auch die Sehnen A B, *a b* parallel und gleich.

Auf diese Art läßt sich die Gleichheit aller Sehnen beweisen, welche in beyden Schnitten die Punkte verbinden, die einer nemlichen Erzeugungslinie angehören. Wenn man daher in einem dieser Schnitte ein beliebiges Polygon einschreibt, so kann man in dem andern ein gleiches an Seiten und Winkeln einschreiben. Die Polygone müssen sich decken, und da die Scheitel ihrer Winkel Punkte der Schnitte sind, und überdem alle, in die Schnitte einschreibbare Polygone dieselbe Eigenthümlichkeit haben; so müssen auch die Schnitte gleich seyn und sich decken.

Zusatz. Da die parallelen Schnitte gleich sind, so sind auch alle ihre gleichnamigen Linien, und folglich die Tangenten A A′, *a a′*, welche durch die Punkte einer nemlichen Erzeugungslinien A *a* gezogen sind, parallel unter sich. Alle diese parallelen Tangenten A A′, *a a′* . . . liegen folglich in einer Ebene, welche die tangirende Ebene zu dem Cylinder an der Kante A *a* ist.

Lehrsatz.

Die Schnitte einer Kegelfläche durch parallele Ebenen sind ähnliche Linien.

Beweis. Es sey A (Taf. XII. Fig. 4.) der Mittelpunkt eines Kegels D C B, *d c b* zwey parallele Schnitte, und A B *b*, A C *c*, A D *d*, drey Erzeugungslinien desselben Kegels, welche diese Schnitte in den Punkten B, *b*, C, *c*, D, *d* treffen. Man verbinde in jeder Ebene diese Punkte durch die Sehnen B C, B D, *b c*, *b d*.

Die ähnlichen Dreyecke A B C und A *b c*, A B D und A *b d* geben:

$$AB : Ab :: BC : bc :: DB : db.$$

oder

$$BC : bc :: DB : db,$$

daher haben in den beyden Schnitten alle Sehnen, welche den nemlichen Erzeugungslinien entsprechen, das gleiche Verhältniß unter sich. Wenn man daher in einen Schnitt irgend ein Polygon eingeschrieben hat, so kann man stets in jedem parallelen Schnitt ein ähnliches Polygon einschreiben, und folglich sind diese Schnitte ähnliche Linien.

Zusatz. Alle Tangenten M N, *m n*, zu den parallelen Schnitten eines Kegels an den Punkten einer nemlichen Erzeugungslinie sind parallel unter sich. Alle diese parallelen Tangenten zusammen, bilden die tangirende Ebene an der Kante A C *c*.

Note II.

Beweis der doppelten Erzeugung des Hyperboloids von einem Netz durch die gerade Linie. Kap. II. Art. 119.

Es sey I K. (Taf. XII. Fig. 6.) eine bewegliche Gerade, welche sich beständig auf drey feste Gerade A B, M N, C D anlehnt, um ein Hyperboloid von einem Netze zu erzeugen. Betrachtet man blos das Flächenstück, was von den Seiten des windischen Vierecks A B C D eingeschlossen ist, so entsprechen alle Stellungen der beweglichen Geraden, solchen Geraden, welche wie I K, I′ K′, . . . ꝛc. die festen Leitlinien in drey Punkten I, G, K; I′, G′, K′, . . . ꝛc. schneiden. Die bewegliche Gerade I K und die feste Gerade M N, da sie in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkt G; aus dem nemlichen Grunde treffen sich die zwey Geraden I M, K N in einem Punkte L; aber die eine derselben liegt in der Ebene des Dreyecks A B D, und die andere in der Ebene des Dreyecks B C D, sie können sich daher nur in einem Punkte des Durchschnitts der Ebenen dieser zwey Dreyecke treffen, woraus folgt, daß der Punkt L in der Verlängerung der Diagonale B D des windischen Vierecks A B C D liege. Auf dieselbe Art ist es erweislich, daß die Geraden I′ M′, K′ N′ sich in einem anderen Punkt H der nemlichen Diagonale B D begegnen müssen. Die von dem Punkt L aus gezogenen Geraden L K, L M theilen die Seiten des Vierecks A B C D in acht Theile oder Segmente A I, I B, B N, N C, C K, K D, D M, M A. Wir werden beweisen: wenn man zwey derartige Produkte bildet, so daß die Faktoren eines jeden nur aus solchen Segmenten bestehen, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, diese Produkte gleich seyen.

Die Diagonale B D zerlegt das Viereck A B C D in zwey Dreyecke A B D, B C D; wenn man eines derselben, B C D zum Beyspiel auf die Seite setzt (Fig. 6. bis Taf. XII.) so ziehe man durch den Punkt D zu der Geraden K N L die Parallele D I; und verlängere dieselbe, bis sie die Seite B C des Dreyeckes in I trifft.

Vermöge der ähnlichen Dreyecke C K N, C D I erhält man:

$$CK : DK :: CN : NJ. \qquad (1)$$

Die zwey Dreyecke N B L, D B J geben:

$$BD : BL :: BJ : BN,$$

woraus
$$BD + BL : BL :: BJ + BN : BN$$

oder
$$DL : BL :: NJ : BN \qquad (2)$$

Multiplicirt man nach der Reihenfolge die Theilsätze der Proportionen (1) und (2), so hat man

$$CK \times DL : DK \times BL :: CN : BN;$$

Daher (Fig 6.)

$$BN \times CK \times DL = BL \times CN \times DK. \qquad (a)$$

Betrachtet man das zweyte Dreyeck A B D des Vierecks und die Gerade L M, so hat man aus dem nemlichen Grunde

$$AI \times BL \times CM = AM \times BI \times DL. \qquad (b)$$

Wenn man die Gleichungen (a) und (b) gliederweise multiplicirt, so ergeben sich zwey gleiche Produkte, deren eines zu Faktoren die Segmente A I, B N, C K, D M hat, und das andere, die Segmente A M, B I, C N, D K; und jedes enthält nur solche Segmente, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben.

Die Gleichheit dieser zwey Produkte giebt:

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = \frac{AM}{DM} \times \frac{CN}{BN}$$

Da die Gerade M N fest ist, so hat man

$$\frac{AM}{DM} \times \frac{CN}{BN} = a \qquad (c)$$

a bezeichnet eine, durch die Stellung der drey festen Geraden, welche die bewegliche Gerade I K leiten, bestimmte unveränderliche Größe; woraus folgt, daß für alle Stellungen dieser Geraden

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = a, \text{ oder } \frac{CK}{DK} = a\frac{BI}{AI} \qquad (d)$$

Dieses festgesetzt, wenn man die drey Geraden A D, I K, B C fixirt, um als Leitlinien der beweglichen Geraden M N zu dienen, so theilt diese Gerade in irgend einer Stellung die Seiten des windischen Vierecks ebenfalls in acht Segmente, zwischen denen bey allen ihren Stellungen die vorstehenden Verhältnisse (d) und (c) statt haben; das heißt, daß man bey allen Stellungen der beweglichen Geraden I K, M N auf gleiche Weise hat:

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = a, \ (d) \qquad \frac{AM}{DM} = a\frac{BN}{CN} \qquad (c)$$

woraus folgt, daß es für das Hyperboloid von einem Netze zwey Erzeugungsarten giebt. Bey der einen stützt sich die bewegliche Gerade I K auf die Geraden A B, C D, M N, und bey der zweyten lehnt sich die bewegliche Gerade M N auf die Leitlinien A D, B C, I K. Es giebt daher keinen Punkt G dieser Fläche, durch den man nicht zwey Gerade M G N, I G K führen könne, welche den zwey, den beyden Erzeugungsarten des Hyperboloids entsprechenden Systemen von Geraden angehören.

Note III.

Zu Art. 125. gehörig.

Lehrsatz.

Wenn zwey unter einander rechtwinklige Ebenen sich so bewegen, daß sie immer durch die Seiten eines nemlichen Winkels gehen, so beschreibt die gerade Durchschnittslinie dieser Ebenen einen schiefen Kegel.

Beweis. Es seyen O P, O Q (Taf. XII. Fig. 7.) die zwey Seiten eines Winkels, durch welche man zwey unter sich rechtwinklige Ebenen geführt habe, und O A sey die Projektion des Durchschnittes dieser zwey Ebenen auf der Ebene des Winkels P O Q. Nachdem man irgend eine Gerade D C senkrecht auf O A gezogen hat, betrachte man diese Gerade als den Riß einer Ebene, welche senkrecht auf den Durchschnitt der zwey rechtwinkligen Ebenen ist, und welche diese letzteren Ebenen nach zwey unter sich senkrechten Geraden schneidet, die durch die Punkte C und D gehen.

Man bildet dadurch im Raume zwey rechtwinklige Dreyecke, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel auf dem geraden Durchnitte der beyden rechtwinkligen Ebenen haben, und als Hypothenusen die Geraden O D, D C. Es folgt aus diesem, daß der, den beyden Dreyecken gemeinschaftliche Scheitel in dem Durchschnittskreise von zwey auf O D und D C als Durchmessern beschriebenen Kugeln liegen müsse. Diese beyden Kugeln schneiden sich nach dem kleinen Kreise, dessen Ebene senkrecht ist auf jene des Winkels P O Q, und dessen auf die Seite O P dieses Winkels senkrechter Durchmesser die gemeinschaftliche Sehne der beyden großen Kreise D B O und C B D der Kugeln ist. Nun aber, welches auch die, in dem Winkel P O Q durch den Punkt D gezogene Sehne D C sey, so wird der kleine Durchschnittskreis der Kugeln, welche über D C und O D als Durchmesser beschrieben sind, sich nicht verändern, daher ist dieser kleine Kreis der geometrische Ort der Scheitel der rechtwinkligen Dreyecke, welche als Hypothenusen die Gerade von beständiger Länge O D und die veränderliche C D haben; daher kann man denselben als die Grundlinie eines schiefen Kegels betrachten, dessen Kanten die Durchschnitte von zwey rechtwinkligen Ebnenen sind, denen auferlegt ist, sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels zu bringen.

Anstatt den festen Punkt D auf der Seite O Q des Winkels P O Q zu nehmen, könnte man denselben auf der Seite O P annehmen. Es laßt sich sodann auf dieselbe Art beweisen, daß der gerade Durchschnitt zweyer rechtwinkligen Ebenen, die sich zwischen den Seiten eines gegebenen Winkels bewegen müssen, einen schiefen Kegel erzeuge, der als Grundlinie einen Kreis hat, dessen Ebene senkrecht auf die Seite O Q des gegeben Winkels ist. Daher besitzt dieser schiefe Kegel so wie alle anderen Kegel des zweyten Grads die Eigenschaft, durch zwey Systeme von Ebenen nach Kreisen geschnitten zu werden. In diesem besondern Falle sind die schneidenden Ebenen senkrecht auf diejenigen Kanten des Kegels, die in der Ebene der Mittelpunkte der beyden kreisförmigen Grundlinien liegen.
