renden Ebenen der windischen Fläche unbestimmt ist, so gewählt werden, daß sie parallel zu einer nemlichen Ebene sind, und in dieser Hypothese wandelt das Hyperboloid sich in ein berührendes hyperbolisches Paraboloid um. (Art. 122.)

Wir werden weiter unten (Art. 328.) aus diesen Eigenschaften der windischen Flächen eine allgemeine graphische Auflösung des Problems der Tangenten ableiten.

Fünftes Kapitel.

Tangirende Ebenen zu krummen Flächen, deren Berührungspunkt nicht gegeben ist.

Bedingungen, welche die Stellung der tangirenden Ebenen zu einer krummen Fläche bestimmen.

155. In den verschiedenen Aufgaben über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, welche wir bis jetzt aufgelößt haben, setzten wir stets voraus, daß der Punkt, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden sollte, auf der Fläche genommen, uud daß er selbst der Berührungspunkt sey: diese einzige Bedingung war hinreichend, um die Stellung der Ebene zu bestimmen. Aber dem ist nicht also, sobald der Punkt, durch den die Ebene gehen soll, außerhalb der Fläche genommen ist.

156. Soll die Stellung einer Ebene bestimmt seyn, so muß sie drey verschiedenen Bedingungen entsprechen, von denen jede gleichbedeutend damit ist: durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Nun aber entspricht im Allgemeinen die Eigenschaft, tangirend zu einer krummen Fläche zu seyn, sobald der Berührungspunkt nicht gegeben ist, nur einer einzigen von diesen Bedingungen. Wenn daher die Stellung einer Ebene durch Bedingungen dieser Art festgesetzt werden soll, so bedarf es deren, im Allgemein drey. In der That, nehmen wir an, es seyen uns drey krummen Flächen gegeben, und es sey eine Ebene tangirend zu einer von ihnen; so können wir uns vorstellen, die Ebene bewege sich um diese Fläche, ohne daß sie aufhöre sie zu berühren. Sie wird dieses nach allen erdenklichen Richtungen thun können, nur wird sich nach Masgabe der Ortsveränderung der Ebene, der Berührungspunkt auf der Fläche bewegen, und seine Bewegung wird in derselben Richtung statt haben, wie die der Ebene. Nehmen wir nun an, diese Bewegung geschehe so lange nach irgend einer Seite hin, bis die Ebene der zweyten

Fläche in einem gewissen Punkte begegne: die Ebene ist sodann zu gleicher Zeit tangirend zu den zwey ersten Flächen, aber ihre Stellung ist noch nicht festgesetzt.

Wir können uns in der That vorstellen, daß sich die Ebene um die zwey Flächen bewege, ohne aufzuhören sie beyde zu berühren; nur wird es ihr jetzt nicht mehr frey stehen, sich wie vorher nach allen Richtungen zu bewegen, sie kann dies nur noch nach einer Einzigen thun. So wie die Ebene ihre Stellung verändert, bewegen sich die beyden Berührungspunkte, jeglicher auf seiner angehörigen Fläche, und zwar dergestalt, daß, wenn man sich eine Gerade durch diese zwey Punkte gezogen denkt, ihre Bewegungen nach einerley Seite, in Bezug auf diese Gerade, geschehen, wenn die Ebene die zwey Flächen von derselben Seite berührt; und nach den entgegengesetzten Seiten, wenn die Ebne die erste Fläche von der einen, und die Zweyte von der andern Seite berührt. Stellen wir uns endlich vor, daß diese Bewegung, die Einzige, die Statt haben kann, fortdauere, bis die Ebene die dritte Fläche in einem gewissen Punkt berühre: so ist alsdann die Stellung der Ebene festgesetzt, und sie kann sich nicht weiter bewegen, ohne aufzuhören, berührend zu einer der drey Flächen zu seyn.

157. Man sieht hieraus, daß um die Stellung einer Ebene zu bestimmen, mittelst unbestimmter Berührungen mit gegebenen krummen Flächen, im Allgemeinen drey erfoderlich seyen. Wenn daher eine tangirende Ebene zu einer gegebenen krummen Fläche geführt werden soll, so gilt diese Bedingung nur für eine von den drey, denen die Ebene genug thun kann: man kann folglich noch zwey Andere nach Gefallen nehmen, und die Ebene zum Beyspiel, durch zwey gegebene Punkte gehen lassen, oder was auf Eines heraus kommt, durch eine gegebene Gerade rc. Wenn endlich die Ebene drey gegebene Flächen berühren sollte, so könnte man über keine weitere Bedingung mehr verfügen, und ihre Stellung wäre bestimmt.

158 Das so eben Gesagte gilt von den krummen Flächen im Allgemeinen; jedoch muß dasjenige davon ausgenommen werden, was auf alle Cylinderflächen, auf alle Kegelflächen und überhaupt auf alle aufwickelbaren Flächen Bezug hat; denn bey dieser Klasse von Flächen ist die Berührung mit einer Ebene nicht auf einen einzigen Punkt beschränkt, sie dehnt sich längs einer unbestimmten Geraden aus, die mit einer Stellung der geraden Erzeugungslinie zusammenfällt. (Art. 130.)

Die Eigenschaft einer Ebene eine einzige dieser Flächen zu berühren, gilt für zwey Bedingungen, weil sie ihr auferlegt, durch eine Gerade zu gehen, und es bliebe in diesem Fall nur noch eine einzige Bedingung frey, wie zum Beyspiel die, durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Es kann daher nicht aufgegeben werden, eine Ebene zu führen, welche zu gleicher Zeit zwey von diesen Flächen berührt, und um so weniger noch drey; wenn anders nicht einige besondere Umstände diese Bedingungen vereinbar machen sollten.

Es wird wohl nicht ohne Nutzen seyn, ehe wir weiter gehen, einige Beyspiele zu geben, von der Nothwendigkeit, in die man kommen kann, tangirende Ebenen zu krummen Flächen zu führen, durch Punkte, die außerhalb derselben genommen sind. Das erste Beyspiel wollen wir aus der Konstruktion der Festungswerke entnehmen.

159. Bey dem Vortrage der allgemeinen Grundsätze der Befestigungskunst, setzt man zuerst voraus, daß der Boden, welcher die Festung, nach allen Seiten, auf Kanonenschußweite umgiebt, horizontal sey, und keine Erhöhung darbiete, welche dem Belagerer einigen Vortheil gewähren könnte: sodann bestimmt man, nach dieser Hypothese, den Umriß des Hauptwalles, der halben Monde, der bedeckten Wege und der vorliegenden Werke; und man giebt die Beherrschungen (commendemens) an, welche die verschiedenen Theile der Befestigung übereinander haben müssen, damit sie sämmtlich auf die wirksamste Weise zu ihrer wechselseitigen Vertheidigung beytragen.

Um sodann diese Grundsätze auf den Fall anzuwenden, wenn der, die Festung umgebende Boden eine Höhe darbietet, die der Belagerer benützen könnte, und gegen welche die Befestigung d e f i l i r t werden muß, so wird eine neue Betrachtung erfoderlich. Wenn nur eine einzige Anhöhe vorhanden ist, so wählt man in dem Platze zwey Punkte, durch die man sich zu der Höhe, gegen welche man sich defilirem will, eine tangirende Ebene geführt denkt: Diese tangirende Ebene heißt die D e f i l e m e n t s e b e n e, und man giebt allen Theilen der Befestigung dasselbe Relief über die Defilementsebene, was sie über die Horizontalebene bekommen hätten, wenn der Boden waagerecht gewesen wäre: hierdurch erhalten die Einen über die Andern, und Alle zusammen über die benachbarte Anhöhe, dieselbe Beherrschung, wie über einen horizontalen Boden, und die Befestigung hat die nemlichen Vortheile, wie im ersten Fall. Was die Wahl der zwey Punkte anbelangt, durch welche die Defilementsebene gehen soll, so muß diese den zwey folgenden Bedingungen Genüge thun: 1tens daß der Winkel, den die Ebene mit dem Horizont macht, der möglich kleinste sey, damit die Wallgänge einen geringern Abhang bekommen, und dadurch der Vertheidigungsdienst um so weniger erschwert werde; 2tens daß die Höhe der Werke über den natürlichen Boden ebenfalls die möglich geringste sey, damit ihre Erbauung weniger Arbeit und weniger Unkosten verursache.

Wenn in der Umgebung des Platzes zwey Höhen lägen, gegen welche die Befestigung zumal zu defiliren wäre, so müßte die Defilementsebene zu gleicher Zeit tangirend zu den Oberflächen dieser beyden Anhöhen seyn. Es bliebe sodann, um ihre Stellung festzusetzen, nur eine einzige Bedigung frey, und man würde darüber verfügen, das heißt, man würde in dem Platze den Punkt, durch welchen die Ebene gehen soll, auf eine solche Art wählen, daß dadurch den, bey dem ersten Falle vorgetragenen Bedingungen so vollkommen als möglich entsprochen würde.

Das zweyte Beyspiel, was wir anführen wollen, ist abermals aus der Mahlerey genommen.

160. Auf den Oberflächen der Körper, besonders wenn sie polirt sind, erscheinen schimmernde Punkte von einem Glanze, ähnlich jenem des leuchtenden Körpers, der sie bescheint. Die Lebhaftigkeit dieser Punkte ist um so größer, und ihre Ausdehnung um so geringer, je mehr die Oberflächen polirt sind. Bey den rauhen Oberflächen haben die schimmernden Punkte bedeutend weniger Glanz, und nehmen einen größeren Theil der Oberfläche ein.

Bey einer jeder Fläche ist der Glanzpunkt durch folgende Bedingung bestimmt: daß der einfallende Lichtstrahl und der Reflexionsstrahl, welcher nach dem Auge des Beschauers gerichtet ist, in einer nemlichen Ebene liegen, welche senkrecht auf die tangirende Ebene an jenem Punkt ist, und mit dieser Ebene gleiche Winkel bilden; weil der glänzende Punkt der Fläche als Spiegel wirkt, und einen Theil des Bildes des leuchtenden Gegenstandes nach den Auge des Beschauers zurückschickt. Die Bestimmung dieses Punktes erfodert eine außerordentliche Präzision, und wenn auch eine Zeichnung noch so korrekt wäre, und die scheinbaren Umrisse selbst mit einer mathematischen Genauigkeit gezogen, so würde doch der geringste Fehler in der Stellung des glänzenden Punktes sehr bedeutend werden, in Betreff des Aussehens der Formen. Wir wollen dafür nur einen einzigen aber sehr auffallenden Beweis beybringen.

Die kugelförmige Oberfläche des Auges ist polirt, und überdies noch mit einer dünnen Lage von Feuchtigkeit überzogen, welche die Politur um so vollkommener macht. Wenn man ein offenes Auge betrachtet, so nimmt man auf der Oberfläche einen schimmernden Punkt wahr, von einem großen Glanze und von geringer Ausdehnung, dessen Stellung von denen des erhellenden Gegenstandes und des Beobachters abhängt. Wäre die Oberfläche des Auges vollkommen rund, so könnte es sich um seine Vertikalaxe drehen, ohne daß der schimmernde Punkt die geringste Veränderung erlitte. Aber diese Oberfläche ist in der Richtung der Seheaxe verlängert, und wenn sie sich um die Vertikalaxe dreht, so wechselt auch der schimmernde Punkt. Eine lange Uebung hat uns sehr empfindlich für diesen Wechsel gemacht, und er bestimmt größtentheils unser Urtheil über die Richtung der Augenkugel. Hauptsächlich nach der Verschiedenheit in den Stellungen der glänzenden Punkte auf den beyden Augenkugeln einer Person schließen wir, ob dieselbe schiele oder nicht, oder ob sie uns anschaue, und wenn sie dies nicht thut, nach welcher Seite sie blicke.

Indem wir dieses Beyspiel anführen, verlangen wir nicht, daß auf einem Bilde die Stellung der glänzenden Punkte auf der Augenkugel geometrisch bestimmt werden müsse, unsere Absicht war blos zu zeigen, wie leicht begangene kleine Fehler in der Stellung dieses Punkts sehr bedeutend werden können, in Betreff der anscheinenden Gestalt des Gegenstandes, wenn gleich die Zeichnung der scheinbaren Umrisse desselben, die nemliche bleibt.

Aufgaben über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, welche durch gegebene Punkte im Raum geführt sind.

161. Die Kugelfläche ist eine der einfachsten, die man betrachten kann; ihre Erzeugungsart hat sie mit einer großen Zahl verschiedener krummen Flächen gemein; so könnte man sie zum Beyspiel unter die Umdrehungsflächen reihen, und ihrer keine besondere Erwähnung thun, aber ihre Regelmäßigkeit giebt zu merkwürdigen Resultaten Veranlassung, von denen einige durch ihre Neuheit anziehend sind, und mit denen wir uns zuforderst beschäftigen wollen, weniger um ihrer selbst willen, als um eine Gewandtheit in der Betrachtung der drey Dimensionen zu erhalten, welche wir zu allgemeineren und nützlicheren Gegenständen nöthig haben.

Erste Aufgabe.

Man soll durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Kugelfläche führen?

Erste Auflösung.

162. Es sey (A, a), (Taf. XIII. Fig. 1.) der Mittelpunkt der Kugel, B C D die Projektion des größten Horizontalkreises, und (E F, $e f$) die gegebene Gerade. Durch den Mittelpunkt der Kugel sey eine Ebene senkrecht auf die gegebene Gerade geführt, und (G, g) sey der Begegnungspunkt der Ebene und der Geraden, nach der bekannten Methode konstruirt. *)

Dieses festgesetzt, so sieht man vorerst leicht ein, daß durch die gegebene Gerade zwey tangirende Ebenen zu der Kugel geführt werden können, die dieselbe von zwey entgegengesetzten Seiten berühren; was zwey verschiedene Berührungspunkte bestimmt, deren Projektionen zu konstruiren wären.

*) Die hiezu erfoderlichen abgekürzten Konstruktionen sind auf der Tafel angegeben.

Wenn man zu diesem Ende, aus dem Mittelpunkt der Kugel sich zwey Senkrechte auf die beyden tangirenden Ebenen gefällt denkt, so trifft jede in den Berührungspunkt der Kugel mit der entsprechenden tangirenden Ebene, und sie sind beyde in der Ebene enthalten, welche senkrecht auf die gegebene Gerade geführt ist; daher liegen die zwey Berührungspunkte in dem Schnitte der Kugel durch die senkrechte Ebene, welcher Schnitt ein größter Kreis der Kugel ist, zu dem die zwey Schnitte derselben Ebene durch die tangirenden Ebenen, Tangenten sind.

Wenn man sich in der senkrechten Ebene eine Horizontale denkt, deren Projektionen die Horizontale $a\ h$ und die auf E F senkrechte Gerade A H sind, und wenn man sich vorstellt, daß die senkrechte Ebene sich um diese Horizontale, als Scharnier drehe, bis sie selbst horizontal geworden sey, so wird ihr Schnitt durch die Kugelfläche offenbar mit dem Umkreise B C D zusammenfallen, ihre zwey Berührungspunkte werden auf eben diesen Kreis zu liegen kommen, und wenn man den Punkt J konstruirt, wohin sich der Begegnungspunkt der gegebenen Geraden mit der senkrechten Ebene, nach vollzogener Bewegung auflegt, indem man die Weite (G H, $g\ h$) $= g'\ h'$ auf der E F von H nach J trägt, und sodann zu dem Kreise B C D, die Tangenten J C, J D zieht, so bestimmen diese die beyden Berührungspunkte C, D in der Stellung, die sie genommen haben, nachdem die senkrechte Ebene auf die Horizontalebene zurückgelegt ist.

Um nun ihre Projektionen in ihrer natürlichen Stellung zu erhalten, denke man sich die senkrechte Ebene in die ursprüngliche Lage zurückversetzt, indem sie sich abermals um die Horizontale (A G, $a\ g$) als Scharnier dreht, und wobey sie sowohl den Punkt (J, j) mit sich führt, als auch die zwey Tangenten J C, J D, nachdem sie verlängert worden bis zu ihrer Begegnung in K, K′ mit der Horizontalen A H; und endlich die Sehne C D, welche ebenfalls dieselbe Gerade A H in einem Punkte N schneidet. Es ist einleuchtend, daß bey dieser Bewegung, die auf dem Scharnier liegenden Punkte K, K′ und N fest bleiben, die Berührungspunkte C, D hingegen irgendwo auf den Geraden C P, D Q, welche senkrecht auf A H sind, zu liegen kommen werden.

Aber bey der rückgängigen Bewegung der senkrechten Ebene hören die Tangenten J C K′, J D K nicht auf, durch ihre respektiven Berührungspunkte zu gehen. Nun fällt der Punkt J nach vollendeter Bewegung wiederum nach G; die zwey Tangenten projektiren sich daher nach G K′, G K, und da ebenfalls jede von ihnen die Projektion eines Berührungspunktes enthalten muß, so ergeben sich die Durchschnittspunkte R und S dieser Geraden mit den entsprechenden C P, D Q als die gesuchten Projektionen, welche überdies mit N in einer geraden Linie liegen müssen.

Wenn man die Punkte K, K′ auf die Horizontale $a\ g$ nach k, k' projektirt und die Geraden $g\ k$, $g\ k'$ zieht, so hat man die Vertikalprojektionen der zwey nemlichen Tangenten, und aus diesen ergeben sich die Punkte r und s als die Vertikalprojektionen der beyden Berührungspunkte.

Für die erste tangirende Ebene haben wir die zwey Geraden (E F, $e\ f$), und (G K, $g\ k$), und für die zweyte, die Geraden (E F, $e\ f$) und (G K′, $g\ k'$); es ist demnach leicht ihre zugehörigen Risse zu konstruiren.

163. Diese Auflösung würde weit eleganter werden, wenn man die zwey Projektionsebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen ließe; die beyden Projektionen der Kugel würden dadurch in einen und denselben Kreis zusammenfallen, und die Verlängerungen der geraden Linien weniger groß werden. Es geschah nur der größeren Klarheit wegen, daß wir die zwey Projektionen abgesondert haben.

Zweyte Auflösung.

164. Es sey (A, a) (Taf. XIII Fig. 2.) der Mittelpunkt der Kugel, (A B, $a\ b$) ihr Halbmesser, B C D die Projektion ihres größten Horizontalkreises, und (E F, $e\ f$) die gegebene Gerade. Die Ebene des großen Horizontalkreises sey verlängert, bis sie die gegebene Gerade (E F, $e\ f$) in einem Punkte (G, g) schneidet.

Dieses festgesetzt, wenn man denselben Punkt (G, g) als Scheitel einer Kegelfläche nimmt, welche die Kugel umhüllt, so erhält man durch die zwey Tangenten G C, G D, welche den Kreis C B D in den zwey Punkten C und D berühren, die Projektionen zweyer horizontalen Erzeugungslinien der Kegelfläche. Diese Fläche berührt die Kugel nach einem Kreise, dessen Diameter C D ist, dessen Ebene senkrecht auf die Axe des Kegels und folglich vertikal ist, und welcher als Horizontalprojektion die gerade C D hat.

Wenn man sich durch die Gerade (E F, $e\ f$) zwey tangirende Ebenen zu der Kegelfläche denkt, so wird eine jede auch die Kugel berühren, und zwar in einem Punkte des Vertikalkreises C D, nach welchem die Kugel selbst von der Kegelfläche berührt ist; daher sind die beyden gedachten Ebenen, diejenigen, deren Stellung zu bestimmen ist: ihre Berührungspunkte müssen sich irgendwo auf die Gerade C D projektiren, und die Gerade, welche die beyden Berührungspunkte verbindet, muß ebenfalls unbestimmt in der C D projektirt seyn.

Die Ebene des zur Vertikalebene parallelen größten Kreises, hat zur Horizontalprojektion die unbestimmte Parallelene A B zu L M, und sie schneidet die Gerade (E F, $e\ f$) in einem Punkte (H, h). Betrachten wir diesen Punkt als Scheitel einer neuen Kegelfläche, welche, so wie die Erste die Kugel umhüllt, so sind die aus h geführten Tangenten h K, h I, welche den Kreis b K I in K und I berühren, die Vertikalprojektionen ihrer äußersten Kanten. Diese zweyte Kegelfläche berührt die Kugel nach einem neuen Kreise, wovon K I der Diameter und dessen Ebene, welche senkrecht auf die Vertikalebene ist, sich unbestimmt nach der K I projektirt. Dieser Kreis geht ebenfalls durch die Berührungspunkte der Kugel mit den beyden verlangten tangirenden Ebenen, daher sind die Vertikalprojektionen dieser zwey Berührungspunkte irgendwo auf der Geraden I K, und folglich ist auch die Gerade, welche die beyden Berührungspunkte verbindet, in der nemlichen Geraden I K projektirt.

Die durch die beyden Berührungspunkte gehende Gerade, ist demnach horizontal in C D, und vertikal in I K projektirt, und sie durchneidet die Ebene des großen Horizontalkreises in einem Punkte (N, n).

165. Stellen wir uns nun vor, daß die Ebene des in C D projektirten Vertikalkreises sich um seinen horizontalen Durchmesser als Scharnier drehe, um selbst horizontal zu werden, und daß dieser bey seiner Bewegung, die beyden Berührungspunkte und die Gerade, welche dieselben verbindet, mit sich führe. Man wird diesen Kreis in seiner neuen Stellung konstruiren, wenn man über C D als Durchmesser, den Kreis C P D Q beschreibt. Die Gerade der beyden Berührungspunkte, wenn sie in ihrer neuen Stellung konstruirt ist, wird auf dem horizontalen Kreis C P D Q, durch ihr Zusammentreffen mit demselben, auch die neue Stellung jener Punkte bestimmen.

Nun aber bleibt der auf dem Scharnier C D liegende Punkt N jener Geraden unveränderlich, der Punkt, in welchem sie die Ebene des zur Vertikalebene parallelen großen Kreises durchschneidet, und dessen Projektionen O und t sind, dieser Punkt sage ich, beschreibt überdies einen Viertelsbogen eines auf C D senkrechten Vertikalkreises, dessen Halbmesser die vertikale $o\,t$ ist; wenn man daher durch O eine Gerade senkrecht auf C D zieht, und auf derselben $o\,t$ von O nach T trägt, so ist der Punkt T der Geraden der Berührungspunkte zugehörig, und folglich ist N T diese Gerade; durch ihr Zusammentreffen in P und Q mit dem Kreis C P D Q bestimmt dieselbe die beyden Berührungspunkte in ihrer auf die Horizontalebene zurückgelegten Stellung. Um die Horizontalprojektionen der nemlichen Punkte in ihrer natürlichen Stellung zu erhalten, denke man sich den Kreis C P D Q in seine ursprüngliche Lage zurückeersetzt, in dem er sich wieder um dasselbe Scharnier C D dreht. Die zwey Punkte P und Q bleiben bey dieser Bewegung in den Vertikalebenen, deren Projektionen die auf C D senkrechten Geraden R P, Q S sind; diese nemlichen Punkte müssen sich aber auch irgend wo auf die C D projektiren, daher bestimmen die Begegnungspunkte R und S dieser Geraden mit den Geraden P R und Q S die Horizontalprojektionen der beyden Berührungspunkte; und die Vertikalprojektionen derselben ergeben sich, wenn man die Punkte R, S auf die Gerade I K nach *r* und *s* projektirt.

Auch diese zweyte Auflösung würde weit gedrängter werden, wenn man die beyden Projektionsebenen durch den Mittelpunkt der Kugel führte, wodurch die zwey Projektionen auf eine und dieselbe Figur beschränkt würden.

* *
*

166. Diese letzten Betrachtungen leiten uns auf die Entdeckung mehrerer merkwürdigen Eigenschaften des Kreises, der Kugel, der Kegelschnitte und der krummen Flächen vom zweyten Grad.

Wir haben so eben gesehen, daß jede der zwey um die Kugel umschriebenen Kegelflächen dieselbe nach einem Kreise berühre, und daß diese beyden Kreise durch die zwey Berührungspunkte der Kugel mit den tangirenden Ebenen gehen. Diese Eigenschaft ist kein besonderes Eigenthum der zwey betrachteten Kegelflächen, sie kommt allen denen zu, die ihre Scheitel in der gegebenen Geraden haben, und welche gleichfalls um die Kugel umschrieben sind. Wenn man sich daher eine erste Kegelfläche denkt, die ihren Scheitel in der gegebenen Geraden hat, und um die Kugel umschrieben ist, und wenn man annimmt, diese Fläche bewege sich dergestalt, daß ihr Scheitel die Gerade durchläuft, ohne daß sie selbst aufhöre, umschrieben und berührend zur Kugel zu seyn, so wird sie in jeder Stellung die Kugel nach einem Kreise berühren; alle diese Kreise werden durch die zwey nemlichen Punkte gehen, welche die Berührungen der Kugel mit den zwey tangirenden Ebenen sind, und die Ebenen derselben Kreise werden sich sämmtlich nach einer nemlichen geraden Linie schneiden, welche jene der zwey Berührungen ist. Wenn man sich endlich die Ebene denkt, welche durch die gegebene Gerade, und durch den Mittelpunkt der Kugel geführt ist, so wird diese Ebene, die durch die Axen aller Kegelflächen geht, senkrecht auf die Ebenen aller Berührungskreise seyn, und folglich auch auf die Gerade, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt derselben ist, und sie wird alle diese Ebenen nach geraden Linien schneiden, die sämmtlich durch einen nemlichen Punkt gehen.

Umgekehrt, wenn eine Kugel und eine gerade Linie gegeben sind, und man denkt sich durch die Gerade so viele Ebenen als man will, welche die Kugel nach Kreisen schneidet, und wenn man zu jedem dieser Kreise sich eine gerade Kegelfläche denkt, von welcher derselbe die Grundlinie, und welche um die Kugel umschrieben ist, so werden die Scheitel aller dieser Kegelflächen in einer nemlichen anderen geraden Linie liegen.

167. Betrachtet man allein das, was in der Ebene vorgeht, welche durch die gegebene Gerade, und durch den Mittelpunkt der Kugel geführt ist, so wird man auf die zwey folgenden Sätze geleitet, welche die unmittelbaren Folgesätze zu dem Vorhergehenden sind.

„Es ist in einer Ebene ein Kreis gegeben, (Taf. XVI. Fig 2 et 3.) dessen Mittelpunkt „A sey, und irgend eine Gerade E C; wenn man aus einem beliebigen Punkt D dieser Geraden „zwey Tangenten zu dem Kreise zieht, und die Gerade E F, welche durch die zwey Berührungs„punkte geht, und man stellt sich vor, der Punkt D bewege sich längs der Geraden und führe die „Tangenten mit sich, ohne daß diese aufhören, den Kreis zu berühren, so werden die zwey Berüh„rungspunkte, so wie die, sie verbindende Gerade E F ihre Stellung verändern, aber diese Gerade „wird immer durch den nemlichen Punkt N gehen, welcher in der aus dem Mittelpunkt auf die „Gerade gefällten Senkrechten A G liegt."

„Umgekehrt, wenn man durch einen in der Ebene eines Kreises genommenen Punkt N, so „viele Geraden E F zieht, als man will, von denen jede den Umkreis in zwey Punkten schneidet, „und wenn man durch diese zwey Punkte zu dem Kreise zwey Tangenten E D, F D zieht, wel„che sich irgend in einem Punkte D schneiden, so wird die Reihe aller dieser auf die gleiche Art „gefundenen Durchschnittspunkte in einer nemlichen, auf A N senkrechten geraden Linie B C liegen."

168. Nicht deßwegen, weil alle Punkte eines Umkreises gleich weit vom Mittelpunkte entfernt liegen, besitzt der Kreis, die oben vorgetragene Eigenthümlichkeit, sondern weil er eine Kurve vom zweyten Grad ist, und alle Kegelschnittslinien sind in dem gleichen Falle.

In der That, es sey A B E F (Taf. XVI. Fig. 4.) irgend ein Kegelschnitt, und C D eine beliebige, in seiner Ebene gegebene Gerade: stellen wir uns vor, die Kurve drehe sich um eine ihrer Axen A B um eine Umdrehungsfläche zu erzeugen, und denken wir uns durch die Gerade C D zwey tangirende Ebenen zu dieser Fläche geführt, so wird jede dieser Ebenen ihren besonderen Berührungspunkt haben. Dieses festgesetzt, wenn man einen beliebigen Punkt H der Geraden C D als Scheitel nimmt, und sich eine Kegelfläche umschrieben und tangirend zu der Umdrehungsfläche denkt, so wird sie diese letzte Fläche nach einer Kurve berühren, welche nothwendig durch die zwey Berührungspunkte mit den tangirenden Ebenen gehen muß.

Diese Kurve wird eben seyn; ihre Ebene, welche senkrecht auf jene des gegebenen Kegelschnitts ist, wird auf diese letztere nach einer geraden Linie E F projektirt seyn, und diese Gerade wird durch die zwey Berührungspunkte des Kegelschnitts mit den durch den Punkt H gezogenen Tangenten gehen. Nehmen wir sofort an, der Scheitel H der Kegelfläche bewege sich auf der Geraden C D, ohne daß diese Fläche aufhöre umschrieben und berührend zu der Umdrehungsfläche zu seyn, so wird ihre Berührungskurve in jeder Stellung die nemlichen Eigenthümlichkeiten haben, durch die zwey Berührungspunkte mit den tangirenden Ebenen zu gehen, eben zu seyn, und ihre Ebene senkrecht auf die des Kegelschnitts zu haben. Daher werden die Ebenen aller Kurven durch die Gerade gehen, welche die beyden Berührungspunkte verbindet, und welche selbst senkrecht auf die Ebene des Kegelschnittes ist; daher endlich sind die Projektionen aller Ebenen gerade Linien, die sämmtlich durch die Projektion N der Geraden gehen, welche die beyden Berührungspunkte verbindet.

169. Endlich ist dieser Satz selbst nur ein besonderer Fall eines andern allgemeinern, welcher in den drey Dimensionen statt findet, und den wir uns vorzutragen begnügen.

„Es ist im Raum irgend eine krumme Fläche vom zweyten Grad gegeben und eine umschrie„bene Kegelfläche, die sie berührt, und deren Scheitel in irgend einem Punkte liegt; wenn sich die „Kegelfläche bewegt, ohne aufzuhören um die erste Fläche umschrieben zu seyn und dieselbe zu be„rühren, jedoch so, daß ihr Scheitel irgend eine gerade Linie durchläuft, so geht die Ebene der Be„rührungskurve der zwey Flächen immer durch eine nemliche gerade Linie (welche bestimmt ist, durch „die beyden Berührungspunkte der Fläche vom zweyten Grad mit den zwey tangirenden Ebenen, „die durch die Gerade der Scheitel gehen): und wenn die Kegelfläche sich so bewegt, daß ihr „Scheitel immer in einer Ebene bleibt, so geht die Ebene der Berührungskurve immer durch einen „nemlichen Punkt."

Herr Brianchon hat in seinem Mémoire sur les surfaces courbes du second degré den Beweis zu den vorstehenden Sätzen Monge's, so wie zu dem folgenden ganz allgemeinen Theorem gegeben:

„Es ist irgend eine krumme Fläche vom zweyten Grad gegeben, und eine umschriebene Kegel„fläche, welche sie berührt und deren Scheitel in irgend einem Punkte liegt; wenn die Kegelfläche „sich bewegt, ohne aufzuhören um die erste Fläche umschrieben zu seyn und sie zu berühren, jedoch „so, daß ihr Scheitel eine andere, willkührlich im Raume gestellte Fläche vom zweyten Grad "durchläuft, so wird die Ebene der Berührungskurve der zwey Flächen beständig eine dritte Fläche „vom zweyten Grad berühren."

Zweyte Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu führen, welche zu gleicher Zeit zwey gegebene Kugeln berührt?

170. Auflösung. Es sey (A, *a*) (Taf. XIV. Fig. 1.) der Mittelpunkt der ersten Kugel; (B, *b*) jener der zweyten; und (C, *c*) der gegebene Punkt; es sey ferner die Gerade (A B, *a b*) konstruirt, welche durch zwey Mittelpunkte geht, so wie die Projektionen G E F, *g e f*, H I K, *h i k* der zu den beyden Projektionsebenen parallelen größten Kreise beyder Kugeln. Man denke sich die Kegelfläche, welche um beyde Kugeln zugleich umschrieben ist, und sie beyde berührt. Diese Fläche muß ihren Mittelpunkt in der Geraden haben, welche durch jene der beyden Kugeln geht. Man ziehe zu den zwey Kreisen G E F, H I K, die zwey gemeinschaftlichen Tangenten E H, F K, welche sich in einem Punkt D, der Geraden A B schneiden. Dieser Punkt ist die Horizontalprojektion des Mittelpunkts der Kegelfläche, dessen Vertikalprojektion *d* auf der verlängerten Geraden *a b* liegt. Endlich ziehe man die Gerade (C D, *c d*), welche durch den Mittelpunkt des Kegels und durch den gegebenen Punkt geführt ist.

Dieses festgesetzt, so denke man sich durch jene letzte Gerade zwey tangirende Ebenen zu dem Kegel geführt; diese werden denselben nach zwey Erzeugungslinien berühren, und beyde auch tangirend zu den zwey Kugeln seyn. Die Aufgabe ist also darauf zurückgebracht, durch die Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche und durch den gegebenen Punkt geht, zwey tangirende Ebenen zu einer der beyden Kugeln zu führen, und diese beyden Ebenen sind sodann auch tangirend zu der andern Kugel.

171. Es ist hier zu bemerken, daß man sich zwey Kegelflächen um die beyden nemlichen Kugeln umschrieben denken kann. Die erste umhüllt alle beyden von Außen, und ihr Mittelpunkt liegt jenseits der einen Kugel, in Bezug auf die andere: die tangirenden Ebenen zu dieser Kegelfläche berühren jede der beyden Kugeln von derselben Seite. Die zweyte Kegelfläche umhüllt die eine Kugel von Außen und die andere von Innen, und ihr Mittelpunkt liegt zwischen jenem der beyden Kugeln. Man erhält die Horizontalprojektion D' dieses Mittelpunkts, wenn man zu den zwey Kreisen $E\ F\ G$ und $H\ I\ K$ die zwey innern Tangenten zieht, welche sich in einem Punkt der Geraden $A\ B$ schneiden; und man findet seine Vertikalprojektion, indem man den Punkt D' nach d' auf $a\ b$ projektirt. Die beyden zu dieser Kegelfläche geführten tangirenden Ebenen berühren ebenfalls eine jede der zwey Kugeln; aber sie berühren die erste von der einen Seite, und die zweyte von der Andern. Demnach können vier verschiedene Ebenen der Aufgabe Genüge thun: bey zwey von ihnen sind die beyden Kugeln auf der nemlichen Seite der Ebene; bey den zwey Andern sind sie auf verschiedenen Seiten.

Dritte Aufgabe.

Man soll eine tangirende Ebene zu drey gegebenen Kugeln führen?

172. Auflösung. Denken wir uns die tangirende Ebene zu den drey Kugeln sey geführt, und stellen wir uns eine Kegelfläche vor, welche um die beyden ersten Kugeln umschrieben ist, und sie beyde berührt; so wird die tangirende Ebene diese Kegelfläche längs einer Kante berühren, und durch ihren Mittelpunkt gehen.

Wenn man sich eine zweyte Kegelfläche denkt, welche um die erste und die dritte Kugel umschrieben ist; so wird die nemliche tangirende Ebene auch diese Fläche ebenfalls längs einer ihrer Kanten berühren und folglich durch ihren Mittelpunkt gehen. Wenn man sich endlich eine dritte Kegelfläche denkt, welche die zweyte und die dritte Kugel umfaßt und berührt, so wird die tangirende Ebene sie auch nach einer ihrer Kanten berührem und durch ihren Mittelpunkt gehen. Die Mittelpunkte der drey Kegelflächen liegen demnach in der tangirenden Ebene; aber sie liegen auch in der Ebene, welche durch die Mittelpunkte der drey Kugeln geht, und welche die drey Axen enthält: sie sind daher in gerader Linie. Es folgt hieraus, daß wenn man die Projektionen jener Mittelpunkte konstruirt, wie wir es in der vorhergehenden Aufgabe angegeben haben, so kann man durch diese Projektionen jene einer geraden Linie führen, welche in der tangirenden Ebene enthalten ist. Die Aufgabe kommt also dahin zurück, durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene zu einer beliebigen von den drey Kugeln zu führen, was mittelst der vorstehenden Methoden ausgeführt wird, und diese Ebene ist sodann tangirend zu den zwey übrigen.

173. Da man stets zu irgend zwey Kugeln, zwey Kegelflächen denken kann, welche jene beyden umhüllen und berühren, und von denen die erste ihren Mittelpunkt außerhalb der Mittelpunkte der Kugeln hat; und die zweyte den ihrigen zwischen denselben, so ist es einleuchtend, daß es in der vorstehenden Aufgabe sechs Kegelflächen gäbe, deren drey von Außen um die Kugeln, zu zwey und zwey genommen, umschrieben sind, und von denen die drey übrigen ihre Mittelpunkte zwischen den Kugeln haben. Bezeichnen wir die Mittelpunkte der drey ersten Kegelflächen mit C, C', C'', und die Mittelpunkte der letzteren mit c, c', c''. Von diesen sechs Kegeln haben die drey, welche von einer nemlichen Ebene berührt sind, ihre Mittelpunkte *in einer nemlichen* Geraden, und diese Gerade ist (Art. 172.) der Durchschnitt der tangirenden Ebene zu den drey Kugeln und der Ebene, welche durch die drey Mittelpunkte derselben geht. Die sechs Mittelpunkte C, C', C'', c, c', c'' sind überdies auf vier Geraden vertheilt. In der That müssen unter den Verbindungen jener sechs Mittelpunkte, zu drey und drey, ausgeschlossen werden; 1tens jene, in welchen sich C und c, oder C' und c', oder C'' und c'' vorfindet, weil eine und dieselbe Ebene nicht zu gleicher Zeit die zwey Kegelflächen berühren kann, welche um zwey Kugeln von Innen und von Außen umschrieben sind; 2tens jene, in welchen einer der drey Mittelpunkte c, c', c'' mit zweyen von den drey Mittelpunkten C, C', C'' verbunden vorkommt; weil eine Ebene, welche je zwey von den drey äußeren Kegeln berührt, nothwendig auch den dritten berührt; endlich die Verbindung $c\,c'\,c''$, weil die Ebene, welche zwey innere Kegel berührt, nothwendig einen äußeren berührt. Die Verbindungen der Mittelpunkte zu drey und drey, reduziren sich demnach auf folgende vier:

$$C\,C'\,C'' — C\,c'\,c'' — c\,C'\,c'' — c\,c'\,C'';$$

sie bestimmen vier Gerade, und durch jede derselben kann man zwey tangirende Ebenen zu irgend einer der drey Kugeln führen. Es giebt daher acht verschiedene Ebenen, welche der Aufgabe Genüge thun; zwey von ihnen berühren die drey Kugeln von einer

Seite; die sechs übrigen sind so gelegen, daß sie zwey Kugeln von einer, und die dritte von der entgegengesetzten Seite berühren.

* * *

174. Diese Betrachtungen führen uns auf folgenden Satz:

„Es sind drey beliebige Kreise, nach Größe und Stellung, in einer Ebene gegeben. (Taf. XIV. „Fig. 2.), wenn man, indem man sie zu zwey und zwey betrachtet, zu ihnen die äußeren Tangen„ten zieht, und diese verlängert, bis sie sich schneiden, so liegen die drey, auf diese Art erhaltenen „Durchschnittspunkte D, E, F, in gerader Linie."

Denn wenn man sich die drey Kugeln denkt, von welchen diese Kreise größte Kreise sind, und eine Ebene, welche sie alle drey von außen berührt, so berührt diese Ebene auch die drey, um die Kugeln zu zwey und zwey umschriebenen Kegelflächen, und geht durch ihre drey Mittelpunkte D, E, F. Aber diese drey Punkte D, E, F, liegen auch in der Ebene der Mittelpunkte der drey Kugeln; sie liegen daher in zwey verschiedenen Ebenen, und folglich in gerader Linie.

„Wenn man zu denselben Kreisen, zu zwey und zwey genommen, die inneren, sich durchkreu„zenden Tangenten zieht, so sind die drey neuen Durchschnittspunkte G, H, I, zu zwey und zwey „in gerader Linie mit einem der drey ersten, so daß die sechs Punkte D, E, F, G, H, I, die „Durchschnitte von vier Geraden sind."

175. Endlich ist dieser Satz nur ein besonderer Fall des folgenden, welcher in drey Dimensionen statt hat.

„Es sind vier beliebige Kugeln nach Größe und Stellung im Raume gegeben, wenn man sich „die sechs Kegelflächen denkt, welche von Außen um diese Kugeln, zu zwey und zwey genommen, „umschrieben sind, so liegen die Mittelpunkte dieser sechs Kegel in einer und derselben Ebene und „in den Durchschnitten von vier Geraden; und wenn man sich die sechs andern, von Innen um„schriebenen Kegelflächen denkt, das heißt jene, welche ihre Mittelpunkte zwischen denen von zwey „Kugeln haben, so sind die Mittelpunkte dieser sechs neuen Kegel zu drey und drey in einer Ebene „mit drey von den ersten."

Vierte Aufgabe.

Man soll durch einen willkührlich im Raume genommenen Punkt eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Cylinderfläche führen?

176. Auflösung. Es sey EIFK (Taf XV. Fig. 1.) die auf der Horizontalebene gegebene Grundlinie der Cylinderfläche; (A B, *a b*) sey eine Parallele zu der geraden Erzeugungslinie derselben, und (C, *c*) sey der Punkt, durch den die tangirende Ebene gehen soll.

Da die Berührung der verlangten Ebene und der Cylinderfläche längs einer geraden Erzeugungslinie dieser Letzteren statt findet, so muß eine durch (C, *c*) geführte Parallele zu der Geraden (A B, *a b*) nothwendig ganz in der tangirenden Ebene liegen. Wenn man daher die Projektionen C D, *c d* dieser Parallelen konstruirt, und den Begegnungspunkt derselben mit einer der Projektionsebenen, zum Beyspiel den Punkt (D, *d*) bestimmt, so wird dieser Punkt dem Risse der tangirenden Ebene auf derselben Projektionsebene angehören. Nun aber muß jeder Riß der tangirenden Ebene berührend zu dem entsprechenden Risse der Cylinderfläche seyn; man hat daher nur durch D alle zu der Kurve E I F K möglichen, Tangenten D E, D F zu ziehen, um die Horizontalrisse aller tangirenden Ebenen zu erhalten, die durch den gegebenen Punkt zu der Cylinderfläche geführt werden können. Indem man die Berührungspunkte E, F der gefundenen Risse auf die Projektionsaxe nach *e* und *f* projektirt, sodann durch (E, *e*), (F, *f*) zu der (A B, *a b*) die Parallelen (E G, *e g*), (F H, *f h*) zieht, hat man die geraden Erzeugungslinien, nach welchen die verschiedenen tangirenden Ebenen die Cylinderfläche berühren.

Zur Vervollständigung der Zeichnung bestimme man noch die Risse der gefundenen tangirenden Ebenen auf der Vertikalebene, und in beyden Projektionen die geraden Begränzungslinien der Cylinderfläche wie bey der Aufgabe 1. Kap. II.

Fünfte Aufgabe.

Man soll parallel zu einer bekannten Geraden eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Cylinderfläche führen?

177. Auflösung. Die Grundlinie der Cylinderfläche sey die auf der Horizontalebene gegebene Kurve C D E (Taf. XV. Fig. 2.). (E F, *e f*) sey eine ihrer geraden Erzeugungslinien; und (A B, *a b*) sey die gegebene Gerade, zu welcher die tangirende Ebene parallel seyn soll.

Durch einen beliebigen Punkt (L, *l*) der gegebenen Geraden (A B, *a b*) führe man eine Parallele (L M, *l m*) zu der Erzeugungslinie des Cylinders, und man konstruire die Risse A M, *b l'* einer durch diese beyden Geraden geführten Ebene.

Man wird leicht einsehen, daß die verlangte tangirende Ebene parallel zu dieser letztgenannten Ebene seyn müsse, und ihre Risse daher wechselsweise parallel zu A M und *b l'*; denn jene Ebene soll einmal parallel seyn, zu der gegebenen Geraden, und da sie auch eine gerade Erzeugungslinie des Cylinder enthalten muß, so kann sie nur parallel zu der durch (A B, *a b*) und parallel zu der Erzeugungslinie des Cylinders geführten Ebenen seyn.

Ueberdies müssen die zu A M und $b\ l'$ parallelen Risse der gesuchten Ebene, die respektiven Risse der Cylinderfläche berühren; wenn man daher zu der Kurve C D E und parallel zu A B alle möglichen Tangenten G C, H D..... ꝛc. zieht, so hat man eben so viele Horizontalrisse tangirender Ebenen zu dem Cylinder, die sämmtlich parallel zu der Geraden (A B, $a\ b$) sind. Der noch übrige Theil der Auflösung ist ganz derselbe wie bey der vorhergehenden Aufgabe und er bedarf daher keiner weiteren Erklärungen.

Sechste Aufgabe.

Durch einen außerhalb einer Kegelfläche genommenen Punkt, soll eine tangirende Ebene zu dieser Fläche geführt werden?

178. Auflösung. E G F H (Taf. XVI. Fig. 1.) sey die auf der Horizontalebene gegebene Grundlinie der Kegelfläche; (A, a) ihr Mittelpunkt und (C, c) der Punkt, durch den die tangirende Ebene gehen soll.

Da alle tangirenden Ebenen einer Kegelfläche durch den Mittelpunkt der Fläche gehen, so verbinde man diesen Mittelpunkt (A, a) und den gegebenen Punkt (C, c) durch eine Gerade (A C, $a\ c$). Diese Gerade, welche demzufolge ganz der gesuchten Ebene angehört, trifft die horizontale Projektionsebene, auf welcher die Grundlinie des Kegels gegeben ist in einem Punkt (D, d), und dieser ist sonach ein Punkt des Horizontalrisses derselben Ebene. Wenn man daher durch den Punkt D so viele Tangenten D E, D F... an den Riß E G F H zieht, als deren zuläßig sind, so erhält man dadurch die Horizontalrisse aller tangirenden Ebenen, welche der Aufgabe Genüge leisten können. Diese Risse treffen die Projektionsaxe in L und H, und da die Gerade (A C, $a\ c$) die Vertikalebene in (D′, d') trifft, so sind die Geraden L d', H d', die Vertikalrisse derselben tangirenden Ebene.

Indem man die Berührungspunkte E, F der Basis des Kegels mit den Rissen der tangirenden Ebenen auf die Projektionsaxe nach e, f projektirt, und die Geraden (E A, $e\ a$), (F A, $f\ a$) zieht, wodurch man die Berührungslinien der Kegelfläche mit den tangirenden Ebenen bekommt, so findet man durch die Begegnungspunkte e', f' dieser Geraden mit der vertikalen Projektionsebene; ebenfalls zwey Punkte der Risse L d', H d', und zugleich ein Prüfungsmittel für die Genauigkeit der Kostruktion.

Wie bey der analogen Aufgabe über die tangirenden Ebenen zu dem Cylinder bestimme man auch hier auf beyden Projektionsebenen, die Projektionen der äußersten Erzeugungslinien nach dem Verfahren des Art. 83. Kap. II. um die Zeichnung zu vollenden.

Siebente Aufgabe.

Man soll parallel zu einer bekannten Geraden eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Kegelfläche führen?

179. Auflösung. Man führe durch den Mittelpunkt der Kegelfläche eine Parallele zu der gegebenen Geraden. Durch einen beliebig genommenen Punkt dieser Parallelen, zum Beyspiel, durch den Punkt, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet, führe man, nach der vorhergehenden Aufgabe, eine tangirende Ebene zu der Kegelfläche. In der, auf diese Weise gefundenen tangirenden Ebene wird die Parallele zu der gegebenen Geraden ganz enthalten seyn, und diese Ebene ist daher die verlangte.

Wenn man durch den Punkt, in welchem die Parallele die Horizontalebene trifft, mehrere tangirende Ebenen zu der Kegelfläche führen kann, so entsprechen diese sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe.

Wir überlassen dem Leser die Ausführung der angegebenen Konstruktionen, die nach dem vorhergehenden durchaus keine Schwierigkeit darbieten.

Achte Aufgabe.

Durch eine gegebene Gerade soll eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Umdrehungsfläche geführt werden?

Erste Auflösung (Taf. XVII.)

180. Wir nehmen die horizontale Projektionsebene senkrecht auf die Drehungsaxe an, wodurch unbeschadet der Allgemeinheit der Auflösung die Konstruktionen vereinfacht werden. Es sey demnach L M (Taf. XVII.) der Durchschnitt der Projektionsebene; (A, $a\,a'$) die Axe der Umdrehungsfläche. $i\,k\,o \ldots,$ sey die Vertikalprojektion des Erzeugungsmeridians, dessen Ebene L′ A M′ parallel zur vertikalen Projektionsebene ist; (B C, $b\,c$) sey die gegebene Gerade. Aus dem Punkt A sey auf B C die Senkrechte A D gefällt, welches die Horizontalprojektion der kürzesten Entfernung der Axe und der gegebenen Geraden ist, und der Punkt D sey nach d auf die Gerade $b\,c$ projektirt.

Dieses festgesetzt, stellen wir uns vor, die tangirende Ebene sey geführt; und nehmen wir an, die gegebe Gerade drehe sich um die Axe (A, $a\,a'$), ohne weder ihre Entfernung von dieser Axe, noch ihrer Neigung gegen die Horizontalebene zu verändern, und sie zöge die tangirende Ebene mit sich, so daß diese immer die Fläche berühre. Es ist einleuchtend, daß vermöge dieser Bewegung der Berührungspunkt der Fläche und der Ebene die Stellung verändern werde; aber da die tangirende Ebene stets die gleiche

Neigung beybehält, so verändert der Berührungspunkt seine Höhe auf der Fläche nicht, und er wird sich in dem Umfange eines Parallelkreises der Fläche bewegen. Ueberdies wird die gegebene Gerade durch ihre Bewegung um die Axe ein Umdrehungshyperboloid von einem Netze erzeugen, zu welchen die tangirende Ebene in allen ihren Stellungen tangiremd ist, weil sie immer durch eine Erzeugungslinie der Fläche geht. (Art. 136.)

Denken wir uns nun durch den Berührungspunkt der tangirende Ebene mit der ersten Fläche eine Meridianebene geführt, so wird diese Ebene, welche senkrecht auf die tangirende Ebene seyn muß, (Art. 89.) die gerade Erzeugungslinie des Hyperboloids in einem Punkt durchschneiden, welcher der Berührungspunkt dieser Fläche mit derselben tangirenden Ebene ist.

181. Da die Aufgabe mittelst der zweyten Umdrehungsfläche gelößt werden soll, so ist es vorerst erfoderlich, den Schnitt dieses Hyperboloids durch die zur vertikalen Projektionsebene parallele Meridianebene L′ A M′ zu konstruiren.

Es sey auf der gegebenen Geraden irgend ein Punkt (E, e) genommen: suchen wir den Punkt, in welchem derselbe, in seiner Bewegung, auf die Ebene des Schnittes trifft. Der Punkt (E, e) wird sich in dem Umfange eines horizontalen Kreises bewegen, dessen Mittelpunkt auf der Axe (A, $a\,a'$) liegt, und dessen Horizontalprojektion man erhält, indem man aus dem Punkt A als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser A E einen Kreisbogen E F E′ beschreibt, welcher von der Geraden L′ M′ in zwey Punkten wie F geschnitten wird. Die Vertikalprojektion desselben Bogens ergiebt sich, wenn man durch den Punkt e die unbestimmte Horizontale $e\,f$ zieht.

Da nun die Begegnungspunkte des Bogens (E F E′, $e\,f$) mit der Ebene des Schnittes horizontal in F.. projektirt sind, so bestimme man ihre Projektionen f.. auf der Vertitalebene, und man hat die Projektionen eben so vieler Punkte des Schnittes. Wiederholt man dieses Verfahren bey einer beliebigen Anzahl anderer Punkte der gegebenen Geraden, so erhält man eben so viele Punkte f, g, p, n.... ꝛc., durch welche man die zwey Zweige $f\,p\,g$, $f\,p\,g$ gehen läßt, und man hat die Vertikalprojektion des gesuchten Meridianschnittes.

182. Nachdem dieses geschehen, nehmen wir an, daß die gegebene Gerade und die tangirende Ebene durch ihre gleichzeitige Rotation um die Axe in eine solche Stellung gekommen seyen, worinn die tangirende Ebene senkrecht auf die vertikale Projektionsebene wäre. In dieser Stellung wird ihre Projektion auf derselben Ebene eine gerade Linie seyn, und diese Gerade wird zu gleicher Zeit Tangente seyn, zu den zwey krummen Linien $f\,g\,p$, $i\,k\,o$. Wenn man daher zu diesen zwey Krummen die gemeinschaftlichen Tangenten $p\,i$, $n\,k$ zieht, so hat man die Projektionen aller tangirenden Ebe-

nen, welche der Aufgabe Genüge thun, und zwar in der Stellung betrachtet, wenn sie durch die Rotation nacheinander senkrecht auf die Vertikalebene geworden sind. Die Berührungspunkte *i*, *k* dieser Tangenten mit der Erzeugungslinie der ersten Fläche bestimmen die Höhen der Berührungspunkte dieser Fläche mit allen tangirenden Ebenen. Wenn man folglich durch diese Punkte die unbestimmten Horizontalen *i i*, *k k* zieht, so enthalten diese die Vertikalprojektionen der Berührungspunkte der Fläche mit den Ebenen; und wenn man aus A als Mittelpunkt Kreisbögen R K, I Q von Durchmessern gleich *i i* und *k k* beschreibt, so werden diese Bögen die Horizontalprojektionen derselben Punkte enthalten.

Auf gleiche Weise geben die Berührungspunkte *n*, *p* die Höhen und respektiven Durchmesser der Parallelkreise des Umdrehungshyperboloids an, in welchen die Berührungspunkte dieser letzten Fläche mit den gesuchten tangirenden Ebenen enthalten seyn müssen. Diese Parallelkreise haben als Vertikalprojektionen die Horizontalen *p h*, *n j*, und man erhält ihre Horizontalprojektionen, wenn man die Punkte *n*, *p* auf die L′ M′ nach N, P projektirt, und aus A als Mittelpunkt und mit den Halbmessern A P, A N nacheinander die Kreisbögen P H, N J zieht.

Aber die Berührungspunkte des Hyperboloids und der gesuchten Ebenen liegen nicht nur auf den eben beschriebenen Parallelkreisen; sie müssen auch auf der gegebenen Geraden liegen, und sie sind daher bestimmt, durch das Zusammentreffen der Geraden (B C, *b c*) und der Kreisbögen (P H, *p h*), (N J, *n j*) in den Punkten (H, *h*), (J, *j*).

Die Meridianebenen, welche durch diese Berührungspunkte, (H, *h*), (J, *j*) des Hyperboloids und der gesuchten tangirenden Ebenen gehen, haben als Horizontalprojektionen die Geraden A H, A J, und die Stellung dieser letzten Ebenen ist durch die zwey Bedingungen bestimmt, durch die gegebene Gerade (B C, *b c*) zu gehen, und senkrecht auf die Meridianebenen A H, A J zu seyn.

Nun aber liegen die Berührungspunkte der gegebenen Umdrehungsfläche und der gesuchten tangirenden Ebenen in den Meridianebenen A H, A J, welche durch die entsprechenden Berührungspunkte mit dem Hyperboloid geführt sind, und da sie auch auf den Parallelkreisen liegen, deren Horizontalprojektionen die Bögen Q I, R K sind, so sind die Punkte Q, R; in welchen diese letzten Bögen von den Geraden A H, A J geschnitten werden, die Horizontalprojektionen der Berührungspunkte der gegebenen Umdrehungsfläche und der gesuchten, durch die Gerade (B C, *b c*) gehenden tangirenden Ebenen. Die Vertikalprojektionen derselben Punkte ergeben sich, wenn man die Punkte Q, R auf die entsprechenden Horizontalen *k k*, *i i* nach *q* und *r* projektirt.

Diese Methode kann leicht verallgemeinert und auf Flächen angewendet werden, die durch krumme Linien erzeugt sind, von beständiger Gestalt und von veränderlicher Stellung im Raume.

183. Zusatz zu vorstehender Auflösung. *)

Wir haben angenommen, daß jede der beyden Tangenten $p\ i$, $n\ k$ durch ihre Berührungspunkte auf den Meridianschnitten der gegebenen Umdrehungsfläche und des Umdrehungshyperboloids bestimmt wäre. In der Praxis der Zeichnungskunst zieht man diese Tangenten, indem man ein Lineal tangirend an die beyden gegeben Kurven anlegt.

Die erste so gezogene Tangente trifft die Axe der beyden Umdrehungsflächen in dem Punkt v. (er liegt in unserer Figur nicht mehr innerhalb der Zeichnung). Betrachtet man diesen Punkt als den Scheitel eines geraden Kegels, welcher durch die, um die Axe (A, $a\ a'$) sich drehende Gerade $p\ i$ erzeugt wird, so ist die tangirende Ebene zu diesem Kegel, welche durch die gegebene Gerade geführt ist, die gesuchte Ebene **). Nun aber hat dieser Kegel als Basis auf der Horizontalebene den Kreis W H′, welcher aus dem Mittelpunkt A beschrieben ist, und mit einem Halbmesser A W, gleich der Entfernung des Mittelpunktes von dem Punkte W, in welchem die Tangente (A W, $v\ ip$) der Horizontalebene trifft. Daher hat die verlangte tangirende Ebene als Horizontalriß die Tangente B H′ zu dem Umkreise W H′ ***). Die zweyte verlangte tangirende Ebene hat als Horizontalriß die Tangente B J′ zu dem Umkreise Y J′, welcher aus A als Mittelpunkt beschrieben ist, und mit einem Halbmesser A Y, gleich dem Abstande des Mittelpunktes A von dem Durchschnittspunkt (Y, y), der Tangente ($n\ k\ y$, A N Y) und der Horizontalebene. Die Ebenen, welche durch die gegebene Gerade tangirend zu den zwey geraden Kegeln geführt sind, berühren diese nach den Geraden, welche als Horizontalprojektionen A H′, A J′ haben. Diese Geraden A H′, A J′ sind auch die Risse

*) Man sehe Hachette, Traité de géométrie descriptive. Livre II. Probl. 6.

**) Daß man durch diese Gerade (B C, $b\ c$) eine tangirende Ebene zu dem Kegel führen könne, ist leicht einzusehen, denn die Gerade (B C, $b\ c$) berührt den Kegel offenbar in dem Punkte (H, h) des durch (p, P) gehenden Parallelkreises, welcher dem Hyperboloid und dem geraden Kegel gemeinschaftlich ist.

***) Durch den Punkt (B, b), in welchem die gegebene Gerade die Horizontalebene trifft, kann man zwey Tangenten zu dem Kreise W H′ ziehen; die zweyte Tangente aber wäre der Riß einer tangirenden Ebene zu der vorgelegten Fläche, welche durch die gerade Erzeugungslinie des Hyperboloids gienge, deren Horizontalprojektion die Tangente C D′ zu dem Kreise D G D′ wäre.

von vertikalen Meridianebenen, welche die Berührungspunkte der gegebenen Fläche und der verlangten Ebenen enthalten. Sind diese Meridianebenen bekannt, so konstruire man die Punkte (J, j), (H, h), wo sie die gegebene Gerade (B C, $b\ c$) schneiden, und ziehe sodann die Horizontalen $i\ n$, $h\ p$, so treffen diese die Tangenten $i\ p$, $k\ n$ in den Punkten n und p des hyperbolischen Zweiges $f\ p\ g\ n$.

Die tangirenden Ebenen zu der vorgelegten Fläche, deren Horizontalrisse B H′ B J′ bekannt sind, berühren diese Fläche in den Punkten (K, k), (Q, q), welche man bestimmt, wenn man durch die Punkte (H′, h'), (J′, j') die Tangenten zu den Meridianschnitten der Ebenen H′ A, J′ A zieht.

Es zu bemerken, daß, nachdem man die Punkte H′, O′ auf die Gerade L M nach h', o' projektirt hat, die vier Punkte h', h, q, v auf der nemlichen geraden Linie liegen müssen. Es verhält sich eben so mit den vier Punkten y, x, r, j, die auf der nemlichen Geraden y x liegen müssen.

Diese Auflösung, obgleich weniger scharf als die Vorhergehende, ist jedoch in der Praxis der geometrischen Zeichnung ganz anwendbar.

184. Wir haben als Horizontalrisse der tangirenden Ebenen an den Punkten (Q, q), (R, r) der Umdrehungsfläche die Geraden B J′, B H′ gefunden; ihre Risse auf der, zur Vertikalebene parallelen Meridianebene L′ M′ gehen durch schon konstruirte Punkte. In der That schneidet diese Meridianebene die gegebene Gerade in dem Punkt (S, s); die Tangente zu dem Meridianschnitt, welcher durch den Berührungspunkt (Q, q) geht, trifft die Umdrehungsaxe in dem Punkt (v, A), welcher in der Meridianebene L′ M′ liegt, daher ist die Gerade $v\ s$ auf dieser Ebene der Riß der tangirenden Ebene am Punkt (Q, q) der gegebenen Fläche. Diese verlängerte Gerade v s geht durch den Punkt w, der Vertikalprojektion des Punkts W, in welchen die Meridianebene L′ M′ den Horizontalriß B H′ der tangirenden Ebene schneidet. Von diesen drey Punkten v, s, w sind zwey hinreichend, um den Riß der ersten tangirenden Ebene auf der Meridianebene L′ M′ zu bestimmen. Was den Riß $s\ x$ der zweyten tangirenden Ebene an dem Punkt (R, r) der Umdrehungsfläche betrifft, so ist dieser ebenfalls durch die Projektionen s, x, t dreyer Punkte bestimmt, von denen der Erste auf der gegebenen Geraden liegt, der Zweyte in dem Durchschnitt der Umdrehungsaxe und der Tangente zu dem Meridianschnitt am Berührungspunkt (R, r), und der Dritte, in dem Zusammentreffen der Horizontalrisse B J′, L′ M′ der tangirenden Ebenen und der Meridianebene L′ A M′.

In Bezug auf das gewählte Beyspiel einer ringförmigen Umdrehungsfläche, müssen wir schließlich noch bemerken, daß die beyden tangirenden Ebenen, deren Risse und Berührungspunkte wir bestimmt haben, nicht die Einzigen sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügen; denn da der Meridianschnitt dieser Fläche aus zwey abgesonderten Zweigen besteht, so lassen sich zu den beyden Kurven *f p g..*, *i k o..*, außer den Geraden *p i*, *n k* noch zwey andere gemeinsame Tangenten ziehen, welche zwey, auf entgegengesetzten Seiten der Umdrehungsaxe liegende Zweige jener Kurven berührten. Diese letzten Tangenten würden die Stellungen zweyer anderer, durch (B C, *b c*) gehender Ebenen bestimmen, welche die ringförmige Umdrehungsfläche in zwey Punkten ihrer Kehle berührten, und welche deßhalb zugleich auch durchschneidend zu der Fläche wären.

Zweyte Auflösung. (Taf. XVIII.)

185. Die Betrachtungen, auf welche sich die zweyte Auflösung der ersten Aufgabe d. Kap. gründet, lassen sich allgemein auf die Aufgabe anwenden: durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene zu irgend einer krummen Fläche zu führen. Denn wenn man annimmt, die tangirende Ebene sey geführt, so wird man leicht einsehen, daß diese Ebene auch alle Kegelflächen berühren müsse, welche um die krumme Fläche umschrieben sind, und welche ihre Scheitel auf der gegebenen Geraden haben. Es folgt aber hieraus, daß die Berührungslinien der krummen Fläche und der umschriebenen Kegelflächen sämmtlich durch den Berührungspunkt der Fläche und der tangirenden Ebene gehen müssen, und daß man daher, um jenen Punkt zu finden nur nöthig habe, die Berührungslinien der Fläche und zweyer Kegel zu konstruiren, welche um die Fläche umschrieben sind, und welche ihre Scheitel auf der gegebenen Geraden haben. Die Punkte, in denen sich jene Linien selbst begegnen, sind die Berührungspunkte aller tangirenden Ebenen, welche durch die gegebene Gerade zu der vorgelegten krummen Fläche geführt werden können.

186. Um diese letzte Aufgabe in dem Falle zu lösen, wenn die vorgelegte Fläche eine Umdrehungsfläche ist, erinnern wir uns, daß die Umdrehungsflächen die Umhüllungen des Raumes sind, den ein gerader Kegel oder eine Kugel, beyde von veränderlicher Gestalt und Stellung, oder ein Cylinder, nur von veränderlicher Stellung durchläuft. (Art. 110.) Betrachten wir zuerst den geraden Kegel, welcher als Axe die Umdrehungsaxe hat, und dessen Erzeugungslinie eine Tangente zu dem Meridian der Fläche ist. Die Charakteristik der Umhüllung dieses beweglichen Kegels ist ein Kreis, und jede tangirende Ebene zu dem Kegel ist auch tangirend zu der Umdrehungsfläche; wenn man daher durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punkt A eine tangirende Ebene zu dem geraden Kegel führt, so berührt diese die Fläche in dem Punkt, in welchem die Berührungskante, die diesem Kegel entsprechende Charakteristik durchschneidet, und die Gerade, welche durch den Berührungspunkt und durch den Punkt A geht, ist offenbar eine Erzeugungslinie des zu der Umdrehungs-

fläche umschriebenen Kegels, dessen Scheitel in A ist. Auf dieselbe Art kann man jede beliebige Zahl Erzeugungslinien dieses letzten Kegels bestimmen; die Punkte, in denen sie die Umdrehungsfläche berühren, gehören der Berührungslinie dieser Fläche mit der ihr umschriebenen Kegelfläche an, deren Scheitel in A ist. Wenn man daher auf der gegebenen Geraden zwey Punkte nimmt, und die Kegelflächen konstruirt, welche diese Punkte als Scheitel haben, und welche um die Umdrehungsfläche umschrieben sind, so bestimmen die Durchschnitte der Berührungslinien der Kegel und der Umdrehungsfläche die Punkte, durch welche die verlangten tangirenden Ebenen gehen müssen.

Die Kugel, welche die Umdrehungsfläche nach einer kreisförmigen Charakteristik berührt, leitet zu dem nemlichen Resultat. Denn der Punkt auf der gegebenen Geraden, kann als Scheitel eines Kegels betrachtet werden, welcher die Kugel nach einem kleinen Kreise berührt. Dieser kleine Kreis und jener, nach welchem die Kugel die Umdrehungsfläche berührt, schneiden sich im Allgemeinen in zwey Punkten. Wenn man durch diese Punkte tangirende Ebenen zu der Kugel führt, so sind diese Ebenen auch zu der Umdrehungsfläche tangirend; da sie aber durch den auf der gegebenen Geraden genommenen Punkt gehen, so berühren sie die Umdrehungsfläche in Punkten, welche der Berührungslinie dieser Fläche mit der umschriebenen Kegelfläche angehören, deren Mittelpunkt auf der gegebenen Geraden genommen ist.

Da die Umdrehungsfläche die Umhüllung des Raumes ist, den ein Cylinder von unveränderlicher Gestalt durchläuft, dessen Grundlinie ein Meridianschnitt und dessen Erzeugungslinien senkrecht auf die Ebene dieses Schnittes ist, so kann man ebenfalls durch einen gegebenen Punkt außerhalb der Umdrehungsfläche tangirende Ebenen zu diesem Cylinder führen, und die Berührungskanten bestimmen: diese Kanten treffen den Meridian in Punkten, welche der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und der Kegelfläche angehören, deren Mittelpunkt außerhalb der ersten Fläche gegeben wurde.

187. Es sey nun (A, $a\,a'$) (Taf. XVIII.) die vertikalstehende Axe der Umdrehungsfläche; in einer zur vertikalen Projektionsebene parallele Meridianebene $A\;G$ sey die Ellipse $a\;o\;a'\;o'$ deren große Axe mit der Vertikalprojektion $a\;a'$ der Umdrehungsaxe zusammenfällt, als Erzeugungsmeridian der Fläche gegeben; und ($B\;C$, $b\;c$) sey die gegebene Gerade, auf welcher ein Punkt (E, e) genommen sey, um als Scheitel eines um die Umdrehungsfläche umschriebenen Kegels zu dienen.

Nachdem man die Umdrehungsfläche durch eine Ebene $d\;d'$ senkrecht auf die Axe geschnitten hat, ziehe man an dem Durchschnittspunkt (D', d') des Meridians $a\;o\;a'\;o'$ mit der Horizontalebene $d\;d'$ die Tangente ($D'\;A$, $d'\;s$) zu diesem Meridian.

Diese Tangente schneidet die Axe (A, $a\,a'$) in einem Punkt (A, s); man nehme diesen Punkt als Scheitel eines geraden Kegels, welcher die Fläche nach dem Kreise vom Durchmesser $d\,d'$ berührt, und jede tangirende Ebene zu diesem Kegel wird auch berührend zu der Umdrehungsfläche seyn. Um eine solche Ebene durch den Punkt (E, e) zu führen, verbinde man diesen Punkt und den Scheitel (A, s) des geraden Kegels durch die Gerade ($A\,E$, $s\,e$), welche Gerade die Horizontalebene $d\,d'$ in einem Punkt (F, f) schneidet. Aus dem Punkt A als Mittelpunkt beschreibe man mit einem Durchmesser $D\,D'$ gleich $d\,d'$ einen Kreis $D\,I\,D'$, und ziehe aus dem Punkt F die Tangenten $F\,J$, $F\,J'$ an derselben; die Berührungspunkte J, J' dieser Tangenten projektire man auf die Vertikalebene nach j, j', so gehören die Punkte (J, j), (J', j') der Berührungslinie der gegebenen Umdrehungsfläche mit dem Kegel, dessen Scheitel in dem Punkt (E, e) der gegebenen Geraden liegt.

188. Man bemerkt hier, daß der Kreis vom Durchmesser $d\,d'$ keine Punkte der gesuchten Berührungslinie mehr enthalten könne, sobald der Punkt (F, f) innerhalb seines Umfanges fällt. Um aber nutzlose Konstruktionen zu vermeiden, ist es nothwendig, die Gränze der Kreise zu suchen, welche Punkte der Berührungslinie enthalten. Zu diesem Zwecke ziehe man aus dem Punkt (E, e) die Tangenten zu dem Meridian, dessen Ebene durch diesen Punkt geht. Die Parallelkreise der Umdrehungsfläche, welche durch die Berührungspunkte jener Tangenten gehen, sind die Gränzen der Kreise, welche Punkte der gesuchten Berührungslinie enthalten.

Lassen wir die Meridianebene $A\ E$ eine Drehung um die Axe, von einem Bogen gleich $E\,G$ machen, um diese Ebene auf die Meridianebene $A\ G$ zurücklegen, wodurch der Punkt (E, e) die Stellung (G, g) auf der Horizontalen ($A\,E$, $e\,g$) nehmen wird. Durch den Punkt g ziehe man zwey Tangenten zu dem Meridian $a\,o\,a'\,o'$; und durch die Berührungspunkte i, i' führe man zwey Ebenen senkrecht auf die Axe (A, $a\,a'$); diese Ebenen schneiden die Umdrehungsfläche nach den begränzenden Kreisen der gesuchten Linie. Nimmt man die Abstände der Punkte i, i' von der Axe $a\,a'$, welche Abstände auf den Horizontalen $i\,k$, $i'\,k'$ gemessen werden, und trägt sie auf dem Meridian $A\ E$ von A nach K und K', projektirt sodann den Punkt K auf die Vertikalebene nach k, und den Punkt K' nach k', so sind (K, k), (K', k') die äußersten Punkte der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Kegels, welcher seinen Scheitel in den Punkt (E, e) der gegebenen Geraden hat.

189. Um die vortheilhafteste Reihenfolge der graphischen Operationen zu beobachten, wird es gut seyn, von allen übrigen zuerst die Punkte (M, m) und (M', m') zu bestimmen, welche auf dem größten Parallelkreis ($O\ A'\ O'$, $o\,o'$) der Umdrehungsfläche

liegen. Nachdem man die Horizontalprojektion O A′ O′ dieses Kreises konstruirt, betrachte man dieselbe als Grundlinie eines vertikalen Cylinders, welcher die Umdrehungsfläche nach eben diesem Kreise (A′ O O′, $o\ o'$) berührt. Die zwey tangirenden Ebenen zu diesem Cylinder, deren Horizontalrisse die Geraden E M, E M′ sind, berühren die Umdrehungsfläche offenbar in den zwey Punkten (M, m), (M′, m'), und diese gehören daher der Berührungslinie des Kegels, dessen Scheitel in (E, e) ist und der Umdrehungsfläche an.

Der Meridian (O O′, $a\ o\ a'\ o'$) kann als Grundlinie eines geraden horizontalen Cylinders betrachtet werden, der um die Umdrehungsfläche umschrieben ist; wenn man daher die Tangenten $e\ l$, $e\ l'$ zieht, so berühren die tangirenden Ebenen zu dem Cylinder, deren Risse auf der Vertikalebene diese Tangenten sind, die Umdrehungsfläche in den Punkten, deren Projektionen l und L, l' und L′ sind, und welche ebenfalls der Berührungslinie angehören.

Nachdem man die sechs Punkte K, K′, L, L′, M, M′ der Horizontalprojektion der Berührungslinie bestimmt hat, und die sechs Punkte k, k', l, l', m, m' der Vertikalprojektion derselben Linie, konstruire man die Zwischenpunkte, nach der Methode, welche man angewendet hat, um die Punkte (J, j), (J′, j') zu bestimmen.

190. Bisher wurde die Umdrehungsfläche als die Umhüllung des Raumes betrachtet, den ein gerader Kegel durchläuft, welcher die Tangenten zu einem Meridian nacheinander als Erzeugungslinien hatte. Wir wollen nun statt der Kegel Kugeln anwenden, welche zu Halbmessern die Stücke der Normalen zu dem Meridianschnitte haben, die zwischen dem Meridian und der Drehungsaxe gefaßt sind.

(A, t) sey der Mittelpunkt einer von diesen Kugeln, die Normale $d\ t$ ihr Halbmesser und $d\ u\ d'\ v$ die Projektion eines ihrer größten Kreise. Die Meridianebene A E schneidet diese Kugel nach einem großen Kreise, und wenn man diese Meridianebene in die Stellung A G zurückgelegt annimmt, so fällt der Punkt (E, e) nach (G, g). Zieht man daher durch g die Tangenten $g\ u$, $g\ v$ zu dem Kreise $d\ u\ d'\ v$, so ist die Gerade $u\ v$ der Durchmesser des Berührungskreises der Kugel und des geraden Kegels, dessen Scheitel in (E, e) ist. Dieser Kreis der Kugel und die Charakteristik (D J D′, $d\ d'$), nach welcher sie die Umdrehungsfläche berührt, schneiden sich nach einer horizontalen Geraden, welche senkrecht auf die Meridianebene A E, und unbestimmt in der Geraden $d\ d'$ projektirt ist; wenn man daher den Abstand des Punktes x' von der Axe $a\ a'$ von A nach x trägt, so ist die Senkrechte J x J′ auf die Gerade A E die Horizontalprojektion jener nemlichen Geraden. Der Durchschnitt der Senkrechten J x J′ mit dem aus

A als Mittelpunkt, und mit einem Durchmesser D D′ gleich *d d′* beschriebenen Kreise, bestimmt die Punkte J′, J der Horizontalprojektion der gesuchten Berührungslinie.

Errichtet man die Vertikalen J′ *j′*, J *j*, welche die Horizontale *d d′* in den Punkten *j′*, *j* treffen, so gehören diese letzten Punkte der Vertikalprojektion der Berührungslinie. Auf dieselbe Art läßt sich die erfoderliche Anzahl weiterer Punkte dieser Linie bestimmen.

191. Betrachten wir nun die Umdrehungsfläche als die Umhüllung des Raumes, den ein gerader Cylinder durchläuft, welcher nacheinander sämmtliche Meridianen zur Grundlinie hat, und suchen wir nach dieser Hypothese einen Punkt der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Kegels, dessen Scheitel in (E, *e*) ist.

A N sey der Horizontalriß irgend einer Meridianebene, (N, *n*) der Fuß der Senkrechten, welche aus dem Punkt (E, *e*) auf diese Meridianebene A N gefällt ist. Nachdem man die Meridianebene A N um die Axe gedreht hat, bis in die, zur Vertikalebene parallele Stellung A G, so wird der Punkt (N, *n*) die Stellung (N′, *n′*) nehmen. Durch *n′* ziehe man die Tangente *n′ p′* zu dem Meridian, und man trage die Entfernung *p′ q* des Berührungspunktes *p′* von der Axe *a a′* auf dem Risse A N von A nach P. Der Punkt P und sein entsprechender *p*, welcher auf der Horizontalen *p′ q* liegt, sind die Projektionen eines Punkts der gesuchten Linie. Die Tangente *n′ p* ist der Riß einer tangirenden Ebene zu dem Cylinder, dessen Basis die Meridianlinie, und dessen Kanten senkrecht auf die Ebene dieser Linie sind.

Es ist einleuchtend, daß diese letzte Verfahrungsart so viele Punkte der gesuchten Linie gebe, als man aus dem Punkt *n′* Tangenten zu der Kurve *a o a′ o′* führen könne.

192. Nachdem man auf der Geraden (B C, *b c*) einen zweyten Punkt, ober- oder unterhalb des Ersten (E, *e*) genommen, betrachte man denselben als Scheitel eines zweyten um die Umdrehungsfläche umschriebenen Kegels und bestimme die Berührungslinie dieser beyden Flächen nach den so eben vorgetragenen Methoden. Diese zweyte Berührungslinie wird die erste in einem oder mehreren Punkten schneiden, und die Ebenen, welche durch jeden dieser Punkte und durch die gegebene Gerade geführt werden, berühren die Umdrehungsfläche in eben diesen Punkten.

Statt der zweyten Kegelfläche, welche die Umdrehungsfäche umhüllt, kann man eine Cylinderfläche anwenden, deren Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind; die Berührungslinie dieser Fläche und der Umdrehungsfläche enthält offenbar die Berührungspunkte, durch welche die tangirenden Ebenen geführt werden müssen. Das Verfahren, wodurch wir diese letzte Linie bestimmen werden, ist nichts weiter als eine Modifikation des so eben erst angewendeten. Denn in der That, wenn man den Mittelpunkt der umschriebenen Kegelfläche im Unendlichen auf der gegebenen Geraden annimmt; so verwandelt sich der Umhüllungskegel in einen umhüllenden Cylinder, dessen Erzeugungslinien parallel zu der gegebenen Geraden sind.

193. Die Umdrehungsfläche wird nach der kreisförmigen Charakteristik ($d\ d'$, D H D′) durch einen geraden Kegel berührt, dessen Erzeugungslinie die Tangente $d\ s$ zu der Kurve $a\ o\ a'\ o'$, und dessen Scheitel in (A, s) ist. Die tangirende Ebene zu diesem Kegel, welche parallel zu der gegebenen Geraden ist, berührt die Umdreyungsfläche in einem Punkt, welcher der Berührungslinie dieser Fläche mit dem Cylinder angehört, dessen Erzeugungslinien parallel zu der gegebenen Geraden sind. Wenn man daher durch den Punkt (A, s) eine Parallele (A Z, $s\ z$) zu der Geraden (B C, $b\ c$) führt, und durch die Horizontalprojektion Z des Punkts, in welchem diese Parallele die Horizontalebene $d\ d'$ durchschneidet, zu dem Kreise D H D′ die Tangenten Z H, Z H′ zieht, sodann die Berührungspunkte H, H′ derselben auf die Horizontalebene nach h, h' projektirt; so hat man in (H, h), (H′, h') zwey Punkte jener verlangten Berührungslinie.

194. Die Umdrehungsfläche wird auch nach einer Charakteristik ($d\ d'$, D H D′) durch eine Kugel berührt, deren Halbmesser die Normale $t\ d$, und deren Mittelpunkt in (A, t) ist. Ein Cylinder, dessen Kanten parallel zu der Geraden (B C., b c) sind, umhüllt diese Kugel nach einem größten Kreise, dessen Ebene senkrecht auf die gegebene Gerade (B C, $b\ c$) ist. Wenn dieser Berührungskreis und die Charakteristik ($d\ d$, D H D′) sich in zwey Punkten schneiden, so gehören diese offenbar der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Cylinders an, dessen Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind. Um diese Punkte zu finden, führe man durch irgend einen Punkt (A, s) der Axe (A, $a\ a'$) eine Parallele (A Z, $s\ z$) zu der Geraden (B C, $b\ c$). Man lege die Meridianebene A Z, in der diese Parallele enthalten ist, auf die Meridinanebene A G zurück, wo jene Gerade die Stellung (A Z′, $s\ z'$) nehmen wird. Durch die Projektion t des Mittelpunkts der Kugel fälle man sodann auf die $s\ z'$ eine Senkrechte $t\ w'$, welche die Horizontale $d\ d'$ in einem Punkte x'' schneidet; den Abstand dieses Punkts von der Axe $a\ a'$ trage man auf der A Z von A nach W, und errichte durch W auf A Z eine Senkrechte H W H′, welche den Kreis D H D′ in H und H′ schneidet, diese Punkte bringe man in der Vertikalprojektion nach h und h', so sind (H, h) und (H′, h') die verlangten Punkte.

195. Man erhält ebenfalls Punkte der gesuchten Berührungslinie, wenn man parallel zu der gegebenen Geraden tangirende Ebenen zu den Cylindern führt, welche zu

Grundlinien die Meridianschnitte in ihren verschiedenen Stellungen haben, und deren Kanten senkrecht auf die Ebenen dieser Schnitte sind.

Wählen wir als Beyspiel den Meridian, welcher in der Ebene A N enthalten ist; so wird die fragliche tangirende Ebene senkrecht auf die Ebene A N seyn, da sie aber außerdem noch parallel zu der gegebenen Geraden (B C, $b\ c$) seyn soll, so müssen ihre Risse auf der Ebene A N nothwendig parallel zu der Projektion der Geraden (B C, $b\ c$) auf der Ebene A N seyn. (Art. 177.) Diese Risse werden die Grundlinie des Cylinders, oder vielmehr den Meridian der Ebene A N in Punkten berühren, welche offenbar die verlangten sind.

Projektiren wir zuerst die Gerade (B C, $b\ c$) oder eine Parallele (A Z, $s\ z$) zu ihr auf die Meridianebene A N: der Punkt (A, s) ist seine eigene Projektion; ein anderer Punkt (Z, z) der nemlichen Geraden projektirt sich mittelst der Senkrechten (Z T, $z\ d'$) auf die Meridianebene A N in einen Punkt dieser Ebene, dessen Horizontalprojektion T ist. Nehmen wir die Meridianebene A N in die Stellung A G zurückgelegt an, wobey der Punkt (A s) unveränderlich bleiben, und der in T projektirte Punkt die Stellung (T′, y) nehmen wird; so ist die Gerade (A T′, $s\ y$) die Projektion der (A Z, $s\ z$) auf der Ebene A N, nachdem diese die Stellung A G parallel zur vertikalen Projektionsebene genommen hat. Ziehen wir demnach zu dem Meridian $a\ o\ a'\ o'$ die zu der Geraden $s\ y$ parallelen Tangenten $\zeta\ \varepsilon$, $\vartheta\ \eta$ und bestimmen ihre Berührungspunkte ζ, ϑ die Abstände dieser Punkte von der Axe $a\ a'$, trage man sodann auf der Geraden A N von A nach λ und von A nach μ, so sind λ, μ Punkte der Horizontalprojektion der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Cylinders, dessen Kanten parallel zu der gegeben Geraden (B C, $b\ c$) sind. Die Punkte λ, μ projektiren sich vertikal auf die Horizontalen $\zeta\ \lambda'$, $\vartheta\ \mu'$ nach λ', μ' und diese Letzteren gehören der Vertikalprojektion derselben Linie.

Auch bey dieser Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Cylinders, dessen Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind, bemerke man vor allen, die Punkte, deren Vertikalprojektionen $\varphi'\ \psi'$, $\omega\ \pi$, γ', δ' sind. Die zwey ersten φ und π sind die Berührungspunkte des Meridians $a\ o\ a'\ o'$ und der parallelen Tangenten zu der Geraden $b\ c$, der Vertikalprojektion der gegebenen Geraden, ω und μ gehören den Begränzungskreisen der zweyten Berührungslinie, und werden wie die Punkte k, k' der ersten Berührungslinie bestimmt. Die Punkte γ', δ' endlich entsprechen den Punkten γ, δ, welche auf einem Durchmesser $\gamma\ \delta$ gelegen sind, der senkrecht auf die Horizontalprojektion B C der gegebenen Geraden ist.

196. Die gegebene Umdrehungsfläche wird von einem Kegel, dessen Scheitel in (E, e) ist, nach einer Kurve (H H′ M M′ P, $h\ h'\ m\ m'\ p'$) berührt, und von einem Cylinder, dessen Erzeugungslinien parallel zu der gegebenen Geraden sind, nach einer Kurve ($\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$). Diese beyden Berührungslinien schneiden sich in zwey Punkten (α, α') und (β, β'); die Ebenen, welche durch jeden dieser Punkte und durch die gegebene Gerade (B C, $b\ c$) geführt sind, berühren die Umdrehungsfläche in eben diesen Punkten.

Es ist hierbey zu bemerken, daß die Projektionen der zwey Berührungslinien, zum Beyspiel die Vertikalprojektionen derselben, sich noch in Punkten kreuzen können, welche keinem ihrer Durchschnitte im Raume entsprechen; um diese von den Projektionen der wirklichen Durchschnittspunkte zu unterscheiden, erinnere man sich nur, daß jeder von diesen letzten Punkten α', in der Horizontalprojektion seinen entsprechendeu α, auf der nemlichen Vertikalen $\alpha'\ \alpha$ haben müsse: und daß überdem diese Punkte auf den Projektionen der nemlichen zwey Bogen der Berührungslinien liegen müssen.

197. Von den drey Methoden, welche wir vorgetragen haben, wäre jede für sich hinreichend, um die krummen Linien zu finden, welche durch ihre Durchschnitte die Berührungspunkte der Umdrehungsfläche und der, durch die gegebene Gerade gehenden tangirenden Ebenen bestimmen. Um indessen die geraden Linien zu vermeiden, welche sich unter zu schiefen Winkeln schnitten, sieht man sich bey der Ausübung der zeichnenden Künste oft in die Nothwendigkeit versetzt, eine oder die andere Methode zu ergreifen, und in jedem besondern Fall diejenige zu wählen, welche die genauesten Konstruktionen giebt.

198. Die von uns als Beyspiel gewählte Umdrehungsfläche ist eine Fläche vom zweyten Grad, ein Ellipsoid. Wir haben (Art. 168.) gesehen, daß diese Flächen sämmtlich die Eigenschaft besitzen, von einer umschriebenen Kegelfläche nach einer ebenen Kurve berührt zu werden. Wenn man daher als Scheitel der umschriebenen Kegelfläche jene Punkte wählt, in denen die gegebene Gerade eine der Ebenen dnrchschneidet, welche durch zwey von den drey Hauptaxen (A, $a\ a'$), (O O′ $o\ o'$) und (T T′, A′) (Art. 116) des Ellipsoids gehen, so sind die Projektionen der Berührungslinien dieser Kegel und des Umdrehungsellipsoids auf diesen Ebenen gerade Linien.

Man sieht wohl ein, daß durch die Benutzung dieser Eigenschaften die zu machenden Konstruktionen sich sehr vereinfachen lassen, indem man, in diesem Falle statt vier krummer Linien nur zwey zu konstruiren nöthig hat, und daß die Berührungspunkte (α, α'), (β, β') sich folglich aus den Durchschnitten zweyer geraden und zweyer krummen Linien ergeben. Im Allgemeinen aber sind die Berührungslinien krummer Flächen mit umschriebenen Kegeln oder Cylindern, krumme Linien von doppelter Krümmung, welche in keiner Projektion gerade Linie seyn können.

Neunte Aufgabe.

Man soll parallel zu einer gegebenen Ebene eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Umdrehungsfläche führen?

199. Auflösung. Es ist die charakteristische Eigenthümlichkeit der tangirenden Ebenen zu einer Umdrehungsfläche, daß sie senkrecht auf die Meridianebenen sind, welche durch ihre Berührungspunkte gehen. Sobald daher der Berührungspunkt gegeben ist, so bestimmt die Tangente zu dem Meridian, welchem dieser Punkt angehört, die Stellung der tangirenden Ebenen. Demzufolge denken wir uns aus einem beliebig genommenen Punkt der Umdrehungsaxe eine Gerade senkrecht auf die gegebene Ebene gefällt. Diese Senkrechte und die Axe bestimmen die Stellung einer Meridianebene, welche selbst senkrecht auf die gegebene Ebene ist, und welche diese Ebene nach einer Geraden, die Umdrehungsfläche nach einem Meridian schneidet. Wenn man zu diesem Meridian und parallel zu der geraden Durchschnittslinie der beyden genannten Ebenen eine Tangente zieht und durch ihren Berührungspunkt mit demselben eine tangirende Ebene zu der Umdrehungsfläche, so wird diese tangirende Ebene parallel zu der Gegebenen seyn, denn diese beyden Ebenen gehen durch zwey parallele Geraden und sind senkrecht auf eine nemliche Ebene.

Kann man zu dem Meridian noch mehrere Tangenten parallel zu der ersten ziehen, so bestimmen diese eben so viele tangirende Ebenen, welche sämmtlich der Aufgabe genug thun.

Da diese Auflösung keine Konstruktion erfordert, welche wir nicht schon angewendet hätten, so haben wir derselben keine Figur beygefügt.

Zehnte Aufgabe.

Man soll durch eine gegebene Gerade, eine tangirende Ebene zu einer gegebenen windischen Fläche führen?

200. Auflösung. A B C, *a b c* (Taf. XIX.) seyen die Projektionen einer krummen Linie im Raume; der Kreis G E F sey die Grundlinie eines vertikalen Cylinders, auf welchem eine zweyte Krumme (G β E, α β' γ) gegeben sey.

Denken wir uns eine bewegliche Gerade, welche sich auf diesen beyden Krummen, als Leitlinien bewegt, und dabey beständig den vertikalen Cylinder berührt, auf welchem die zweyte Krumme gegeben ist, so wird diese Gerade eine windische Fläche erzeugen, und wir nehmen an, durch die gegebene Gerade (H K, $h\ k$) solle zu dieser Fläche eine tangirende Ebene geführt werden.

201. Um die Stellung irgend einer Erzeugungslinie der vorgelegten Fläche zu bestimmen, ziehe man durch die Horizontalprojektion β eines beliebig genommenen Punkts ($\beta\ \beta'$) der zweyten Leitlinie eine Tangente zu dem Kreise G E F, und betrachte diese als unbestimmte Projektion einer tangirenden Ebene zu dem vertikalen Cylinder G F E. Diese Ebene schneidet die erste Leitlinie (A B C, $a\ b\ c$) in einem Punkt, dessen Projektionen B, b sind, und wenn man denselben Punkt mit dem erstgenommenen (β, β') durch eine Gerade (B β B', $b\ \beta'$) verbindet, so ist diese eine Erzeugungslinie der vorgelegten windischen Fläche.

202. Dieses festgesetzt, bestimmen wir zuerst den Punkt (J, j), in welchem die gegebene Gerade (H K, $h\ k$) die windische Fläche durchschneidet.

Wenn man durch die Gerade (H K, $h\ k$) irgend eine Ebene führt, zum Beyspiel eine vertikale Ebene, so wird diese die windische Fläche nach einer gewissen krummen Linie schneiden; die gegebene Gerade, da sie mit dieser Linie in einer Ebene enthalten ist, wird dieselbe in einem oder in mehreren Punkten treffen, und dieses sind eben so viele Durchschnitte der gegebenen Geraden und der windischen Fläche.

Um die Linie zu finden, nach welcher die Vertikalebene H K die windische Fläche durchschneidet, und deren Horizontalprojektion unbestimmt in der Geraden H K enthalten ist, konstruire man die Stellung (B B', $b\ b'$) einer Erzeugungslinie der Fläche; diese Linie (B B', $b\ b'$) trifft die Vertikalebene H K in einem Punkt, dessen Projektionen R, r sind, und dieser Punkt, da er sowohl auf der Vertikalebene als auf der windischen Fläche gelegen ist, gehört ihrem gemeinsamen Durchschnitt an. Auf diese Weise bestimme man so viele Punkte r als man nöthig erachtet, und verbinde dieselbe durch die Krummen $r\ j\ n$, so hat man die Vertikalprojektion des gesuchten Durchschnittes. Die Geraden $h\ k$ trifft diese Krumme $j\ r\ n$ in einem Punkt j, welchen man auf die Gerade H K nach J projektire, um den Durchschnittspunkt (J, j) der gegebenen Geraden und der windischen Fläche zu erhalten.

203. Nachdem man die Erzeugungslinie (J E, $j\ e$) der Fläche konstruirt hat, welche durch jenen Durchschnittspunkt (J, j) geht, führe man durch die gegebene Gerade (H K, $h\ k$) und durch die gerade Erzeugungslinie (J E, $j\ e$) eine Ebene; und ich sage, daß diese die verlangte sey.

In der That, da die verlangte Ebene tangirend zu der gegebenen windischen Fläche seyn soll, so muß sie eine gerade Erzeugungslinie derselben enthalten; da sie aber auch durch die gegebene Gerade gehen soll, so kann sie nur diejenige von den Erzeugungslinien enthalten, welche durch den Durchschnittspunkt der windischen Fläche mit der gegebenen Geraden geht.

204. Was den Berührungspunkt der durch die gegebene Gerade gehenden tangirenden Ebene und der windischen Fläche betrifft, so würde man denselben am einfachsten nach der im Art. 131 et seq. Kap. II. angegebenen Verfahrungsart bestimmen.

Wir haben in der zu unsrer Aufgabe gehörigen Figur Taf. XIX. die Projektionen so vieler Erzeugungslinien konstruirt als erfoderlich waren, um die Gestalt der vorgelegten windischen Fläche auszudrücken. Auf der Horizontalebene sind alle diese Projektionen tangirend zu der Basis des Cylinders; auf der Vertikalebene sind sie sämmtlich berührend zu einer Krummen $\varphi\,\chi\,\psi$, welche die Gränze der Vertikalprojektion der windischen Fläche bildet.

Eilfte Aufgabe.

Man soll die Berührungslinie einer gegebenen windischen Fläche und eines Kegels, dessen Scheitel in einem gegebenen Punkt liegt, oder eines Cylinders, dessen Erzeugungslinie parallel zu einer gegebenen Geraden ist, konstruiren?

205. Auflösung. Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugungslinie einer windischen Fläche geht, berührt diese Fläche, und man bestimmt den Berührungspunkt mittelst des Durchschnittes der geraden und der krummen Linie der windischen Fläche, welche in der tangirenden Ebene enthalten sind. (Art. 131.)

Nachdem man daher irgend eine Stellung der geraden Erzeugungslinie bestimmt hat, führe man durch diese Gerade und durch den gegebenen Scheitel des Kegels eine Ebene. Der Berührungspunkt dieser Ebene und der Fläche gehört der Berührungslinie der Fläche und des Kegels, und die Gerade, welche durch den Scheitel und den Berührungspunkt gezogen wird, ist eine Kante dieses Kegels. Man wiederhole diese Konstruktion so vielmal als man Kanten des gesuchten Kegels und Punkte seiner Berührungskurve erhalten will.

206. Um die Berührungslinie der windischen Fläche mit der Cylinderfläche zu erhalten, führe man durch die geraden Erzeugungslinien der windinschen Fläche Ebenen, welche sämmtlich parallel sind zu der gegebenen Geraden; diese Ebenen berühren die

Fläche in Punkten, welche der Berührungslinie der windischen Fläche und des Cylinders angehören, dessen Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind.

Zwölfte Aufgabe.

Man soll parallel zu einer gegebenen Ebene eine tangirende Ebene zu einer ebenfalls gegebenen windischen Fläche führen?

207. Auflösung. Man konstruire einen um die gegebene windische Fläche umschriebenen Cylinder, dessen Kanten parallel sind zu einer Geraden in der gegebenen Ebene, zum Beyspiel parallel zu ihrem Vertikalrisse, und man bestimme die Berührungslinie dieses Cylinders nach Art. 206.

Parallel zu einer zweyten Geraden der gegebenen Ebene, zum Beyspiel zu ihrem Horizontalrisse, führe man einen zweyten umhüllenden Cylinder zu der windischen Fläche, und bestimme die Berührungslinie.

Die zwey genannten Berührungslinien werden sich in einem oder in einer größeren Zahl von Punkten durchkreuzen, und die zwey Kanten der beyden Cylinder, welche durch jeden dieser Punkte gehen, bestimmen die Stellung einer Ebene, welche der Aufgabe genüget. Denn jede von diesen so konstruirten Ebenen geht durch zwey Tangenten zu der windischen Fläche, welche von einem nemlichen Punkte auslaufen, und überdies sind die beyden Tangenten parallel zu der gegebenen Ebene.

Noten zum zweyten Buch.

Note I.

Ueber die Cylinder- und Kegelflächen. Kap. I. Art. 58 — 61.

Lehrsatz.

Die Schnitte einer Cylinderflächen durch parallele Ebenen sind gleiche, sich deckende Linien.

Beweis. Es seyen A B C, *a b c* (Taf. XII. Fig. 3.) zwey parallele Schnitte eines Cylinders C a, A *a*, B *b* seyen zwey gerade Erzeugungslinien desselben, und A, *a*, B, *b*, die Begegnungspunkte dieser Erzeugungslinien, mit den Schnitten.

Man verbinde diese Punkte durch die Geraden A B, *a b*. Da sowohl die Erzeugungslinien A *a*, B *b*, als die Ebenen der Schnitte wechselsweise parallel sind, so sind auch die Sehnen A B, *a b* parallel und gleich.

Auf diese Art läßt sich die Gleichheit aller Sehnen beweisen, welche in beyden Schnitten die Punkte verbinden, die einer nemlichen Erzeugungslinie angehören. Wenn man daher in einem dieser Schnitte ein beliebiges Polygon einschreibt, so kann man in dem andern ein gleiches an Seiten und Winkeln einschreiben. Die Polygone müssen sich decken, und da die Scheitel ihrer Winkel Punkte der Schnitte sind, und überdem alle, in die Schnitte einschreibbare Polygone dieselbe Eigenthümlichkeit haben; so müssen auch die Schnitte gleich seyn und sich decken.

Zusatz. Da die parallelen Schnitte gleich sind, so sind auch alle ihre gleichnamigen Linien, und folglich die Tangenten A A', *a a'*, welche durch die Punkte einer nemlichen Erzeugungslinien A *a* gezogen sind, parallel unter sich. Alle diese parallelen Tangenten A A', *a a'*... liegen folglich in einer Ebene, welche die tangirende Ebene zu dem Cylinder an der Kante A *a* ist.

Lehrsatz.

Die Schnitte einer Kegelfläche durch parallele Ebenen sind ähnliche Linien.

Beweis. Es sey A (Taf. XII. Fig. 4.) der Mittelpunkt eines Kegels D C B, *d c b* zwey parallele Schnitte, und A B *b*, A C *c*, A D *d*, drey Erzeugungslinien desselben Kegels, welche diese Schnitte in den Punkten B, *b*, C, *c*, D, *d* treffen. Man verbinde in jeder Ebene diese Punkte durch die Sehnen B C, B D, *b c*, *b d*.

Die ähnlichen Dreyecke A B C und A b c, A B D und A b d geben:

$$AB : Ab :: BC : bc :: DB : db.$$

oder

$$BC : bc :: DB : db,$$

daher haben in den beyden Schnitten alle Sehnen, welche den nemlichen Erzeugungslinien entsprechen, das gleiche Verhältniß unter sich. Wenn man daher in einen Schnitt irgend ein Polygon eingeschrieben hat, so kann man stets in jedem parallelen Schnitt ein ähnliches Polygon einschreiben, und folglich sind diese Schnitte ähnliche Linien.

Zusatz. Alle Tangenten M N, $m\ n$, zu den parallelen Schnitten eines Kegels an den Punkten einer nemlichen Erzeugungslinie sind parallel unter sich. Alle diese parallelen Tangenten zusammen, bilden die tangirende Ebene an der Kante A C c.

Note II.

Beweis der doppelten Erzeugung des Hyperboloids von einem Netz durch die gerade Linie. Kap. II. Art. 119.

Es sey I K. (Taf. XII. Fig. 6.) eine bewegliche Gerade, welche sich beständig auf drey feste Gerade A B, M N, C D anlehnt, um ein Hyperboloid von einem Netze zu erzeugen. Betrachtet man blos das Flächenstück, was von den Seiten des windischen Vierecks A B C D eingeschlossen ist, so entsprechen alle Stellungen der beweglichen Geraden, solchen Geraden, welche wie I K, I′ K′, . . . ꝛc. die festen Leitlinien in drey Punkten I, G, K ; I′, G′, K′, . . . ꝛc. schneiden. Die bewegliche Gerade I K und die feste Gerade M N, da sie in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkt G; aus dem nemlichen Grunde treffen sich die zwey Geraden I M, K N in einem Punkte L; aber die eine derselben liegt in der Ebene des Dreyecks A B D, und die andere in der Ebene des Dreyecks B C D, sie können sich daher nur in einem Punkte des Durchschnitts der Ebenen dieser zwey Dreyecke treffen, woraus folgt, daß der Punkt L in der Verlängerung der Diagonale B D des windischen Vierecks A B C D liege. Auf dieselbe Art ist es erweislich, daß die Geraden I′ M′, K′ N′ sich in einem anderen Punkt H der nemlichen Diagonale B D begegnen müssen. Die von dem Punkt L aus gezogenen Geraden L K, L M theilen die Seiten des Vierecks A B C D in acht Theile oder Segmente A I, I B, B N, N C, C K, K D, D M, M A. Wir werden beweisen: wenn man zwey derartige Produkte bildet, so daß die Faktoren eines jeden nur aus solchen Segmenten bestehen, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, diese Produkte gleich seyen.

Die Diagonale B D zerlegt das Viereck A B C D in zwey Dreyecke A B D, B C D; wenn man eines derselben, B C D zum Beyspiel auf die Seite setzt (Fig. 6. bis Taf. XII.) so ziehe man durch den Punkt D zu der Geraden K N L die Parallele D I; und verlängere dieselbe, bis sie die Seite B C des Dreyeckes in I trifft.

Vermöge der ähnlichen Dreyecke C K N, C D I erhält man:

$$CK : DK :: CN : NJ. \qquad (1)$$

Die zwey Dreyecke N B L, D B J geben:

$$BD : BL :: BJ : BN,$$

woraus
$$BD + BL : BL :: BJ + BN : BN$$

oder
$$DL : BL :: NJ : BN \qquad (2)$$

Multiplicirt man nach der Reihenfolge die Theilsätze der Proportionen (1) und (2), so hat man

$$CK \times DL : DK \times BL :: CN : BN;$$

Daher (Fig 6.)

$$BN \times CK \times DL = BL \times CN \times DK. \qquad (a)$$

Betrachtet man das zweyte Dreyeck A B D des Vierecks und die Gerade L M, so hat man aus dem nemlichen Grunde

$$AI \times BL \times CM = AM \times BI \times DL. \qquad (b)$$

Wenn man die Gleichungen (a) und (b) gliederweise multiplicirt, so ergeben sich zwey gleiche Produkte, deren eines zu Faktoren die Segmente A I, B N, C K, D M hat, und das andere, die Segmente A M, B I, C N, D K; und jedes enthält nur solche Segmente, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben.

Die Gleichheit dieser zwey Produkte giebt:

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = \frac{AM}{DM} \times \frac{CN}{BN}$$

Da die Gerade M N fest ist, so hat man

$$\frac{AM}{DM} \times \frac{CN}{BN} = a \qquad (c)$$

a bezeichnet eine, durch die Stellung der drey festen Geraden, welche die bewegliche Gerade I K leiten, bestimmte unveränderliche Größe; woraus folgt, daß für alle Stellungen dieser Geraden

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = a, \text{ oder } \frac{CK}{DK} = a\frac{BI}{AI} \qquad (d)$$

Dieses festgesetzt, wenn man die drey Geraden A D, I K, B C fixirt, um als Leitlinien der beweglichen Geraden M N zu dienen, so theilt diese Gerade in irgend einer Stellung die Seiten des windischen Vierecks ebenfalls in acht Segmente, zwischen denen bey allen ihren Stellungen die vorstehenden Verhältnisse (d) und (c) statt haben; das heißt, daß man bey allen Stellungen der beweglichen Geraden I K, M N auf gleiche Weise hat:

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = a, \ (d) \qquad \frac{AM}{DM} = a\frac{BN}{CN} \qquad (c)$$

woraus folgt, daß es für das Hyperboloid von einem Netze zwey Erzeugungsarten giebt. Bey der einen stützt sich die bewegliche Gerade I K auf die Geraden A B, C D, M N, und bey der zweyten lehnt sich die bewegliche Gerade M N auf die Leitlinien A D, B C, I K. Es giebt daher keinen Punkt G dieser Fläche, durch den man nicht zwey Gerade M G N, I G K führen könne, welche den zwey, den beyden Erzeugungsarten des Hyperboloids entsprechenden Systemen von Geraden angehören.

Note III.

Zu Art. 125. gehörig.

Lehrsatz.

Wenn zwey unter einander rechtwinklige Ebenen sich so bewegen, daß sie immer durch die Seiten eines nemlichen Winkels gehen, so beschreibt die gerade Durchschnittslinie dieser Ebenen einen schiefen Kegel.

Beweis. Es seyen O P, O Q (Taf. XII. Fig. 7.) die zwey Seiten eines Winkels, durch welche man zwey unter sich rechtwinklige Ebenen geführt habe, und O A sey die Projektion des Durchschnittes dieser zwey Ebenen auf der Ebene des Winkels P O Q. Nachdem man irgend eine Gerade D C senkrecht auf O A gezogen hat, betrachte man diese Gerade als den Riß einer Ebene, welche senkrecht auf den Durchschnitt der zwey rechtwinkligen Ebenen ist, und welche diese letzteren Ebenen nach zwey unter sich senkrechten Geraden schneidet, die durch die Punkte C und D gehen.

Man bildet dadurch im Raume zwey rechtwinklige Dreyecke, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel auf dem geraden Durchnitte der beyden rechtwinkligen Ebenen haben, und als Hypothenusen die Geraden O D, D C. Es folgt aus diesem, daß der, den beyden Dreyecken gemeinschaftliche Scheitel in dem Durchschnittskreise von zwey auf O D und D C als Durchmessern beschriebenen Kugeln liegen müsse. Diese beyden Kugeln schneiden sich nach dem kleinen Kreise, dessen Ebene senkrecht ist auf jene des Winkels P O Q, und dessen auf die Seite O P dieses Winkels senkrechter Durchmesser die gemeinschaftliche Sehne der beyden großen Kreise D B O und C B D der Kugeln ist. Nun aber, welches auch die, in dem Winkel P O Q durch den Punkt D gezogene Sehne D C sey, so wird der kleine Durchschnittskreis der Kugeln, welche über D C und O D als Durchmesser beschrieben sind, sich nicht verändern, daher ist dieser kleine Kreis der geometrische Ort der Scheitel der rechtwinkligen Dreyecke, welche als Hypothenusen die Gerade von beständiger Länge O D und die veränderliche C D haben; daher kann man denselben als die Grundlinie eines schiefen Kegels betrachten, dessen Kanten die Durchschnitte von zwey rechtwinkligen Ebnenen sind, denen auferlegt ist, sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels zu bringen.

Anstatt den festen Punkt D auf der Seite O Q des Winkels P O Q zu nehmen, könnte man denselben auf der Seite O P annehmen. Es laßt sich sodann auf dieselbe Art beweisen, daß der gerade Durchschnitt zweyer rechtwinkligen Ebenen, die sich zwischen den Seiten eines gegebenen Winkels bewegen müssen, einen schiefen Kegel erzeuge, der als Grundlinie einen Kreis hat, dessen Ebene senkrecht auf die Seite O Q des gegeben Winkels ist. Daher besitzt dieser schiefe Kegel so wie alle anderen Kegel des zweyten Grads die Eigenschaft, durch zwey Systeme von Ebenen nach Kreisen geschnitten zu werden. In diesem besondern Falle sind die schneidenden Ebenen senkrecht auf diejenigen Kanten des Kegels, die in der Ebene der Mittelpunkte der beyden kreisförmigen Grundlinien liegen.