

aufgelegt, sich auf drey gegebenen krummen Linien zu bewegen. Nimmt man einen Punkt der einen krummen Leitlinie als Scheitel eines Kegels, welcher die zweyte Krumme als Basis hat, so wird dieser die dritte Krumme in einem oder mehreren Punkten schneiden, und die Gerade, welche durch einen dieser Letzten, und durch den Punkt der ersten Kurve geführt ist, lehnt sich zu gleicher Zeit auf alle drey gegebenen Kurven.

Wenn man diese drey Bedingungen zum Theil oder ganz durch andere ersetzt; indem man zum Beyspiel der Geraden aufgibt, sich auf zwey Krummen und einer Fläche zu bewegen; oder auf zwey Flächen und einer Kurve; oder auf drey Flächen; oder auf zwey Flächen, wobey sie einen bekannten Winkel mit einer gegebenen Ebene macht, so entsteht durch diese Bewegung, im Allgemeinen, eine windische Fläche.

Sehr häufig sind zwey Leitlinien gegeben, und eine Ebene, zu welcher die bewegliche Gerade beständig parallel bleiben soll. Wenn in diesem Falle, die Eine der beyden Leitlinien eine Gerade wird, so entsteht eine Fläche, welche unter dem Namen Konoid bekannt ist, weil sie einige Aehnlichkeit mit dem Kegel (conus) hat. Ist bey dem Konoid die gerade Leitlinie senkrecht auf die Ebene des Parallelismus, so erhält die Fläche die Benennung gerades Konoid, und jene gerade Leitlinie ist zugleich die Einziehungslinie derselben.

Von den Umhüllungsflächen.

106. Wenn eine Fläche von beständiger oder veränderlicher Gestalt sich nach gewissem Gesetze bewegt, so durchläuft sie einen Raum, dessen Gränze oder Umhüllung eine gewisse krumme Fläche ist. Man nennt die Flächen, die auf solche Weise hervorgebracht werden können, Umhüllungsflächen oder auch nur Umhüllungen; der beweglichen Erzeugungsfläche giebt man den Beynamen der umhüllten.

Betrachten wir eine umhüllte Fläche in drey unmittelbar aufeinanderfolgenden Stellungen: die Zweyte und die Erste werden sich nach einer gewissen krummen Linie schneiden, die Zweyte und die Dritte werden sich nach einer ähnlichen Linie schneiden; der geometrische Ort alle so aufeinanderfolgenden Durchschnitte ist die Umhüllung des von der beweglichen Fläche durchlaufenen Raumes.

Man denke sich zum Beyspiel eine im Raume bewegliche Kugel, von beständigem oder veränderlichem Halbmesser, deren Mittelpunkt eine bekannte Linie durchläuft. Wenn man bemerkt, daß zwey Kugeln sich nach einem Kreise schneiden, dessen Ebene senkrecht auf die, durch ihre Mittelpunkte gezogene Gerade ist, so wird man leicht einsehen, daß die Umhüllung dieser beweglichen Kugel, oder vielmehr des von ihr durchlaufenen Raumes, eine röhrenförmige Fläche sey, deren Schnitte senkrecht auf die Kurve, in wel-

cher sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, Kreise sind. Eine dieser Erzeugung unterworfenene Fläche ist die der gewundenen Säule, welche nichts anderes ist, als die Umhüllung des von einer Kugel, von veränderlichem Halbmesser durchlaufenen Raumes, deren Mittelpunkt in einer Schraubenlinie von vertikaler Axe läuft.

Die aufeinanderfolgenden Durchschnitte der umhüllten Fläche sind die eigentlichen Erzeugungslinien der Umhüllungsfläche; aber diese Durchschnitte oder Erzeugungslinien sind bey allen Umhüllungen, die durch eine nemliche umhüllte Fläche hervorgebracht werden können, ähnlich, und sie geben diesen Umhüllungen gewissermaassen einen gemeinsamen Charakter, weshalb man ihnen den Namen Charakteristiken gegeben hat, um sie von den gewöhnlichen Erzeugungslinien auszuzeichnen.

107. Betrachtet man eine im Raume bewegliche Fläche, und ihre Umhüllung, welche der Ort ihrer aufeinanderfolgenden Durchschnitte ist, so wird man leicht einsehen, daß die Umhüllungsfläche jede Stellung der Umhüllten nach einer, dieser Stellung entsprechenden Charakteristik berühre; weil je zwey Charakteristiken, aufeinanderfolgend betrachtet, sich zu gleicher Zeit auf der umhüllten, und der Umhüllungsfläche befinden, und diese daher das, zwischen jenen Charakteristiken gefasste Flächenelement gemeinschaftlich haben.

Aber die Reihe der Charakteristiken einer Umhüllungsfläche werden sich aus eben dem Grunde, weil sie zu zwey und zwey auf einer nemlichen Umhüllten liegen, im Allgemeinen auch, zu zwey und zwey, jedesmal in einer gewissen Zahl von Punkten begegnen. Der Ort dieser Begegnungspunkte ist auf der Umhüllungsfläche eine sichtbare krumme Linie von einem oder mehreren Zweigen, welche in jedem dieser Zweige von einer jeden Charakteristik berührt wird, denn jede Charakteristik hat zwey unendlich nahe liegende Punkte, oder mit andern Worten, ein Linearelement mit demselben gemein.

Diese Linie, obschon sie nicht auf jeder Umhüllungsfläche wirklich erscheint, ist aber da wo sie vorkommt, im Allgemeinen eine nothwendige Folge der Erzeugung, und unabhängig von der Figur der umhüllten Fläche, sie ist eine Rückkehrkante (Art. 102.), die zwey oder mehrere Netze der Umhüllungsfläche von einander trennt.

108. Die einfachste Umhüllungsfläche ist diejenige, welche den, von einer Ebene durchlaufenen Raum begränzt. Diese Fläche ist, wie leicht zu entnehmen, aufwickelbar. Stellen wir uns zum Beyspiel vor, eine bewegliche Ebene solle in jeder ihrer Stellungen normal zu einer gegebenen Linie von doppelter Krümmung seyn.

Wenn wir irgend eine Stellung dieser Ebene betrachten, so wird diese von der unmittelbar nachfolgenden Ebene nach einer geraden Linie geschnitten werden, die zweyte Ebene selbst wird wiederum von der dritten Ebene nach einer von der ersten verschiede-

nen Geraden geschnitten werden; die dritte Ebene wird von der vierten nach einer neuen, von den zwey ersten unterschiedenen Geraden durchschnitten, und so weiter fort. Diese auf einanderfolgenden geraden Durchschnitte sind die Charakteristiken der Umhüllung der beweglichen Ebene. Ueberdies sind alle diese Charakteristiken zu zwey und zwey aufeinanderfolgend betrachtet in einerley Ebene, weil sie die Durchschnitte einer nemlichen umhüllten Ebene sind mit derjenigen, welche ihr unmittelbar vorhergeht und der, welche ihr unmittelbar folgt; daher ist die Umhüllungsfläche, die sie zusammen bilden, aufwickelbar.

Aber außerdem, daß jene Charakteristiken zu zwey und zwey in einer Ebene liegen, können sie in dieser Ebene nicht parallel seyn, weil zwey aufeinanderfolgende Normalebene einer doppelt gekrümmten Linie im Allgemeinen nicht parallel seyn können. Daher wird jede Charakteristik von den beyden anliegenden in zwey unendlich nahen Punkten geschnitten, der Ort dieser so bestimmten Punkte ist auf der Fläche eine Linie von doppelter Krümmung, welche alle geraden Charakteristiken berührt, es ist die Rückkehrkante der aufwickelbaren Umhüllungsfläche. (Art. 102.)

Im Falle die Kurve, zu welcher die bewegliche Ebene stets normal seyn soll, eben wäre, statt von doppelter Krümmung, so würde die Umhüllung des von jener Ebene durchlaufenen Raumes eine Cylinderfläche werden; denn, da die umhüllte Ebene stets senkrecht auf eine und dieselbe Ebene seyn müßte, auf jene der Kurve nemlich, so wären ihre aufeinanderfolgenden Durchschnitte ebenfalls senkrecht auf diese Ebene und folglich parallel unter sich.

Die Regelflächen werden durch eine Ebene erzeugt, welche immer durch den Mittelpunkt der Fläche geht, und sich so bewegt, daß sie stets die Tangente zu der Leitlinie des Kegels enthält. Zwey aufeinanderfolgende Ebenen schneiden sich hier nach einer Kante des Kegels.

109. Wir haben (Art. 103.) gesehen, daß drey Bedingungen die Bewegung einer geraden Linie festsetzen, und daß die dadurch entstehende Fläche, im Allgemeinen eine windische sey. Zwey Bedingungen hingegen bestimmen die Erzeugung einer aufwickelbaren Fläche, weil dadurch die Bewegung einer Ebene festgesetzt ist, und jede aufwickelbare Fläche als durch eine bewegliche Ebene hervorgebracht, angesehen werden kann.

Durch zwey gegebene krumme Linien läßt sich daher stets eine aufwickelbare Fläche führen, aber nur eine Einzige. In der That, wir wollen beyde Kurven mit A und B bezeichnen; nachdem man auf der A einen beliebigen Punkt genommen, kann man denselben als Scheitel einer Regelfläche betrachten, deren Leitlinie die Kurve B ist; jede tangirende Ebene zu dieser Regelfläche, muß durch eine Tangente zu der Kurve B gehen. Führt man daher durch den, auf der Krümmen A genommenen Punkt eine Tangente

zu dieser Linie, und durch die Tangente eine tangirende Ebene zu der Regelfläche, so geht diese Ebene durch zwey Tangenten, von denen die Eine der Linie A, und die Andere, der Linie B angehört. Indem man den auf der Krümmen A genommenen Scheitel verändert, erhält man eine neue Regelfläche, und eine neue Stellung der tangirenden Ebene zu den Krümmen A und B; die Umhüllung des von dieser Ebene durchlaufenen Raumes, ist die aufwickelbare Fläche, welcher auferlegt ward, durch die zwey Krümmen A und B zu gehen.

Die Bewegung einer Ebene, welche eine aufwickelbare Fläche erzeugt, läßt sich am Allgemeinsten dadurch bestimmen, daß man der Ebene auferlegt, sich zu bewegen, indem sie stets tangirend bleibt, zu zwey gegebenen krummen Flächen. Man wird irgend eine Stellung dieser Ebene bestimmen, wenn man einen beliebigen Punkt im Raume als gemeinsamen Scheitel zweyer Regelflächen nimmt, welche um die beyden krummen Flächen umschrieben sind, und diese nach gewissen krummen Linien berühren; eine Ebene, welche diese beyden Regelflächen tangirt, berührt auch beyde gegebener krummen Flächen, und ist folglich die Gesuchte. Indem man den Scheitel der umschriebenen Regelflächen verändert, bestimmt man eine weitere Stellung der tangirenden Ebene zu beyden Flächen. Die Umhüllung des von dieser Ebene durchlaufenen Raumes, ist die aufwickelbare Fläche, welche um die beyden gegebenen krummen Flächen umschrieben ist, und dieselben nach zwey krummen Linien berührt. Wären diese Berührungslinien der zwey Flächen mit der Aufwickelbaren bekannt, so könnte man diese Letzte auch konstruiren, indem man ihr auferlegte, durch die zwey Berührungslinien zu gehen.

110. Die Umdrehungsflächen können betrachtet werden, als die Umhüllung eines beweglichen geraden Kegels von kreisförmiger Grundlinie, oder einer Kugel, oder eines geraden Cylinders, welcher als Grundlinie einen Meridian der Fläche hat.

Denken wir uns durch irgend einen Punkt einer Umdrehungsfläche zwey Ebenen; Eine, senkrecht auf die Axe, und die Andere durch die Axe gehend: der Schnitt der ersten Ebene wird ein Parallelkreis und der Schnitt der Zweyten ein Meridian der Fläche seyn. Die Tangente zu dem Meridian an dem Begegnungspunkt der zwey Schnitte trifft die Axe der Fläche in einem Punkt, und wir haben (Art. 82.) gesehen, daß dieser der Mittelpunkt eines geraden Kegels sey, der die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise berührt. Da man auf diese Art jeden Parallelkreis als die Berührungslinie der Fläche mit einem geraden Kegel betrachten kann, so ist auch jede Umdrehungsfläche als die Umhüllung des Raumes anzusehen, den ein gerader Kegel durchläuft, welcher sich dergestalt verändert, daß seine Grundlinie stets ein Parallelkreis der Umdrehungsfläche ist; seine Erzeugungslinie, die Tangente zu dem Meridian an dem Punkt, in welchem

derselbe die kreisförmige Grundlinie schneidet, und daß sein Mittelpunkt immer in der Umdrehungsaxe liegt. Die aufeinanderfolgenden Durchschnitte dieses beweglichen Kegels sind die Parallelkreise der Umdrehungsfläche.

Eine Kugel, welche als Halbmesser das Stück der Normale zu einem Meridian der Fläche hat, was zwischen dem Meridian und der Axe liegt (Art. 91.), und deren Mittelpunkt der Begegnungspunkt dieser Normalen mit der Axe ist, berührt offenbar die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreis, welcher durch den Fuß der Normalen geht; denn die beyden Flächen haben an allen Punkten dieses Parallelkreises einerley Normalen, und folglich einerley tangirende Ebenen; wenn daher diese Kugel sich so bewegt, daß ihr Mittelpunkt die Umdrehungsaxe durchläuft und ihr Halbmesser immer gleich ist dem Stück der Normalen zwischen ihrem Mittelpunkt und dem Meridian, so bildet die Umdrehungsfläche ihre Umhüllung.

Betrachtet man den Meridianschnitt einer Umdrehungsfläche als Grundlinie eines geraden Cylinders, dessen Kanten senkrecht auf die Ebene des Schnittes sind; so ist jegliche von diesen Kanten Tangente zu einem Parallelkreis der Umdrehungsfläche, und folglich Tangente zu der Fläche selbst: die Berührungspunkte der Tangenten sind die Punkte des Meridianes. Der Cylinder ist daher umschrieben zu der Umdrehungsfläche, und berührt dieselbe nach dem Meridiane. Läßt man den Cylinder sich so bewegen, daß seine Grundlinie nach und nach in alle Meridianebenen übergeht, so ist die Umdrehungsfläche die Umhüllung des von dem Cylinder durchlaufenen Raumes.

111. Die Umhüllung des Raumes, den eine Kugel durchläuft, deren Halbmesser beständig oder veränderlich ist, gehört im Allgemeinen zu der Gattung, welche man röhrenförmige Flächen nennt. Wenn der Halbmesser der Kugel beständig ist, und die, von ihrem Mittelpunkt durchlaufene Linie ein Kreis, so ist die Umhüllung derselben eine ringförmige Fläche. (Art. 64.)

112. Obgleich die Erzeugung der Umhüllungsflächen sehr abstrakt scheinen mag, so wird sie doch in mehreren technischen Künsten angewendet, und dies hauptsächlich von den Drehern und Blechnern (Klempnern).

Die Lezten wissen eine Tafel Blech um eine Reihe gerader Linien so zu biegen, daß die Ebene der Tafel sich in eine aufwickelbare Fläche verwandelt, von welcher diese Tafel, während der Arbeit, die umhüllte Erzeugungsebene ist.

Die Dreher geben ihren Werken mit einem Instrumente die Bollendung, dessen Schneide eine gerade Linie ist. Wenn sie arbeiten, so beschreibt diese Schneide, in Bezug auf die zu verfertigende Umdrehungsfläche eine umhüllte Kegelfläche derselben; und durch die passende Aenderung der Richtung des Instruments geschieht es, daß die

verschiedenen Zonen der Umhüllten nach und nach mit der auszuführenden Fläche zusammenfließen.

Es ist demzufolge einleuchtend, daß die Uebung den Blechnern und Drehern einige Begriffe von der Erzeugung der Umhüllungen geben müsse; aber was vielleicht überraschend scheinen mag, ist, daß sie einen sehr feinen Takt hierin haben, und daß sie auf den bloßen Anblick einer Oberfläche erkennen, ob sie dieselbe verfertigen können oder nicht.

Nehmen wir an, man habe Modelle von aufwickelbaren Flächen, von Umdrehungsflächen und von windischen Flächen *) zusammengestellt, und man verlange von geschickten Blechnern und Drehern, alle diejenigen herauszunehmen, die sie verfertigen könnten; so wird der Blechner alle aufwickelbaren Flächen zur Seite stellen, der Dreher alle Umdrehungsflächen, und keiner von beyden wird sich mit den windischen befassen.

Nun aber sind die windischen Flächen das Resultat der Bewegung einer Geraden, wie die Aufwickelbaren; woran unterscheidet nun der Blechner die Ersten von den Letzten? An folgendem: bey der windischen Fläche ist die bewegliche Gerade nur eine gewöhnliche Erzeugungslinie, bey der aufwickelbaren Fläche aber ist sie eine Charakteristik auf einer kleinen, unendlich schmalen Zone gelegen, und diese Zone, welche eine Andeutung von der umhüllten Ebene giebt, zeigt dem Blechner an, daß dieser Umhüllten ein cylindrischer oder kegelförmiger Ambos substituirt werden könne, um darauf eine Tafel Blech so zu biegen, daß sie sich in eine aufwickelbare Fläche verwandle.

Eben so entsteht eine Umdrehungsfläche durch die Bewegung eines Kreises, wie alle Regel- und Cylinderflächen von elliptischen Grundlinien. **) Aber bey diesen Letzten ist der Kreis nur eine gewöhnliche Erzeugungslinie, bey der Umdrehungsfläche hingegen ist er die Berührungslinie der Umhüllungsfläche mit der Umhüllten, daß heißt, eine Charakteristik. Diese Charakteristik zeigt dem Dreher an, daß wenn er seinen Meißel, in Bezug auf den zu drehenden Körper gerade Regelflächen beschreiben läßt, dieser Meißel, mit Gewandheit geführt, ihre Umhüllung hervorbringen werde, und daß er folglich zur Verfertigung aller möglichen Umdrehungsflächen dienen könne, während er zur Verfertigung aufwickelbarer Flächen, die nicht zugleich durch Umdrehung erzeugt werden können, nicht zu gebrauchen ist.

*) Vorausgesetzt, daß unter diesen Modellen keine seyen, welche entweder windisch oder aufwickelbar und zugleich durch Umdrehung entstanden seyen.

**) Alle Regel- und Cylinderflächen von elliptischen Grundlinien können durch zwey Systeme paralleler Ebenen, nach Kreisen geschnitten werden. (Siehe Art. 126.)