deres bedeckt erscheint, als durch ihre eigenen Theile, denn im andern Falle läßt sich durchaus keine allgemein gültige Regel geben. Die Lösung der Aufgabe hängt alsdann ganz davon ab, daß man sich eine deutliche Anschauung von der gegenseitigen Stellung der sich bedeckenden Flächen erwerbe. Wir verweisen hier auf das, was wir bereits über diesen Gegenstand (Art. 28 — 29.) gesagt haben.

Die einzelnen Fälle werden, nach Allem diesem, aus den beygefügten Zeichnungen selbst deutlich hervorgehen, und zur Norm bey andern ähnlichen dienen können.

Viertes Kapitel.

Von den tangirenden Ebenen zu den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

130. Wie wir im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, kann jede aufwickelbare Fläche als die Umhüllung des von einer beweglichen Ebene durchlaufenen Raumes betrachtet werden; sie berührt die verschiedenen Stellungen der erzeugenden Ebene nach geraden Charakteristiken, welches gewöhnlich die Erzeugungslinien der aufwickelbaren Fläche sind.

Die tangirende Ebene an einem gegebenen Punkte einer aufwickelbaren Fläche fällt mit der entsprechenden Stellung der umhüllten Erzeugungsebene zusammen; sie berührt daher die Fläche in der ganzen Länge der geraden Erzeugungslinie des Berührungspunktes, und ihre Stellung ist bestimmt; durch diese Gerade, und durch die Tangente zu irgend einer Kurve der Fläche an dem Punkte, wo sie dieselbe Erzeugungslinie durchschneidet.

* * *

131. Die windischen Flächen werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, weßhalb die tangirende Ebene an irgend einem Punkt einer solchen Fläche auch die gerade Erzeugungslinie enthalten muß, welche durch den Berührungspunkt geht. Diese Ebene berührt aber die windische Fläche nur in jenem einzigen Punkte, während bey allen aufwickelben Flächen, die ebenfalls durch die gerade Linie erzeugt sind, die Berührung längs der ganzen Ausdehnung einer geraden Linie statt findet. Aber diese letzte Eigenthümlichkeit gehört ausschließlich nur den aufwickelbaren Flächen; bey allen Andern beschränkt sich die Berührung mit ihren tangirenden Ebenen auf einen oder mehrere

Punkte, jedoch immer auf eine begränzte Anzahl. Welchen Punkt der geraden Erzeugungslinie einer windischen Fläche man demnach als Berührungspunkt nehmen mag, so wird die tangirende Ebene an diesem Punkt zwar immer durch die nemliche Erzeugungslinie gehen, aber einem jeden Punkt entspricht eine andere Neigung der Ebene. Es folgt aus diesem, daß im Allgemeinen jede Ebene, die durch eine Gerade einer windischen Fläche geht, zugleich auch an irgend einem Punkt dieser Gerade tangirend zu der Fläche sey.

In der That, benennen wir mit G eine gerade Erzeugungslinie einer windischen Fläche und mit P eine durch dieselbe Gerade geführte Ebene. Bezeichnen wir ferner mit G', G'', G''' ..., eine Reihe von Erzeugungslinien jenseits der Geraden G, und mit... $'G, ''G, '''G$, eine Reihe derselben Geraden diesseits der Geraden G, und nehmen wir überdem an, alle diese geraden Erzeugungslinien seyen aufeinanderfolgend und in der Ordnung ...$'''G, ''G, 'G, G, G', G'', G'''$....., wie sie durch die Oberstriche angegeben ist. Wenn nicht in einigen besondern Fällen, wird die Ebene P im Allgemeinen zu keiner von jenen Geraden parallel seyn, sie wird dieselben in einer Reihe von Punkte ... $'''g, ''g, 'g$.... g', g'', g''' ... schneiden, und diese Punkte, die einander unendlich nahe liegen, bilden eine einzige ebene krumme Linie. Nun aber liegen die zwey Punkten $'g, g'$ auf den beyden entgegengesetzten Seiten der Geraden G, daher wird das unendlich kleine Stück $'g$ $'g$ der genannten Krummen die Gerade G in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt, den wir g nennen wollen, ist offenbar der Berührungspunkt der Ebene P mit der windischen Fläche. Denn eine Ebene ist tangirend zu einer Fläche, wenn sie durch die Tangenten zu zwey verschiedenen Linien der Fläche geht, die sich in dem Berührungspunkt kreuzen; nun aber liegt die Krumme ...$'''g\ ''g\ 'g\ g\ g'\ g''\ g'''$... in der Ebene P; diese Ebene enthält daher die Tangente in g zu der Krummen, aber sie enthält auch die Gerade G, welche ihre eigene Tangente ist, sie ist folglich tangirend zu der windischen Fläche an dem Durchschnittspunkt g der zwey genannten Linien.

Es folgt aus dem Vorhergehenden, daß eine tangirende Ebene zu einer windischen Fläche zugleich auch durchschneidend zu der Fläche sey; daß sie dieselbe nach einer geraden Erzeugungslinie nach einer gewissen Krummen schneide, und daß diese beyden Linien sich in dem Berührungspunkte kreuzen. Wenn die Ebene sich um die gerade Erzeugungslinie dreht, so hört sie nicht auf tangirend zu der windischen Fläche zu seyn, aber der Berührungspunkt wechselt auf der Erzeugungslinie mit der veränderten Stellung der Ebene, weil sich mit dieser Stellung die Krumme...$'''g\ ''g\ 'g\ g\ g'\ g''\ g'''$... ändert, und folglich der Punkt g.

132. Die Bestimmung des Berührungspunkts einer windischen Fläche mit einer Ebe-

ne, die durch eine ihrer geraden Erzeugungslinien geführt ist, hängt sonach von der Konstruktion der Durchschnittslinie der Fläche und der Ebene ab. Sobald die Erzeugung der windischen Fläche bestimmt und bekannt ist, kann man so viele Punkte $\ldots{}'''g, {}''g, {}'g \ldots g', g'', g''' \ldots$ der zwey Reihen als man will konstruiren, indem man sich stets der Geraden G nähert. Die zwey Theile der Krummen, welche aus den zwey Reihen von Punkten gebildet sind, werden sich immer mehr in dem Punkt g der Geraden G zu vereinigen suchen; nichts destoweniger aber bleiben sie in der Nähe der Geraden G stets getrennt, weil der Punkt g, auf welchen sie zulaufen, selbst unbestimmt ist. Ein geübter Zeichner wird übrigens diese Linie mit hinreichender Genauigkeit ziehen, indem er dem Gesetze der Stetigkeit entspricht, und dabey berücksichtigt, daß zwey Stücke einer geometrischen Linie in dem Punkt, in welchem sie aneinanderstoßen, eine gemeinschaftliche Tangente haben müssen.

Wir werden nun die Auflösung der umgekehrten Aufgabe, das heißt, bey gegebenem Berührungspunkt einer windischen Fläche, die Stellung der tangirenden Ebene an diesem Punkt, zu konstruiren, zuerst für die windischen Flächen des zweyten Grads vortragen, weil sich die Auflösung des nemlichen Problems, bey allen übrigen windischen Flächen, wie wir sehen werden, immer auf diese zurückbringen läßt.

Fortsetzung der Aufgaben über die Konstruktion der tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, wobey der Berührungspunkt gegeben ist.

Sechste Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eines Umdrehungs-Hyperboloids von einem Netz, was durch seine Axe und eine gerade Erzeugungslinie gegeben ist, eine tangirende Ebene zu führen?

133. Auflösung. Es sey (A, $a\,a'$) Taf. IX. die Axe der Fläche; (O G, $o\,g$) eine gerade Erzeugungslinie derselben. Wir nehmen an, man habe (nach Art. 121) den kleinsten Kehlkreis (C D T, $c\,d$) der Fläche konstruirt, nnd den Parallelkreis (G R E F, $e\,f$), welcher durch den Punkt (G, g) der Erzeugungslinie auf der Horizontalebene beschrieben wird.

Endlich sey M die gegebene Horizontalprojektion des Berührungspunkts, dessen Vertikalprojektion noch zu bestimmen bleibt.

Alle geraden Erzeugungslinien des Hyperboloids sind tangirend zu dem geraden Cylinder, dessen Grundlinie der Kreis (C D T, $c\,d$) und dessen Axe die Gerade (A, $a\,a'$)

ist, (Art. 112.), man ziehe daher durch M eine Gerade M S, welche den Kreis C D T in einem Punkte S berührt. Diese Gerade betrachte man als unbestimmte Projektion einer den vertikalen Cylinder C D T berührenden Ebene, welche zwey Erzeugungslinien des Hyperboloids enthält, die symetrisch gestellt sind, in Bezug auf Meridianebene A F (Art. 121.) Von diesen Geraden schneidet Eine die Horizontalebene in U, und die Andere, in V; sie kreuzen sich beyde in einem Punkte (S, s) des Kehlkreises und ihre Vertikalprojektionen sind folglich die Geraden $u\,s$, $v\,s$. Nun aber kann jede von diesen Geraden die Vertikalprojektion des Berührungspunkts enthalten, daher liegt diese Projektion auf der Vertikalen M $m\,m'$ in m oder m', in gleichen Abständen von der Horizontalen $c\,d$.

Da sich durch den Punkt M noch eine zweyte Tangente M T an den Kreis D C T ziehen läßt, so hätte man auch durch diese eine Vertikalebene annehmen können. Sie würde zwey Geraden des Hyperboloids enthalten, die sich in dem Punkt (T, t) kreuzen, und deren Vertikalprojektionen die Geraden $r\,t$, $q\,t$ sind. Die Vertikale M $m\,m'$ träfe diese letzten Geraden in den zwey Punkten m und m', welche schon mittelst der Geraden $v\,t$, $u\,t$ gefunden wurden.

134. Betrachten wir nun zuerst den Berührungspunkt (M, m), so kennen wir zwey Erzeugungslinien (R Q, $r\,q$) und (U V, $u\,v$), welche sich in diesem Punkt kreuzen; diese Linien sind überdies ihre eigenen Tangenten; als solche gehören sie ganz der zu suchenden tangirenden Ebene, und sie bestimmen daher die Stellung dieser Ebene an dem ersten Berührungspunkt. Die Gerade (R Q, $r\,q$) schneidet aber die Horizontalebene in (R, r), und die Gerade (U V, $u\,v$) trifft dieselbe Ebene in (U, u), daher ist die Gerade R U der Horizontalriß der tangirenden Ebene am Punkt (M, m); diese Gerade R U ist, per construct. senkrecht auf den Halbmesser A M und es folgt hieraus, daß die verlangte tangirende Ebene senkrecht auf die Meridianebene A M sey, welche durch den Berührungspunkt (M, m) geht. Dieses Ergebniß mußte statt finden, weil die Fläche durch Umdrehung entstanden ist.

Um den Vertikalriß, der in Rede stehenden Ebene zu bestimmen, konstruire man in derselben, die durch den Berührungspunkt gehende Horizontale (M I, $m\,i$); diese Horizontale schneidet die vertikale Projektionsebene in i; der Riß R U trifft dieselbe Ebene in K, und folglich ist die Gerade K i, die diese beyden Punkte verbindet, auf der Vertikalebene der Riß der tangirenden Ebene am Punkt (M, m) des Hyperboloids.

135. Die zwey Punkte (M, m) und (M, m') liegen in einer nemlichen Meridianebene und in gleichen Abständen von der Ebene $c\,d$ des kleinen Kehlkreises; daher müssen die tangirenden Ebenen an beyden Punkten durch die Sehne (S T, $s\,t$) dieses

Kehlkreises gehen, welche parallel ist zu der Sehne R U des Kreises R Q V. Nun aber schneidet die erste verlängerte Sehne die Vertikalebene in l, daher muß die verlängerte Gerade K i durch diesen Punkt l gehen.

Die zwey Erzeugungslinien (V S, $v\ s$), (Q T, $q\ t$) des Hyperboloids, welche sich in den Punkt (M, m') kreuzen, treffen die Horizontalebene in Q und V; es folgt daraus, daß die tangirende Ebene an demselben Punkt die Horizontalebene nach der Geraden Q V schneide, der Sehne des Kreises R Q V, welche senkrecht auf den Riß A M der durch (M, m') geführten Meridianebene ist. Die zu V Q oder R U parallele Horizontale (M I, $m'\ i'$) trifft die Vertikalebene in i'. Die Gerade $i'\ l$ ist daher der Vertikalriß der tangirenden Ebene am Punkt (M, m'). Die beyden Risse $l\ i$, $l\ i'$ machen gleiche Winkel mit der Horizontalen $c\ d$, der Vertikalprojektion der Ebene des Kehlkreises.

136. Es ergiebt sich aus den vorstehenden Konstruktionen:

1tens. Wenn man den Punkt R oder V kennt, in welchem eine gerade Erzeugungslinie des Umdrehungs-Hyperboloids die horizontale Projektionsebene trifft, so erhält man den Riß der Ebene, welche die Fläche an irgend einem Punkt derselben Geraden berührt, wenn man durch R oder V eine Senkrechte auf den Riß derjenigen Meridianebene errichtet, welche durch den genommenen Punkt der Erzeugungslinie geht.

2tens. Jede, durch eine gerade Erzeugungslinie des Umdrehungs-Hyperboloids gehende Ebene berührt diese Fläche in dem Punkte, in welchem die Erzeugungslinie von derjenigen Meridianebene geschnitten wird, welche senkrecht auf die berührende Ebene ist.

137. Nach der Anordnung der Figur auf der Tafel IX ist auf der Horizontalebene die Projektion D C T des Kehlkreises des Hyperboloids die Gränze der Horizontalprojektion desselben. Diese Begränzungslinie berührt die Horizontalprojektionen aller Geraden der Fläche. Die Projektionen dieser nemlichen Geraden auf der Vertikalebene sind sämmtlich Tangenten zu einer Hyperbel, welche die Gränze der Vertikalprojektion des Umdrehungs-Hyperboloids bildet, und welche selbst die Projektion des Schnittes dieser Fläche durch die Meridianebene E F ist.

Um übrigens die Tafel nicht zu überladen, haben wir angenommen, das vorgestellte Hyperboloid seye begränzt, 1tens durch die horizontale Projektionsebene, 2tens durch eine horizontale Ebene $e'\ f'$, welche in der nemlichen Entfernung wie jene von der Ebene $c\ d$ des Kehlkreises liegt, so daß der Kreis G R E F zu gleicher Zeit der horizontale Riß, und die Projektion des Schnittes der Fläche durch jene letzte Ebene $e'\ f'$ ist.

Siebente Aufgabe.

Es ist ein hyperbolisches Paraboloid gegeben, mittelst zweyer geraden Leitlinien, und seiner Ebene des Parallelismus, nebst einem Punkt dieser Fläche; man soll die tangirende Ebene zu dem Paraboloid an diesem Punkte konstruiren?

138. Auflösung. Da das hyperbolische Paraboloid auf zwey verschiedene Weisen durch die gerade Linie erzeugt werden kann, und daher durch jeden Punkt der Fläche sich zwey Gerade ziehen lassen, die den beyden Erzeugungssystemen angehören, so ist ersichtlich, daß diese beyden Geraden, auch in jedem Punkt der Fläche die Stellung der tangirenden Ebene bestimmen. (Art. 75.)

Es seyen demnach Taf. X. (A B, $a\ b$), (A′ B′, $a'\ b'$), die gegebenen geraden Leitlinien, und G G′, $g\ g'$ die Risse der Ebene des Parallelismus. Nehmen wir an, man habe die beyden Leitlinien durch eine parallele Ebene zu der (G G′, $g\ g'$) geschnitten, und durch die Durchschnittspunkte (D, d), (C, c) die gerade Erzeugungslinie (C D, $c\ d$) des Paraboloids gezogen, und es sey (K, k) ein Punkt dieser Geraden, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll.

Um die zweyte, durch den Punkt (K, k) gehende gerade Erzeugungslinie des Paraboloids zu bestimmen, ist es vorerst erfoderlich, außer der (C D, $c\ d$) noch eine Gerade des ersten Systems zu bestimmen, um diese beyden sodann als die Leitlinien der zweyten Erzeugungsart zu gebrauchen. Dieses geschieht, indem man durch einen beliebig genommenen Punkt (S, s) der ersten Leitlinie (A B, $a\ b$) eine zu (G G′, $g\ g'$) parallele Ebene führt, und den Durchschnittspunkt dieser Ebene und der zweyten Leitlinie (A′ B′, $a'\ b'$) mit dem erstgenommenen Punkt (S, s) verbindet. Um die hiezu erfoderlichen Konstruktionen so sehr als möglich zu vereinfachen; ziehe man im der gegebenen Ebene (G G′, $g\ g'$) zwey beliebige Gerade (I E, $i\ e$), (I F, $i\ f$); durch den Punkt (S, s) ziehe man zu diesen Geraden die Parallelen (S U, $s\ u$), (S T, $s\ t$), diese Parallelen bestimmen eine parallele Ebene zu der gegebenen (G G′, $g\ g'$). Die erste jener Parallelen (S U, $s\ u$) durchschneidet die projektirende Ebene A′ B′ in dem Punkte (U, u), die zweyte Parallele (S T, $s\ t$) trifft dieselbe Ebene in dem Punkte (T, t). Man ziehe durch t und u die Gerade $t\ u$; diese begegnet der Vertikalprojektion $a'\ b'$ der zweyten Leitlinie in einem Punkt v; man bringe diesen Punkt in Horizontalprojektion nach V, und ziehe die Gerade (S V, $s\ v$), so hat man die gesuchte zweyte Erzeugungslinie; denn es ist einleuchtend, daß die Gerade (T U, $t\ u$) der Durchschnitt der Ebene A′ B′ und der zur Ebene (G G′, $g\ g'$) parallelen Ebene sey, und daß der Punkt (V, v) daher der Begegnungspunkt dieser letzten Ebene und der Leitlinie (A′ B′, $a'\ b'$) ist.

Da sonach zwey Erzeugungslinien (C D, $c d$), (S V, $s v$) der ersten Erzeugung bekannt sind, so müssen diese als die Leitlinien des zweyten Systems genommen werden, um die Gerade dieses zweyten Systems zu finden, welche durch den Punkt (K, k) geht.

Nun aber müssen alle Erzeugungslinien der zweyten Erzeugungsart parallel seyn zu der Ebene der beyden Leitlinien (A B, $a b$), (A′ B′, $a' b'$) der ersten Art. (Art. 123) Wenn man daher durch den Punkt (K, k) zwey Gerade (K L, $k l$), (K M, $k m$) wechselsweise parallel zu den beyden Geraden (A B, $a b$) und (A′ B′, $a' b'$) zieht, so ist die Ebene dieser Geraden parallel zu der Ebene des Parallelismus des zweyten Erzeugungssystems und sie muß folglich die zu konstruirende Erzeugungslinie enthalten. Aber die Geraden (K L, $k l$), (K M, $k m$) treffen die projektirende Ebene S V der geraden (S V, $s v$) in den Punkten (L, l), (M, m). Man ziehe daher die Gerade (M L, $m l$), welche sonach der Durchschnitt der Ebene S V und der zu den beyden Leitlinien parallelen Ebene ist. Der Begegnungspunkt dieser Geraden (M L, $m l$) und der Geraden (C D, $c d$), dessen Vertikalprojektion n ist, gehört offenbar der verlangten Erzeugungslinie. Wenn man daher die Horizontalprojektion N desselben Punkts bestimmt, und die Gerade (N K, $n k$) zieht, so ist diese die Erzeugungslinie des zweyten Systems, welche durch den gegebenen Punkt (K, k) geht.

Die gegebene Erzeugungslinie des ersten Systems schneidet die horizontale Projektionsebene in dem Punkte P. Die so eben bestimmte Erzeugungslinie des zweyten Systems trifft die beyden Projektionsebenen in den Punkten Q und X, daher sind die Geraden P Q R, X R Y die Risse der verlangten tangirenden Ebene.

139. Um eine anschauliche Figur zu erhalten, hat man auf der Tafel X die Projektionen einer hinreichenden Zahl von Erzeugungslinien des Paraboloids konstruirt. Auf der Horizontalbene sind diese Projektionen tangirend zu einer Kurve $\alpha \beta \gamma$, welche die Gränze der Horizontalprojektion der Fläche bildet; auf der Vertikalebene berühren jene Projektionen eine Kurve $\delta \varepsilon \zeta$, die Gränze der Vertikalprojektion der Fläche.

Um die Figur jedoch nicht zu sehr zu überladen, so hat man das Paraboloid als begränzt angenommen, 1tens durch die horizontale Projektionsebene, 2tens durch die Horizontalebene Z Z′, drittens durch die Vertikalebene Z Z″. Die horizontale Projektionsebene schneidet das Paraboloid nach einer Kurve $\vartheta \lambda \mu$, welche man sorgfältig bestimmt hat. Diese Linie wird gebildet durch die Reihe von Punkten, in denen die verschiedenen geraden Erzeugungslinien des Paraboloids die horizontale Projektionsebene durchschneiden; und es ist daher leicht dieselbe zu verzeichnen, sobald man eine genügende Anzahl von Erzeugungslinien des Paraboloids konstruirt hat.

Die horizontale Ebene Z Z′ schneidet das Paraboloid nach einer ähnlichen Kurve, die auf dieselbe Weise aus den Begegnungspunkten dieser Ebene mit den verschiedenen Erzeugungslinien gebildet wird, und deren Horizontalprojektion mit der $\vartheta\ \lambda\ \mu$ zusammenfällt. Die nicht zur Lösung der vorgelegten Aufgabe gehörigen Erzeugungslinien der Fläche sind auf eine regelmäßige Art auf beyden Projektionen des Paraboloids angeordnet.

140. Diese Anordnung, welche außer den nöthigen Konstruktionen zur Bestimmung der verlangten tangirenden Ebene eine deutliche und leichte Darstellung eines hyperbolischen Paraboloids gewährt, gründet sich auf eine Erzeugungsart des hyperbolischen Paraboloids durch die gerade Linie, wobey man die Anwendung einer Ebene des Parallelismus sich entheben kann.

Es beruht diese Erzeugungsart auf dem leicht zu beweisenden Satz: „wenn eine bewegliche Gerade auf zwey festen Geraden dergestalt fortrückt, daß sie immer parallel zu einer nemlichen Ebene bleibt, so schneidet sie in jeder Stellung auf den festen Geraden proportionale Theile ab“; und auf der Contraposition desselben, „wenn eine bewegliche Gerade dergestalt auf zwey Festen fortrückt, daß sie auf Beyden immer proportionale Theile abschneidet, so ist sie in allen ihren Stellungen parallel zu einer nemlichen Ebene und die Fläche, die sie erzeugt, gehört zu dem Geschlecht der hyperbolischem Paraboloid.“

141. Dieses festgesetzt, so seyen M N und M P Fig. 2. *) Zwey unter sich senkrechte Vertikalebenen, und es sey V V′ die Horizontalprojektion einer Geraden, welche senkrecht auf die Ebene M N ist, und folglich parallel zur Ebene M P. Nehmen wir auf dieser Geraden, welche wir (V V′, V″, v v') benennen wollen, zwey beliebige Punkte (V, V″, v), (V′, V″, v'); durch diese Punkte ziehen wir zwey beliebige Geraden (A B, a b, v t), (A′ B′, a' b', v' t), deren Horizontalprojektionen A B, A′ B gleiche Winkel machen mit den Projektionsaxen M N, M P, und deren Vertikalprojektionen v t, t v' parallel sind, und woraus sich ergiebt, daß die Projektionen a b, a' b' derselben Geraden auf gleiche Weise gegen die M N geneigt seyn müssen. Endlich führen wir senkrecht auf M N eine unbestimmte Reihe gleichweit entfernter Ebenen V′ V″, O C′, K E′, F I′, D L′, T T″ rc., von denen die Eine durch den Punkt V″, und die Andere durch den Punkt T geht. Es ist einleuchtend, daß durch diese Ebenen die Geraden (A B, a b, v t), (A′B′, a' b', t v') in eine unbestimmte Reihe gleicher Theile (V C′, V″ C, v c), (C E, C′ E′, c e), (E I, C′ I′,

*) Die nachfolgenden Konstruktionen sind aus dem Traité de géométrie descriptive von L. L. Vallée entlehnt.

$e\ i$) ꝛc. (T D, T′ D′, $t\ d$), (D F, D′ F′, $d\ f$), (F K, F′ K′, $f\ k$) ꝛc. getheilt werden. Ist dieses geschehen, so verbinde man die Punkte (V, V″, v), (T, T′, t) durch die Gerade (V T, V″ T′, $v\ t$); sodann den, bey (V, V″, v) nächstliegenden Punkt (C, C′, c) mit dem, bey (T, T′, t) nächstliegenden Punkt (D, D′, d) durch die Gerade (C D, C′ D′, $c\ d$); hierauf die entsprechenden Punkte (E, E′, e) und (F, F′, f), (I, I′, i) und (K, K′, k) ꝛc., so sind die erhaltenen Geraden (V T, V″, T′, $v\ t$), (C D, C′ D′, $c\ d$), (E F, E′ F′, $e\ f$), (I K, I′ K′, $i\ k$) ꝛc., die Erzeugungslinien eines hyperbolischen Paraboloids; und da sie sich auf die Ebene M P nach den Garaden $v\ t$, $c\ d$, $e\ f$ ꝛc. projektiren, welche die Parallelen $v'\ t$, $v\ t'$ in gleiche Theile theilen, so folgt daraus, daß diese Erzeugungslinien parallel sind zu der Ebene (G G′, G′ R, g g′), von welcher die Risse G G′, $g\ g'$ senkrecht auf M P sind, und der Riß G′ R parallel zu $v\ t$.

142. Die Erzeugungslinien des ersten Erzeugungssystems ergeben sich, wie man sieht, äußerst leicht; wir werden sogleich zeigen, daß es sich eben so mit jenen des zweyten Systems verhält.

Vorerst hat die Ebene des Parallelismus der zweyten Erzeugung, da sie parallel seyn muß, zu den zwey Leitlinien (A B, $a\ b$, $v\ t'$), (A′ B′, $a'\ b'$, $t\ v'$), als Vertikalriß auf der Ebene M P eine zu $v\ t'$ und $t\ v'$ parallele Gerade G′ Q, und als Horizonlalriß, eine auf M P senkrechte Gerade G G′. Auf der andern Seite können zwey beliebige Gerade der ersten Erzeugung als die Leitlinien der zweyten Erzeugung dienen (Art. 123.); man kann daher als diese Leitlinie die Geraden (V T, V″ T′, $v\ t$) und (V′ T, V″ T″, $v'\ t'$) nehmen. Nun aber folgt hieraus, daß die zweyte Erzeugungsart symetrisch mit der Ersten ist, denn alle die Größen, welche diese beyden Systeme bestimmen, umd welche wir hier zusammenstellen:

	1te Erzeugungsart.	2te Erzeugungsart.
Ebenen des Parallelismus	(G G′, G′ R) . . .	(G G′, G′ Q)
Leitlinien	(A B, $a\ b$, $v\ t'$) . .	(V′ T, V″ T″, $v'\ t'$)
	(A′ B′, $a'\ b'$, $t\ v'$) .	(V T, V″ T′, $v\ t$)

sind symetrisch, in Bezug auf die Vertikalebene G G′; daher ergeben sich die Geraden der einen Erzeugungsart mittelst derselben Konstruktionen, wie die der Andern. So zum Beyspiel, wenn man eine Ebene $\varphi\ \varepsilon$ parallel zu der Ebene G′, Q führt, so schneidet diese Ebene die Leitlinien (V T, $v\ t$), (V′ T, $v'\ t'$) in zwey Punkten (I, φ), (K, ε) und die Gerade (I K, F′ E′, $\varphi\ \varepsilon$) ist eine Erzeugungslinie des zweyten Systems.

143. Wir bemerken noch im Vorbeygehen, daß wenn die Gerade $\varphi\,\varepsilon$ durch den Punkt x gezogen ist, wo die Projektion $e\,f$ einer Geraden der ersten Erzeugung der Linie G t begegnet, die erhaltene Erzeugungslinie (I K, F′ E′, $\varepsilon\,\varphi$) und die Erzeugungslinie (E F, E′ F′, $e\,f$) symetrisch sind, in Bezug auf die Ebene G G′. Eben so sind die Erzeugungslinien (I K, I′ K′, $i\,k$), (I K, E′ F′, $\varepsilon\,\varphi$) der zwey Systeme symetrisch, in Bezug auf die Ebene V″ S. Man sieht hieraus, daß die Geraden der zwey Erzeugungssysteme zu zwey und zwey symetrisch gelegen sind, in Bezug auf die Ebenen G G′, V′ S′; und daß folglich jede von diesen Ebenen das Paraboloid in zwey symetrische Theile theilt.

Es ist demzufolge leicht zu ersehen, daß die genannten zwey Ebenen G G′, V″ S nicht von den Ebenen der Hauptschnitte des Paraboloids (Art. 117.) verschieden sind, und daß ihre Durchschnittslinie (G G′, V″ S, z) die Axe der Fläche ist; da ferner die eben angegebenen Konstruktionen dieselben sind, deren wir uns bey der Figur 1 bedient haben, so folgt hieraus, daß die Begränzungslinie $\delta\,\varepsilon\,\zeta$ der Vertikalprojektion und die $\alpha\,\beta\,\gamma$ der Horizontalprojektion zugleich auch die Hauptschnitte der Fläche und folglich Parabeln sind; und da alle parallelen Schnitte des Paraboloids ähnlich sind, so ist die Linie $\vartheta\,\lambda\,\mu$ ebenfalls eine Parabel.

144. Im Allgemeinen werden bey der Aufgabe, mit welcher wir uns beschäftigen, die gegebenen Größen nicht auf so symetrische Art, in Bezug auf die Projektionsebenen geordnet seyn, in diesem Falle wird man die zu machenden Konstruktionen sehr vereinfachen, wenn man die Stellung der Projektionsebenen dergestalt anordnet, daß eine derselben senkrecht auf die Ebene des Parallelismus der Fläche wird.

Achte Aufgabe.

Es sind die drey geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netze gegeben, nebst einem Punkte dieser Fläche, man soll die tangirende Ebene an diesem Punkte konstruiren?

145. Auflösung. Man bestimmt die Stellung irgend eine Erzeugungslinie des Hyperboloids, wenn man durch einen auf der ersten gegebenen Leitlinie genommenen Punkt und durch die zweyte Leitlinie eine Ebene führt, welche die Dritte in einem gewissen Punkte schneidet, und wenn man diesen gefundenen Punkt mit dem erstgenommenen verbindet. Ueberdies kann das Hyperboloid von einem Netz auf doppelte Art durch die gerade Linie erzeugt werden, und man kann je drey beliebige Gerade eines Erzeugungssystems als die Leitlinien des zweyten Systems gebrauchen.

Hat man daher außer der, durch den gegebenen Berührungspunkt gehenden geraden Erzeugungslinie mittelst der gegebenen Leitlinien noch zwey andere Gerade der nemlichen Erzeugung konstruirt, so bedient man sich dieser drey Geraden als neuer Leitlinien, um die durch den Berührungspunkt gehende Gerade der zweyten Erzeugung zu bestimmen. Die, durch die beyden gefundenen geraden Erzeugungslinien geführte Ebene, ist die verlangte tangirende. Diese Lösung der vorgelegten Aufgaben, nur durch die gerade Linie und die Ebene, bedarf zu ihrer Erklärung keiner Figur; wir bemerken nur noch, daß die erforderlichen Konstruktionen sich noch bedeutend vereinfachen, wenn man die Stellung der Projektionsebenen so wählt, daß eine derselben senkrecht auf irgend eine der drey gegebenen geraden Leitlinien wird. Wir nehmen aber hier Veranlassung, die Konstruktionen zu einer regelmäßigen Darstellung eines Hyperboloids von einem Netze anzugeben, wobey wir diese Fläche nicht durch drey gerade Leitlinien, sondern durch drey elliptische bestimmt annehmen.

146. Es seyen die Vertikale (A, $a\,a'$) (Taf. XI.) und die zwey unter sich rechtwinkligen Horizontalen (B B', b), (C D, $c\,d$), von denen die Letzte parallel zur vertikalen Projektionsebene angenommen ist, die drey Haupt-Axen eines Hyperboloids von einem Netze (Art. 116.). Die Ebene der zwey horizontalen Axen schneidet die Fläche nach einer, über denselben Axen konstruirten Ellipse (C B D, $c\,d$); zwey andere, von der Ebene $c\,d$ gleich weit abstehende Horizontalebenen $e\,f$, $e'\,f'$ schneiden das Hyperboloid nach zwey gleichen und der (C B D B', $c\,d$) ähnlichen Ellipsen, die sich auf die horizontale Projektionsebene nach der einzigen Ellipse E V F Q projektiren.

Diese drey Linien nehmen wir als gegeben an, und wir setzen noch als bekannt voraus, daß die Geraden der windischen Flächen des zweyten Grads sich auf die Ebenen der Hauptschnitte dieser Flächen als Tangenten zu diesen Schnitten projektiren. Die Tangenten zu der Ellipse D B C B' sind daher die Horizontalprojektionen der geraden Erzeugungslinien des gegebenen Hyperboloids.

Wenn demnach die Horizontalprojektion M eines Punktes der Fläche bekannt ist, so geschieht die Bestimmung der Vertikalprojektion m oder m' desselben, und die Konstruktion der tangirenden Ebene an diesem Punkte mittelst der zwey geraden Erzeugungslinien, die sich in demselben kreuzen, auf die gleiche Weise, wie wir es bey dem Umdrehungs-Hyperboloid (Art. 133 et seq.) angegeben haben. Um Wiederholungen zu vermeiden, haben wir die gleichnamigen Punkte in den Tafeln IX und XI mit denselben Buchstaben bezeichnet. Wir begnügen uns nur noch anzuführen, daß die Gerade (A, $a\,a'$) Taf. XI. zwar eine Hauptaxe der Fläche ist, aber keine Umdrehungsaxe, und daß die Gerade A M nicht senkrecht auf den Riß R U ist, wie in der Tafel IX.

147. Man wird bemerken, daß die zwey Halbellipsen E V F, E U F (Taf. XI.) durch die Horizontalprojektionen der Geraden des Hyperboloids in die gleiche Anzahl von Bögen getheilt sind; daß je zwey dieser Bögen in gleichen Abständen von der großen Axe E F gleich sind, und daß endlich die Horizontalprojektion irgend einer Geraden des Hyperboloids immer durch zwey Theilungspunkte der Ellipse E V F R geht. Die Abtheilungsart dieser Ellipse gründet sich auf einige Eigenschaften des Hyperboloids, die wir als durch die Analysis bewiesen annehmen.

Das Hyperboloid von einem Netze kann, so wie alle Flächen des zweyten Grads, durch zwey Reihen paralleler Ebenen nach Kreisen geschnitten werden. Drey dieser Kreise, die einem nemlichen System angehören, bestimmen daher die Bewegung der geraden Erzeugungslinie. Wenn man annimmt, daß einer dieser Kreise in gleiche Theile getheilt ist, so theilt die bewegliche Gerade die andern zu diesem parallelen Kreisse der Fläche in die nemliche Anzahl gleicher Theile; es folgt daraus, daß zwey Kreise und eine gerade Erzeugungslinie das Hyperboloid bestimmen, was durch drey, in parallenen Ebenen gegebene Kreise geht.

Zwey parallele Ebenen, welche unter einer bestimmten Neigung durch die großen Axen (E F, $e f$), (E F, $e' f'$) der zwey Ellipsen (E V F, $e f$), (E V F, $e' f'$) geführt sind, schneiden das gegebene Hyperboloid nach zwey gleichen parallelen Kreisen von einem Durchmesser gleich E F, und von denen die Ellipse E V F R die gemeinschaftliche Horizontalprojektion ist.

Denken wir uns die Umfänge dieser beyden Kreise in eine gerade Anzahl gleicher Bögen getheilt, von den Endpunkten (F, f), (F, f') ihrer parallelen Durchmesser anfangend. Wir werden ein neues Hyperboloid erzeugen, wenn wir von dem Punkt (F, f) des untern Kreises eine Gerade dergestalt nach einem Theilpunkte des oberen Kreises ziehen, daß diese Gerade nicht in einer Ebene mit den beyden Mittelpunkten (A, a), (A, a') ist. Diese Gerade bestimmt die Stellung aller übrigen Geraden des einen Erzeugungssystems. Wenn man um einen Bogen auf dem untern Kreise vorrückt, rückt man ebenfalls um einen Bogen auf dem obern Kreise vor, die Gerade, welche die Endpunkte der beyden Bögen verbindet, ist eine zweyte Stellung der Erzeugungslinie. Ueberdem kann man von dem Punkte (F, f) zwey Gerade von gleicher Länge nach zwey bestimmten Punkten des oberen Kreises ziehen, und es ist einleuchtend, daß diese beyden von (F, f) gleich weit entfernten Punkte in einer auf E F senkrechten Ebene wie V V′ liegen müssen. Die Gerade, welche (F, f) mit dem zweyten Punkte verbindet, bestimmt die Stellung aller Geraden der zweyten Erzeugung.

Die zwey Kreise von den Durchmessern (E F, $e f$), (E F, $e' f'$) des zweyten

Hyperboloids projektiren sich nach der einzigen Ellipse E F U, daher projektiren sich die Geraden dieser Fläche, welche sich in den Theilungspunkten der zwey Kreise kreuzen, nach Geraden, welche sich in den Theilungspunkten der Ellipse E F U kreuzen und da die Geraden beyder Erzeugungssysteme des Hyperboloids durch die nemlichen Theilpunkte der zwey Kreise gehen, so muß die Horizontalprojektion irgend einer jener Geraden durch zwey Theilungspunkte der Ellipse gehen. Es ist, um diese Eintheilung zu erhalten, nicht nöthig, die Neigung der Ebenen jener Kreise in Bezug auf die Ebene der Ellipse zu kennen: man beschreibt über E F als Durchmesser einen Halbkreis, welchen man in gleiche Theile theilt, und man fällt aus den Theilungspunkten Senkrechte auf die Gerade E F; diese Senkrechten theilen die Ellipse E F V auf die verlangte symetrische Art.

Da jedoch in der Nähe der Geraden E e, F f jene Senkrechten den Umfang der Ellipse unter zu spitzem Winkel schneiden würden, so ist es gut, die Neigung der Ebene zu bestimmen, welche das Hyperboloid nach einem Kreise schneidet. Die Senkrechte Z X auf die Axe B B′ schneidet der Kreisumfang vom Durchmesser E F in dem Punkte X; man ziehe durch denselben den Halbmesser A X. Der Winkel Z A X mißt die Neigung der Ebene der Ellipse E F V und der Ebene des Kreises, welcher sich horizontal nach dieser Ellipse projektirt. Hat man den Viertelskreis E H in gleiche Theile getheilt, so fälle man aus jedem Theilpunkt wie G′ eine Senkrechte G′ g' auf A H; man trage A g' auf dem Halbmesser A X nach A g, so werden die unter sich rechtwinkligen und wechselsweise zu den Axen B B′, C D parallelen Geraden g G, G′ G sich in einem Theilpunkte G der Ellipse E V F R schneiden.

148. Diese Eintheilung der Ellipse ist sehr bequem, um darnach ein Modell eines Hyperboloids von einem Netze aus Fäden zu verfertigen.

Man nimmt zwey gleiche und ähnlich gestellte elliptische Scheiben, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die senkrecht auf ihre Ebenen ist. Auf dem Rande jeder Scheibe befestigt man an den oben angegeben Theilungspunkten kleine Stifte oder Häkchen. Der Faden, welcher nacheinander die entsprechenden Theilpunkte beyder Ellipsen verbindet, erzeugt das Hyperboloid, dessen Kehle in einer Ebene liegt, die parallel zu den beyden Scheiben, und in gleicher Entfernung von diesen Scheiben ist. Wenn man anstatt der elliptischen zwey kreisförmige Scheiben nähme, so würde das Hyperboloid von einem Netze ein Umdrehungs-Hyperboloid nach der Figur der Tafel IX.

---

149. Aus der Auflösung der bis jetzt vorgelegten Aufgaben über die Konstruktion der tangirenden Ebenen zu den windischen Flächen des zweyten Grads geht hervor, daß der Berührungspunkt dieser Flächen mit ihren tangirenden Ebenen sich aus dem Durch-

schnitte zweyer geraden Linien ergebe, und daß diese zwey Geraden, welche den beyden Systemen von geraden Linien angehören, nach denen diese Flächen erzeugt werden können, den vollständigen Schnitt derselben durch die tangirende Ebene ausmachen.

Wenn daher eine dieser Flächen gegeben ist, und es handelt sich, den Berührungspunkt derselben mit einer Ebene zu finden, welche durch eine ihrer geraden Erzeugungslinien geführt ist, so wird die Anwendung der in Art. 132. vorgetragenen Methode sehr einfach, denn man hat nur nöthig, die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit noch zwey anderen Geraden des nemlichen Erzeugungssystems zu konstruiren, und diese Punkte durch eine Gerade zu verbinden. Der Begegnungspunkt dieser letzten Geraden, mit der gegebenen Erzeugungslinie ist offenbar der gesuchte Berührungspunkt.

150. Wir werden nun zeigen, daß man bey jeder windischen Fläche, welches auch die besondere Art ihrer Erzeugung sey, ein Hyperboloid von einem Netz konstruiren könne, welches die vorgelegte Fläche nach einer geraden Erzeugungslinie berührt, und welches folglich an allen Punkten dieser gemeinschaftlichen Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit derselben hat.

Von den Berührungen der windischen Flächen unter sich.

151. Es seyen A B, A′ B′, A″ B″ (Taf. XII. Fig. 2.) drey beliebige krumme Leitlinien einer windischen Fläche, und A A′ A″ eine gerade Erzeugungslinie derselben, welche die drey Krummen in den Punkten A, A′, A″ schneidet. Nachdem man durch jeden dieser Punkte zu der Leitlinie, welcher er angehört die Tangenten A α, A′ α', A″ α'' gezogen hat, betrachte man diese als die geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netz. Dieses Hyperboloid wird offenbar tangirend zu der vorgelegten Fläche seyn, in allen Punkten der Geraden A A′ A″, welche jenes mit dieser gemein hat; denn indem die bewegliche Gerade sich auf den unendlich kleinen Elementen der krummen Leitlinien bewegt, welche diese mit ihren Tangenten an den Punkten A, A′, A″ gemein haben, ist sie zu gleicher Zeit auf beyden Flächen, diese haben daher das windische Flächenelement A a A′ a' A″ a'', was zwischen zwey aufeinanderfolgenden Stellungen A A′ A″, a a' a'' der beweglichen Geraden gefaßt ist, mit einander gemein; und folglich auch an jedem Punkte dieses Elements eine gemeinschaftliche tangirende Ebene.

Es ist einleuchtend, daß, wenn man durch die drey Punkte A, A′, A″ drey andere Linien A C, A′ C′, A″ C″ der windischen Fläche führte, die bewegliche Gerade die nemliche Fläche erzeugen würde, wenn sie sich auf diesen, oder auf den drey ersten Krummen, als Leitlinien, bewegte, und wenn man an den Punkten A, A′, A″, die Tangenten zu den drey Krummen A C, A′ C′, A″ C″ konstruirte, so würden diese ein neues

Hyperboloid bestimmen, welches ebenfalls längs der Geraden A A′ A″ tangirend zu der allgemeinen windischen Fläche wäre. Die geraden Leitlinien des Hyperboloids, welches eine windische Fläche nach einer gemeinschaftlichen Erzeugungslinie A A′ A″ berührt, sind daher nur der Bedingung unterworfen, durch drey Punkte A, A′, A″ dieser Geraden zu gehen, und in den tangirenden Ebenen zu der windischen Fläche an eben diesen Punkten enthalten zu seyn.

152. Von welcher besonderen Art demnach eine windische Fläche seyn mag, so giebt es eine unendliche Menge Hyperboloide von einem Netz, welche ein Element mit dieser Fläche gemein haben können, oder sie nach einer Geraden berühren. Jedes von diesen Hyperboloiden hat als Leitlinien drey Gerade, welche willkührlich in den tangirenden Ebenen und durch drey Punkte der geraden Berührungslinie der windischen Fläche und des Hyperboloids gezogen sind.

153. Die berührenden Hyperboloide einer windischen Fläche werden hyperbolische Paraboloide, wenn die drey, in den drey tangirenden Ebenen genommenen geraden Leitlinien parallel zu einer Ebene sind. Die windische Fläche kann daher auch von einer unendlichen Menge hyperbolischer Paraboloide nach einer geraden Erzeugungslinie berührt werden.

Allgemeine Aufgabe.

Die Erzeugung einer windischen Fläche ist bekannt und gegeben; man soll durch einen ebenfalls gegebenen Punkt dieser Fläche eine tangirende Ebene zu derselben führen?

154. Auflösung. Nachdem man die durch den Berührungspunkt der vorgelegten Fläche gehende gerade Erzeugungslinie konstruirt hat, führe man durch diese Gerade drey verschiedene Ebenen. Diese Ebenen sind sämmtlich tangirend zu der windischen Fläche, und man bestimmt ihre Berührungspunkte nach der (Art. 132.) vorgetragenen Methode. Ist dieses geschehen, so führe man in den drey tangirenden Ebenen, und durch die drey gefundenen Berührungspunkte, drey beliebige Geraden, und nehme diese als die geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netze. Dieses Hyperboloid hat an allen Punkten der oben genannten geraden Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit der vorgelegten windischen Fläche. Die Aufgabe kommt also darauf zurück, durch einen gegebenen Punkt eines Hyperboloids von einem Netze, dessen drey gerade Leitlinien bekannt sind, eine tangirende Ebene zu führen; und ist (Art. 145.) aufgelößt. Die drey Geraden Leitlinien des tangirenden Hyperboloids können, da ihre Lage in den drey tangi-

renden Ebenen der windischen Fläche unbestimmt ist, so gewählt werden, daß sie parallel zu einer nemlichen Ebene sind, und in dieser Hypothese wandelt das Hyperboloid sich in ein berührendes hyperbolisches Paraboloid um. (Art. 122.)

Wir werden weiter unten (Art. 328.) aus diesen Eigenschaften der windischen Flächen eine allgemeine graphische Auflösung des Problems der Tangenten ableiten.

Fünftes Kapitel.

Tangirende Ebenen zu krummen Flächen, deren Berührungspunkt nicht gegeben ist.

Bedingungen, welche die Stellung der tangirenden Ebenen zu einer krummen Fläche bestimmen.

155. In den verschiedenen Aufgaben über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, welche wir bis jetzt aufgelößt haben, setzten wir stets voraus, daß der Punkt, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden sollte, auf der Flläche genommen, uud daß er selbst der Berührungspunkt sey: diese einzige Bedingung war hinreichend, um die Stellung der Ebene zu bestimmen. Aber dem ist nicht also, sobald der Punkt, durch den die Ebene gehen soll, außerhalb der Fläche genommen ist.

156. Soll die Stellung einer Ebene bestimmt seyn, so muß sie drey verschiedenen Bedingungen entsprechen, von denen jede gleichbedeutend damit ist: durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Nun aber entspricht im Allgemeinen die Eigenschaft, tangirend zu einer krummen Fläche zu seyn, sobald der Berührungspunkt nicht gegeben ist, nur einer einzigen von diesen Bedingungen. Wenn daher die Stellung einer Ebene durch Bedingungen dieser Art festgesetzt werden soll, so bedarf es deren, im Allgemein drey. In der That, nehmen wir an, es seyen uns drey krummen Flächen gegeben, und es sey eine Ebene tangirend zu einer von ihnen; so können wir uns vorstellen, die Ebene bewege sich um diese Fläche, ohne daß sie aufhöre sie zu berühren. Sie wird dieses nach allen erdenklichen Richtungen thun können, nur wird sich nach Masgabe der Ortsveränderung der Ebene, der Berührungspunkt auf der Fläche bewegen, und seine Bewegung wird in derselben Richtung statt haben, wie die der Ebene. Nehmen wir nun an, diese Bewegung geschehe so lange nach irgend einer Seite hin, bis die Ebene der zweyten