Von den Flächen der zweyten Ordnung.

113. Unter Flächen der zweyten Ordnung oder des zweyten Grads begreift man diejenigen, welche, wenn sie von einer Ebene geschnitten werden, immer eine Kurve der zweyten Ordnung hervorbringen. Sie haben, wie diese, die Eigenthümlichkeit von einer Geraden in nicht mehr als zwey Punkten getroffen zu werden.

Die Eigenschaften der Flächen der zweyten Ordnung lassen sich nur durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie herleiten, woher auch die Benennung „Fläche vom zweyten Grad" gezogen ist, oder durch rein geometrische Theorien, welche aber durchaus außer den Gränzen dieses Lehrbuches liegen. *) Jedoch wegen der häufigen Anwendung, welche diese Fläche in den graphischen Künsten finden; ist es unerläßlich, wenn auch nicht die Eigenschaften derselben, doch wenigstens ihre Gestalt und Erzeugung zu kennen; und diese wollen wir in den nachfolgenden Paragraphen auseinandersetzen.

114. Der Kegel von kreisförmiger Grundlinie kann, wie bekannt, von einer Ebenen nach den drey krummen Linien vom zweyten Grad, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden. (Art. 262 et seq.) Diese drey Kurven sind symeterisch, **) in Beziehung auf zwey unter sich senkrechte Gerade, welche man Haupt-Axen des Kegelschnittes nennt; sie haben Scheitel und diese Scheitel sind die Begegnungspunkte der Linie mit ihren Haupt-Axen.

Wir setzen als bekannt voraus, daß man diese Kurven mittelst ihrer Haupt-Axen zu zeichnen verstehe. (Diejenigen, welche diese Vorkenntnisse noch nicht besitzen sollten, finden in dem §. 1. des Anhanges eine kurzgefaßte Darstellung der Konstruktion und der vorzüglichsten Eigenschaften der Kegelschnittslinien.)

115. Man denke sich durch irgend einen Punkt des Raumes drey unter sich senkrechte Geraden, und, um unsere Vorstellung zu fixiren, wollen wir annehmen, zwey von diesen Geraden wären in einer Horizontalebene und die Dritte folglich vertikal. Denken wir uns sofort diesen gemeinschaftlichen Punkt der drey Geraden als Mittelpunkt dreyer

*) Man sehe hierüber Poncelet's Traité des propriétés projectives des figures. (Siehe die Vorrede.)

**) Zwey ebene Figuren, oder auch zwey Theile einer solchen Figur sind symetrisch, wenn ihre korrespondirenden Punkte auf Parallelen liegen, die sämmtlich von einer nemlichen Senkrechten, der Axe der Symetrie, durch ihre Mitten geschnitten werden. — Zwey Körper sind symetrisch von Gestalt und Stellung, wenn die korrespondirenden Punkte der Beyden durch parallele Gerade verbunden werden können, deren Mitten in einer nemlichen auf dieselben senkrechten Ebene liegen, welche die Ebene der Symetrie heißt.

Kugeln von den Halbmessern a, b, c; diese Kugeln werden die drey Geraden in sechs Punkten schneiden, so, daß die zwey Punkte, welche auf einer nemlichen Geraden liegen, um die Abstände 2 a, 2 b, 2 c, von einander entfernt sind.

Dieses festgesetzt, so konstruire man zwey Ellipsen, welche, als gemeinschaftlichen Mittelpunkt, den Durchschnitt der senkrechten Geraden haben, und von denen die Eine als Haupt-Axen die zwey Geraden 2 a und 2 b hat, und die Andere, die zwey Geraden 2 a, 2 c. Nachdem man durch die Gerade 2 c eine Reihe von Ebenen geführt hat, von denen jegliche die Ebene der ersten Ellipse nach einer, durch den Mittelpunkt gehenden Geraden schneidet, konstruire man über diesen zwey Geraden, als Haupt-Axen, eine neue Ellipse. Diese Reihe von Ellipsen, welche als gemeinschaftliche Axe die Gerade 2c haben, gehört einer Fläche vom zweyten Grad, welche man Ellipsoid nennt.

Wenn man sich eine Reihe von Hyperbeln denkt, welche die Gerade 2 c als eingebildete Axe gemein haben, und als Scheitel die Punkte der Ellipse, welche über den Geraden 2 a, 2 b, als Axen konstruirt ist; so gehört diese Reihe von Hyperbeln einer Fläche vom zweyten Grad, welche Hyperboloid von einem Netze genennt wird. Die Ellipse, deren Axen 2 a, 2 b sind, bildet die Kehle des Hyperboloids von einem Netz. Diese Fläche besteht aus zwey gleichen Theilen, welche nach jener Kehllinie tangirend in einander laufen, und sich von da an, auf und abwärts ins Unendliche ausdehnen.

Man substituire der Ellipse, welche als Axen, die Geraden 2 a, 2 b hat eine, über denselben Axen konstruirte Hyperbel, deren reelle Scheitel an den Endpunkten der Geraden 2 a liegen. Durch die Gerade 2 c führe man eine Reihe von Ebenen, von denen jede die Ebene der Hyperbel nach einer Geraden schneidet, das Stück dieser Geraden, was zwischen den beyden Zweigen der Hyperbel gefaßt ist, nehme man als reelle Axe einer neuen Hyperbel, welche als zweyte oder eingebildete Axe die Gerade 2 c hat. Die Reihe dieser neuen Hyperbeln gehören einer dritten Fläche vom zweyten Grad, welche Hyperboloid von zwey Netzen heißt.

116. Die drey Geraden 2 a, 2 b, 2 c sind die Haupt-Axen der Flächen der zweyten Ordnung; ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt der Fläche. *) Die Begegnungspunkte der Fläche mit ihren Axen sind die Scheitel derselben. Bey dem Ellipsoid sind die sechs Scheitel reell; bey dem Hyperboloid von einem Netz

*) Dieser Mittelpunkt hat die Eigenschaft, daß er alle durch denselben geführten Sehnen der Fläche in zwey gleiche Theile theilt, Sehne einer Fläche nennt man nemlich das Stück einer Geraden, welche die Fläche in zwey Punkten schneidet, was zwischen diesen Durchschnittspunkten gefaßt ist.

beschränkt sich die Zahl der reellen Scheitel auf vier, und auf zwey bey dem Hyperboloid von zwey Netzen. Man nennt die Schnitte der drey Ebenen, wellche durch zwey und zwey Axen gehen die Haupt-Schnitte der Fläche.

Zwey andere Flächen vom zweyten Grad, welchen man die Benennung elliptisches Paraboloid und hyperbolisches Paraboloid gegeben hat, haben keinen Mittelpunkt oder ihr Mittelpunkt liegt vielmehr im Unendlichen, und sie haben nur einen einzigen reellen Scheitel.

117. Denken wir uns zwey, unter sich senkrechte Ebenen, und in denselben zwey Parabeln, deren große Axen in dem Durchschnitt der Ebenen liegen, und welche als gemeinsamen Scheitel einen Punkt dieses Durchschnitts haben. Nehmen wir überdies die Parabeln von verschiedener Weite an, und lassen wir, während die eine Parabel fest bleibt, die andere sich so bewegen, daß ihre Ebenen immer senkrecht sind, und daß der Scheitel der beweglichen Parabel beständig auf der Festen bleibe. Durch diese Bewegung wird die mobile Parabel, wenn sie nach derselben Richtung divergirt, wie die feste Parabel, das elliptische Paraboloid erzeugen, und wenn sie nach entgegengesetzter Richtung divergirt, so erzeugt sie das hyperbolische Paraboloid.

118. Alle Flächen der zweyten Ordnung reduziren sich auf die fünf Folgenden: das Ellipsoid, das Hyperboloid von einem Netz, das Hyperboloid von zwey Netzen, das elliptische Paraboloid und das hyperbolische Paraboloid. Die beständigen Größen, welche diese fünf Flächenarten bestimmen, können unter sich gewisse Behältnisse haben, welche dieselben in andere Flächen vom zweyten Grad umgestalten als die Kugel, den Kegel und den Cylinder, deren Grundlinien die drey Kegelsschnittslinien sind rc. Wenn von den drey Axen 2 a, 2 b, 2 c des Ellipsoids zwey gleich werden, so verwandelt sich dasselbe in eine Umdrehungsfläche, und es hat als Umdrehungsaxe diejenige von den dreyen, welche keine gleiche hat. Werden alle drey Axen des Ellipsoids einander gleich, so wird diese Fläche eine Kugel.

Das Hyperboloid von einem Netz verwandelt sich in eine Umdrehungsfläche, wenn die Axen 2 a, 2 b des elliptischen Haupt-Schnittes gleich werden; so daß diese Ellipse ein Kreis wird; die Gerade 2 c ist sodann die Umdrehungsaxe. Auch das Hyperboloid von zwey Netzen, und das elliptische Paraboloid können Umdrehungsflächen werden. Die erstere Fläche wird sodann erzeugt, durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre reelle Axe, und die Zweyte, durch die Umdrehung einer Parabel um ihre große Axe.

119. Das Hyperboloid von einem Netze hat die Eigenschaft, durch die gerade Linie erzeugt werden zu können; und zwar auf zwey verschiedene Weisen, so daß man durch jeden Punkt dieser Fläche zwey Gerade ziehen kann, die mit allen ihren Punkten

der Fläche angehören. Wenn eine bewegliche Gerade sich auf drey festen Geraden als Leitlinien bewegt, so ist die Fläche, die sie erzeugt, ein Hyperboloid von einem Netz: und wenn man drey beliebige Stellungen der Erzeugungslinie als die Leitlinien einer neuen beweglichen Geraden nimmt, so erzeugt diese Letztere durch ihre Bewegung abermals dasselbe Hyperboloid.

Es sey I K, (Taf. XII. Fig. 6.) eine Gerade, welche sich bewegt, indem sie sich beständig auf drey im Raume gegebene Gerade A B, M N, C D stützt, und diese Geraden in den Punkten I, G, K schneidet. Es seyen ferner A M D, B N C zwey andere Stellungen der beweglichen Geraden. Wenn eine zweyte bewegliche Gerade sich auf den drey als fest angenommenen Geraden A M D, I G K, B N C als Leitlinien bewegt, so bringen die beyden Bewegungen nur eine und dieselbe Fläche hervor. *)

Diese Eigenschaft des Hyperboloids von einem Netze ist für die darstellende Geometrie die merkwürdigste, weil sie, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, auf eine einfache Weise zur Konstruktion der tangirenden Ebenen zu den windischen Flächen führt.

120. Wenn die beyden reellen Axen 2 a, 2 b des Hyperboloids von einem Netze gleich werden, das heißt, wenn sich dasselbe in eine Umdrehungsfläche verwandelt, so kann diese Fläche auch durch eine Gerade erzeugt werden, die mit der Axe 2 c nicht in einer Ebene liegt, und sich um dieselbe als Rotationsaxe dreht.

Geht man von dieser, durch die Analisis bewiesenen Eigenschaft des Umdrehungshyperboloids von einem Netze aus, so läßt sich auch bey dieser Fläche die Eigenschaft der doppelten Erzeugung durch die gerade Linie geometrisch darthun.

121. Es sey (A, $a\,a'$) (Taf. IX.) eine vertikale Gerade, sie stelle die Axe 2 c des Hyperboloids vor, (R Q, $r\,q$) sey eine zweyte Gerade, welche durch ihre Umdrehung um die Erste ein Umdrehungshyperboloid von einem Netze erzeugt. Die aus dem Punkt A auf die Gerade R Q gefällte Senkrechte A T, ist die Horizontalprojektion der kürzesten Entfernung der zwey Geraden (A, $a\,a'$), (R Q, $r\,q$). Der Fußpunkt (T, t) dieser Senkrechten auf der Erzeugungslinie (R Q, $r\,q$) beschreibt bey der Umdrehung dieser Letzten den kleinsten Parallelkreis der Fläche, welchen wir aus diesem Grunde den Kehlkreis nennen (Art 115). Jeder andere Punkt der Erzeugungslinie, beschreibt

---

*) Der Beweis für die Identität der auf beyde Arten erzeugten Flächen läßt sich rein geometrisch nur auf eine weitläufige Art führen.

Wir haben denjenigen, den Hachette in seinen Elements de Géométrie à trois dimensions beybringt, und welcher sich auf einen Artikel von Chasles in der Correspondance sur l'école polytechnique gründet, in der Note II. zu Ende dieses Buches angefügt.

einen größeren Parallelkreis, wie zum Beyspiel der Punkt (R, r) auf der Horizontalebene den Kreis. (R U Q V, e f).

Wenn man durch die Axe irgend eine Meridianebene A M führt, so schneidet diese die Erzeugungslinie (R Q, r q) in einen Punkt (M, m) und man kann sich eine zweyte Gerade (V U, v u) denken, welche symetrisch mit der (R Q, r q) gestellt ist, in Bezug auf die Ebene A M. Diese zweyte Gerade wird die Horizontalebene in einem Punkt U des Kreises (R U Q V, e f) treffen, so daß die Gerade R U senkrecht auf A M ist, und sie wird die Ebene A M in dem nemlichen Punkt (M, m) wie die Gerade (R Q, r q) durchschneiden. Lassen wir die beyden Geraden (R Q, r q), (V U, v u) eine gleich große Drehung um die Axe machen, indem sie sich gleichmäßig der Ebene A M nähern, oder von ihr entfernen; so bleibt diese letzte immer ihre Ebene der Symetrie, sie werden sich immer in einen Punkt derselben Ebene schneiden, und wenn beyde Geraden eine ganze Umdrehung vollendet haben, so wird die Reihe ihrer Durchschnittspunkte auf der Ebene A M eine Linie bilden, welche nichts anderes ist, als der Meridian der Fläche. Wenn man daher die Meridianebene sammt den zwey Geraden sich zu gleicher Zeit um die Axe drehen läßt, so werden sie nur eine und dieselbe Umdrehungsfläche beschreiben.

Das Umdrehungshyperboloid von einem Netz kann daher auf doppelte Art durch die gerade Linie erzeugt werden, die geraden Erzeugungslinien eines Systems begegnen sich nicht, aber sie werden Alle durch irgend eine Gerade des andern Systems geschnitten. Da nun durch drey Leitlinien die Bewegung einer Geraden festgesetzt wird, so ist zufolge dieser Eigenthümlichkeit einleuchtend, daß je drey, einem nemlichen Erzeugungssystem angehörigen Geraden des Umdrehungshyperboloids genommen werden können, um als Leitlinien einer Geraden zu dienen, welche durch ihre Bewegung auf jenen Geraden, dieselbe Fläche erzeugen wird.

In allen ihren Stellungen sind die Geraden (R Q, $r q$), (V U, $v u$) tangirend zu einem geraden Cylinder, welcher als Axe die Vertikale (A, a a') hat, und als Basis den Kehlkreis (T C D, c d), dessen Halbmesser die kürzeste Entfernung einer geraden Erzeugungslinie von der Axe ist. Alle Geraden der Fläche haben die gleiche Neigung gegen die Axe, und der Winkel, den sie mit der Horizontalebene machen, ist beständig.

122. Wenn man die drey geraden Leitlinien des Hyperboloids von einem Netze parallel zu einer und derselben Ebene annimmt, so bleibt die, auf diese drey Geraden sich stützende gerade Erzeugungslinie der Fläche immer parallel zu einer andern Ebene, und das Hyperboloid von einem Netze verwandelt sich in ein hyperbolisches Paraboloid. Diese letzte Fläche wird auch durch eine Gerade erzeugt, die sich bey ihrer Bewegung

auf zwey gerade Leitlinien stützt und dabey beständig parallel zu einer gegebenen Ebene bleibt.

Wenn man von dieser Erklärung des hyperbolischen Paraboloids ausgeht, so läßt sich beweisen, daß diese Fläche noch auf eine zweyte Art durch eine Gerade erzeugt werden kann, wenn sich nemlich diese neue Erzeugungslinie auf zwey beliebige Erzeugungslinien des ersten Systems, als Leitlinien stützt, und dabey parallel zu der Ebene der zwey ersten Leitlinien bleibt.

123. Es seyen A C, A'' C'', (Taf. XII. Fig. 5) zwey gegebene Leitlinien des Paraboloids; A A'', C C'' seyen zwey Erzeugungslinien, welche die gegebenen Leitlinien in den Punkten A und A'', C und C'' schneiden. Durch die Geraden C C'' und A'' C'' denke man sich eine Ebene geführt, und diese sey als Projektionsebene angenommen.

Die Ebenen, welche durch die Gerade A A'' parallel zu der C C'', und durch die Gerade C A parallel zu der C'' A'' geführt sind, schneiden sich nach einer Geraden A *a*, und ihre Risse auf der Projektionsebene schließen mit jenen obigen Geraden ein Parallelogramm C *a* A'' C'' ein.

Eine zu den zwey Erzeugungslinien A A'', C C'' parallele Ebene hat als Riß eine Parallele zu A'' *a*, wie B'' *b*: sie schneidet die gegebenen Erzeugungslinien in zwey Punkten B, B'', welche Punkte die Stellung einer dritten Erzeugungslinie B B'' bestimmen; und sie trennt von dem Dreyecke A C *a* ein ähnliches Dreyeck B C *b*.

Wir werden beweisen, daß, wenn man durch irgend einen Punkt B' der Geraden B B'' eine Ebene parallel zu der Ebene *a* C A führt, diese Ebene das Paraboloid ebenfalls nach einer geraden Linie schneide.

Der Riß C' *a'* dieser genannten Ebene muß parallel zu C *a* seyn, und sie wird die zwey parallelen Ebenen A A'' *a*, B B'' *b* nach den zu A *a* parallelen Geraden A' *a'*, B' *b'* durchschneiden. A' und C' sind die Punkte, in denen dieselbe Ebene die Geraden A A'', C C'' trifft, und ich sage, daß die drey Punkte A', B', C' in gerader Linie liegen.

In der That, die Ebene C *a'* A' schneidet von den drey Dreyecken A'' A *a*, B'' B *b*, C A *a* wechselseitig ähnliche Dreyecke ab, welche folgende Proportionen geben:

$$\text{A}\,a : \text{A}'\,a' :: \text{A}''\,a : \text{A}''\,a' :: \text{B}''\,b : \text{B}''\,b' : \text{B}\,b : \text{B}'\,b',$$

oder wenn man die mittlere Verhältnisse ausschließt.

$$\text{A}\,a : \text{B}\,b :: \text{A}'\,a' : \text{B}'\,b'.$$

Man hat daher

$$\frac{A\ a}{B\ b} = \frac{A'\ a'}{B'\ b'} = \frac{C\ a}{C\ b} = \frac{C'\ a'}{C'\ c'}$$

und folglich liegen die drey Punkte A′, B′, C′ in gerader Linie.

Es ergiebt sich hieraus, daß das hyperbolische Paraboloid nach zwey verschiedenen Weisen durch die gerade Linie erzeugt werden kann, einmal, indem die Erzeugungslinie sich auf zwey feste Gerade als Leitlinien lehnt und dabey parallel zu einer gegebenen Ebene bleibt; und zweytens, indem man zwey beliebige Erzeugungslinien jenes ersten Systems als feste Leitlinien nimmt, wobey die bewegliche Gerade immer parallel bleibt, zu der Ebene der zwey Leitlinien des ersten Systems. Beyde Erzeugungsarten ergeben sich, wie man sieht, Eine aus der Andern auf durchaus gleiche Weise.

124. Das Hyperboloid von einem Netze, das Umdrehungshyperboloid von einem Netze und das hyperbolische Paraboloid gehören, wie aus ihrer Erzeugungsart durch die gerade Linie hervorgeht zu den windischen Flächen, und sie sind die einfachsten dieses Geschlechtes. Alle drey können auf doppelte Art durch die Gerade erzeugt werden. Die zwey Systeme der geraden Erzeugungslinien theilen diese Flächen in eine unendliche Anzahl kleiner windischer Vierecke, und die Flächenstückchen, welche zwischen zwey aufeinanderfolgenden Erzeugungslinien eines nemlichen Systems gefaßt sind, sind windische Elemente, die sich nach der Richtung der Geraden, von denen sie eingeschlossen werden, ins Unendliche ausdehnen.

125. Das Hyperboloid von einem Netz wird ein gerader Kegel von elliptischer Grundlinie, wenn die, auf den beyden Axen 2 a, 2 b (Art. 115.) konstruirte Ellipse sich auf einen Punkt reduzirt, während die dritte Axe 2 c unendlich groß wird.

Dieser Kegel ist die einfachste Fläche vom zweyten Grad, welche durch eine Ebene nach den drey Kurven vom zweyten Grad, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden kann; er besitzt so wie alle übrigen Flächen vom zweyten Grad die Eigenschaft, durch zwey Reihen verschiedentlich geneigter Ebenen nach Kreisen geschnitten werden zu können, wobey übrigens bemerkt werden muß, daß bey dem hyperbolischen Paraboloid die Kreise von unendlichem Halbmesser sind, und mit den Geraden der Fläche zusammenfallen. Nimmt man bey dem elliptischen Kegel einen dieser Kreise für seine Grundlinie, so geht die aus dem Mittelpunkt der Fläche auf die Ebene des Kreises gefällte Senkrechte nicht durch den Mittelpunkt desselben, und aus diesem Grunde nennt man ihn schiefen Kegel. (Art. 61.) Siehe Note III.

126. Unter den Eigenschaften der Flächen vom zweyten Grad ist diejenige für die zeichnenden Künste besonders bemerkenswerth, daß alle Schnitte dieser Flächen durch parallele

Ebenen ähnlich sind. Die Kegel und Cylinder des zweyten Grads, haben diese Eigenschaft mit allen übrigen Kegeln und Cylindern gemein. Siehe Note I.

* * *

127. Indem wir somit diese Kapitel über die Gestalt und die Erzeugung der krummen Flächen schließen, müssen wir in einige nothwendige Erörterungen in Bezug auf die Projektionszeichnungen eingehen, wozu wir bis jetzt noch keine Gelegenheit fanden.

Im Allgemeinen haben alle krummen Flächen, wie vervielfältigt auch ihre Netze seyn mögen, doch immer nach einer gewissen Richtung eine endliche und umgränzte Ausdehnung. Der Umfang ihrer Projektionen wird daher im Allgemeinen ebenfalls ganz oder theilweise durch eine gewisse krumme Linie eingeschlossen, welche wir die Begränzungslinie der Projektion der Fläche nennen. Bey der Kugel ist dies eine Kreislinie, bey den Cylindern und Kegeln gewöhnlich das System zweyer Geraden u. s. w. Diese Begränzungslinie ist aber nichts anderes als die Basis einer Cylinderfläche, deren Kanten senkrecht auf die Projektionsebene sind, und welche die projektirte Fläche nach einer gewissen krummen Linie berührt, von welcher jene Basis des Cylinders selbst die Projektion ist.

Da wir nun (Art. 25.) die Stellung des Auges als in unendlicher Entfernung von der Projektionsebene angenommen haben, so, daß alle Sehestrahlen parallel unter sich sind und senkrecht auf die Projektionsebene, so ist zufolge dieser Annahme einleuchtend, daß die genannte Berührungslinie des umhüllenden Cylinders mit der projektirten Fläche, diese in zwey Theile theile, wovon der, gegen das Auge gewendete mit allen auf demselben verzeichneten Linien gesehen sey, der übrige Theil hingegen durch diesen bedeckt erscheine.

Denken wir uns nun auf der Fläche irgend eine krumme Linie verzeichnet, welche die Berührungslinie derselben mit dem umschriebenen Cylinder in einem Punkte schneidet; so sind die Tangenten zu den beyden Linien an jenem Punkt, in einer und derselben tangirenden Ebene enthalten. In dieser nemlichen Ebene muß aber auch die durch denselben Punkt gehende Kante des umschriebenen Cylinders enthalten seyn, weil diese eine Tangente zu der Fläche ist; die tangirende Ebene ist daher senkrecht auf die Projektionsebene und die Projektionen der in ihr enthaltenen zwey Tangenten fallen in eine einzige Gerade zusammen, welche selbst die unbestimmte Projektion der tangirenden Ebene ist. Die Projektionen der zwey auf der Fläche gezogenen Linien berühren sich daher in einem Punkte, welcher die Projektion ihres Durchschnittspunks auf der Fläche ist.

128. Aus allem oben Gesagten ziehen wir folgende Sätze als Resultate:

I. **Die Begränzungslinie, welche den Umfang der Projektion einer krummen Fläche bestimmt, berührt die Projektionen aller auf der Fläche verzeichneten Linien, wenn nemlich die Ausdehnung derselben so groß ist, daß sie auf die Fläche jene Linie durchschneiden, oder berühren, deren Projektion die genannte Begränzungslinie ist.**

II. **Wenn eine durch ihre Projektionen dargestellte krumme Fläche allein im Raume vorhanden ist, so daß keiner ihrer Theile durch eine andere Fläche bedeckt erscheint, so sind die Berührungspunkte der Begränzungslinie der Projektion der Fläche mit den Projektionen alle auf der Fläche verzeichneten Linien zugleich auch die Trennungspunkte der gesehenen und bedeckten Theile dieser letztgenannten Linien.**

129. Von diesen beyden Sätzen findet besonders der Erste eine stete Anwendung bey der Konstruktion der Durchschnitte krummer Flächen; und überhaupt bey jeder geometrischen Zeichnung, auf welcher krumme Flächen dargestellt werden; und obgleich Nichts mehr der Klarheit einer solchen Darstellung schadet als ein Verstoß gegen denselben, so werden doch dergleichen Fehler nur zu häufig von Zeichnern begangen, die unbekannt sind mit den Methoden der darstellenden Geometrie.

Wir werden bey Gelegenheit einiger Aufgaben des dritten Buches. (Art. 315 — 323) zwar auf eine Ausnahme von dieser allgemeinen Regel treffen, diese Ausnahme jedoch daselbst deutlich erklärt finden.

Das Umgekehrte des ersten Satzes läßt sich anwenden, um die Begränzungslinie der Projektion irgend einer krummen Fläche zu finden; denn wenn man die Projektionen einer hinlänglichen Zahl von Erzeugungslinien der Fläche konstruirt hat, und man zieht an diese sämmtlichen Projektionen eine berührende krumme Linie, so ist diese offenbar die verlangte Begränzungslinie. Dieses Verfahren erfodert übrigens, um genau zu seyn, daß man eine ziemlich große Anzahl von Projektionen der Erzeugungslinie bestimme, denn nur mit einer sehr geübten Hand läßt sich eine krumme Linie, die durch die alleinige Bedingung gegeben ist, eine gewisse Anzahl anderer in einer Ebene gegebener Kurven zu berühren, mit hinlänglicher Genauigkeit ziehen.

Was den zweyten Satz betrifft, so giebt derselbe eine sichere Regel, wie die gesehenen und bedeckten Theile einer durch ihre Projektionen dargestellten krummen Fläche zu unterscheiden seyen, durch welche Unterscheidung eine Projektionszeichnung erst den großen Vorzug erhält, ein Bild zu machen. Es ist jedoch leicht zu ersehen, daß diese Regel nur dann ihre Anwendung finden könne, wenn die vorgestellte Fläche durch Nichts anderes bedeckt erscheint, als durch ihre eigenen Theile, denn im andern Falle läßt sich durchaus keine allgemein gültige Regel geben. Die Lösung der Aufgabe hängt alsdann ganz davon ab, daß man sich eine deutliche Anschauung von der gegenseitigen Stellung der sich bedeckenden Flächen erwerbe. Wir verweisen hier auf das, was wir bereits über diesen Gegenstand (Art. 28 — 29.) gesagt haben.

Die einzelnen Fälle werden, nach Allem diesem, aus den beygefügten Zeichnungen selbst deutlich hervorgehen, und zur Norm bey andern ähnlichen dienen können.

Viertes Kapitel.

Von den tangirenden Ebenen zu den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

130. Wie wir im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, kann jede aufwickelbare Fläche als die Umhüllung des von einer beweglichen Ebene durchlaufenen Raumes betrachtet werden; sie berührt die verschiedenen Stellungen der erzeugenden Ebene nach geraden Charakteristiken, welches gewöhnlich die Erzeugungslinien der aufwickelbaren Fläche sind.

Die tangirende Ebene an einem gegebenen Punkte einer aufwickelbaren Fläche fällt mit der entsprechenden Stellung der umhüllten Erzeugungsebene zusammen; sie berührt daher die Fläche in der ganzen Länge der geraden Erzeugungslinie des Berührungspunktes, und ihre Stellung ist bestimmt; durch diese Gerade, und durch die Tangente zu irgend einer Kurve der Fläche an dem Punkte, wo sie dieselbe Erzeugungslinie durchschneidet.

* * *

131. Die windischen Flächen werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, weßhalb die tangirende Ebene an irgend einem Punkt einer solchen Fläche auch die gerade Erzeugungslinie enthalten muß, welche durch den Berührungspunkt geht. Diese Ebene berührt aber die windische Fläche nur in jenem einzigen Punkte, während bey allen aufwickelben Flächen, die ebenfalls durch die gerade Linie erzeugt sind, die Berührung längs der ganzen Ausdehnung einer geraden Linie statt findet. Aber diese letzte Eigenthümlichkeit gehört ausschließlich nur den aufwickelbaren Flächen; bey allen Andern beschränkt sich die Berührung mit ihren tangirenden Ebenen auf einen oder mehrere