

schnitte zweyer geraden Linien ergebe, und daß diese zwey Geraden, welche den beyden Systemen von geraden Linien angehören, nach denen diese Flächen erzeugt werden können, den vollständigen Schnitt derselben durch die tangirende Ebene ausmachen.

Wenn daher eine dieser Flächen gegeben ist, und es handelt sich, den Berührungspunkt derselben mit einer Ebene zu finden, welche durch eine ihrer geraden Erzeugungslinien geführt ist, so wird die Anwendung der in Art. 132. vorgetragenen Methode sehr einfach, denn man hat nur nöthig, die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit noch zwey anderen Geraden des nemlichen Erzeugungssystems zu konstruiren, und diese Punkte durch eine Gerade zu verbinden. Der Begegnungspunkt dieser letzten Geraden, mit der gegebenen Erzeugungslinie ist offenbar der gesuchte Berührungspunkt.

150. Wir werden nun zeigen, daß man bey jeder windischen Fläche, welches auch die besondere Art ihrer Erzeugung sey, ein Hyperboloid von einem Netz konstruiren könne, welches die vorgelegte Fläche nach einer geraden Erzeugungslinie berührt, und welches folglich an allen Punkten dieser gemeinschaftlichen Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit derselben hat.

Von den Berührungen der windischen Flächen unter sich.

151. Es seyen $A B$, $A' B'$, $A'' B''$ (Taf. XII. Fig. 2.) drey beliebige krumme Leitlinien einer windischen Fläche, und $A A' A''$ eine gerade Erzeugungslinie derselben, welche die drey Krümmen in den Punkten A , A' , A'' schneidet. Nachdem man durch jeden dieser Punkte zu der Leitlinie, welcher er angehört die Tangenten $A \alpha$, $A' \alpha'$, $A'' \alpha''$ gezogen hat, betrachte man diese als die geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netz. Dieses Hyperboloid wird offenbar tangirend zu der vorgelegten Fläche seyn, in allen Punkten der Geraden $A A' A''$, welche jenes mit dieser gemein hat; denn indem die bewegliche Gerade sich auf den unendlich kleinen Elementen der krummen Leitlinien bewegt, welche diese mit ihren Tangenten an den Punkten A , A' , A'' gemein haben, ist sie zu gleicher Zeit auf beyden Flächen, diese haben daher das windische Flächenelement $A a A' a' A'' a''$, was zwischen zwey aufeinanderfolgenden Stellungen $A A' A''$, $a a' a''$ der beweglichen Geraden gefaßt ist, mit einander gemein; und folglich auch an jedem Punkte dieses Elements eine gemeinschaftliche tangirende Ebene.

Es ist einleuchtend, daß, wenn man durch die drey Punkte A , A' , A'' drey andere Linien $A C$, $A' C'$, $A'' C''$ der windischen Fläche führte, die bewegliche Gerade die nemliche Fläche erzeugen würde, wenn sie sich auf diesen, oder auf den drey ersten Krümmen, als Leitlinien, bewegte, und wenn man an den Punkten A , A' , A'' , die Tangenten zu den drey Krümmen $A C$, $A' C'$, $A'' C''$ konstruirte, so würden diese ein neues

Hyperboloid bestimmen, welches ebenfalls längs der Geraden $A A' A''$ tangirend zu der allgemeinen windischen Fläche wäre. Die geraden Leitlinien des Hyperboloids, welches eine windische Fläche nach einer gemeinschaftlichen Erzeugungslinie $A A' A''$ berührt, sind daher nur der Bedingung unterworfen, durch drey Punkte A, A', A'' dieser Geraden zu gehen, und in den tangirenden Ebenen zu der windischen Fläche an eben diesen Punkten enthalten zu seyn.

152. Von welcher besonderen Art demnach eine windische Fläche seyn mag, so giebt es eine unendliche Menge Hyperboloide von einem Netze, welche ein Element mit dieser Fläche gemein haben können, oder sie nach einer Geraden berühren. Jedes von diesen Hyperboliden hat als Leitlinien drey Gerade, welche willkürlich in den tangirenden Ebenen und durch drey Punkte der geraden Berührungslinie der windischen Fläche und des Hyperboloids gezogen sind.

153. Die berührenden Hyperboloide einer windischen Fläche werden hyperbolische Paraboloiden, wenn die drey, in den drey tangirenden Ebenen genommenen geraden Leitlinien parallel zu einer Ebene sind. Die windische Fläche kann daher auch von einer unendlichen Menge hyperbolischer Paraboloiden nach einer geraden Erzeugungslinie berührt werden.

A l l g e m e i n e A u f g a b e.

Die Erzeugung einer windischen Fläche ist bekannt und gegeben; man soll durch einen ebenfalls gegebenen Punkt dieser Fläche eine tangirende Ebene zu derselben führen?

154. Auflösung. Nachdem man die durch den Berührungspunkt der vorgelegten Fläche gehende gerade Erzeugungslinie konstruirt hat, führe man durch diese Gerade drey verschiedene Ebenen. Diese Ebenen sind sämmtlich tangirend zu der windischen Fläche, und man bestimmt ihre Berührungspunkte nach der (Art. 132.) vorgetragenen Methode. Ist dieses geschehen, so führe man in den drey tangirenden Ebenen, und durch die drey gefundenen Berührungspunkte, drey beliebige Geraden, und nehme diese als die geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netze. Dieses Hyperboloid hat an allen Punkten der oben genannten geraden Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit der vorgelegten windischen Fläche. Die Aufgabe kommt also darauf zurück, durch einen gegebenen Punkt eines Hyperboloids von einem Netze, dessen drey gerade Leitlinien bekannt sind, eine tangirende Ebene zu führen; und ist (Art. 145.) aufgelöst. Die drey Geraden Leitlinien des tangirenden Hyperboloids können, da ihre Lage in den drey tangi-