

Hyperboloid bestimmen, welches ebenfalls längs der Geraden $A A' A''$ tangirend zu der allgemeinen windischen Fläche wäre. Die geraden Leitlinien des Hyperboloids, welches eine windische Fläche nach einer gemeinschaftlichen Erzeugungslinie $A A' A''$ berührt, sind daher nur der Bedingung unterworfen, durch drey Punkte A, A', A'' dieser Geraden zu gehen, und in den tangirenden Ebenen zu der windischen Fläche an eben diesen Punkten enthalten zu seyn.

152. Von welcher besonderen Art demnach eine windische Fläche seyn mag, so giebt es eine unendliche Menge Hyperboloide von einem Netze, welche ein Element mit dieser Fläche gemein haben können, oder sie nach einer Geraden berühren. Jedes von diesen Hyperboliden hat als Leitlinien drey Gerade, welche willkürlich in den tangirenden Ebenen und durch drey Punkte der geraden Berührungslinie der windischen Fläche und des Hyperboloids gezogen sind.

153. Die berührenden Hyperboloide einer windischen Fläche werden hyperbolische Paraboloiden, wenn die drey, in den drey tangirenden Ebenen genommenen geraden Leitlinien parallel zu einer Ebene sind. Die windische Fläche kann daher auch von einer unendlichen Menge hyperbolischer Paraboloiden nach einer geraden Erzeugungslinie berührt werden.

A l l g e m e i n e A u f g a b e.

Die Erzeugung einer windischen Fläche ist bekannt und gegeben; man soll durch einen ebenfalls gegebenen Punkt dieser Fläche eine tangirende Ebene zu derselben führen?

154. Auflösung. Nachdem man die durch den Berührungspunkt der vorgelegten Fläche gehende gerade Erzeugungslinie konstruirt hat, führe man durch diese Gerade drey verschiedene Ebenen. Diese Ebenen sind sämtlich tangirend zu der windischen Fläche, und man bestimmt ihre Berührungspunkte nach der (Art. 132.) vorgetragenen Methode. Ist dieses geschehen, so führe man in den drey tangirenden Ebenen, und durch die drey gefundenen Berührungspunkte, drey beliebige Geraden, und nehme diese als die geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netze. Dieses Hyperboloid hat an allen Punkten der oben genannten geraden Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit der vorgelegten windischen Fläche. Die Aufgabe kommt also darauf zurück, durch einen gegebenen Punkt eines Hyperboloids von einem Netze, dessen drey gerade Leitlinien bekannt sind, eine tangirende Ebene zu führen; und ist (Art. 145.) aufgelöst. Die drey Geraden Leitlinien des tangirenden Hyperboloids können, da ihre Lage in den drey tangi-

renden Ebenen der windischen Fläche unbestimmt ist, so gewählt werden, daß sie parallel zu einer nemlichen Ebene sind, und in dieser Hypothese wandelt das Hyperboloid sich in ein berührendes hyperbolisches Paraboloid um. (Art. 122.)

Wir werden weiter unten (Art. 328.) aus diesen Eigenschaften der windischen Flächen eine allgemeine graphische Auflösung des Problems der Tangenten ableiten.

F ü n f t e s K a p i t e l.

Tangirende Ebenen zu krummen Flächen, deren Berührungspunkt nicht gegeben ist.

Bedingungen, welche die Stellung der tangirenden Ebenen zu einer krummen Fläche bestimmen.

155. In den verschiedenen Aufgaben über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, welche wir bis jetzt aufgelöst haben, setzten wir stets voraus, daß der Punkt, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden sollte, auf der Fläche genommen, und daß er selbst der Berührungspunkt sey: diese einzige Bedingung war hinreichend, um die Stellung der Ebene zu bestimmen. Aber dem ist nicht also, sobald der Punkt, durch den die Ebene gehen soll, außerhalb der Fläche genommen ist.

156. Soll die Stellung einer Ebene bestimmt seyn, so muß sie drey verschiedenen Bedingungen entsprechen, von denen jede gleichbedeutend damit ist: Durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Nun aber entspricht im Allgemeinen die Eigenschaft, tangirend zu einer krummen Fläche zu seyn, sobald der Berührungspunkt nicht gegeben ist, nur einer einzigen von diesen Bedingungen. Wenn daher die Stellung einer Ebene durch Bedingungen dieser Art festgesetzt werden soll, so bedarf es deren, im Allgemeinen drey. In der That, nehmen wir an, es seyen uns drey krummen Flächen gegeben, und es sey eine Ebene tangirend zu einer von ihnen; so können wir uns vorstellen, die Ebene bewege sich um diese Fläche, ohne daß sie aufhöre sie zu berühren. Sie wird dieses nach allen erdenklichen Richtungen thun können, nur wird sich nach Maßgabe der Ortsveränderung der Ebene, der Berührungspunkt auf der Fläche bewegen, und seine Bewegung wird in derselben Richtung statt haben, wie die der Ebene. Nehmen wir nun an, diese Bewegung geschehe so lange nach irgend einer Seite hin, bis die Ebene der zweyten