

längern. Sie bilden dadurch zwey unterschiedene aber vollkommen ähnliche Flächenstücke, die selbst nach jener Krümmen, welche man die Rückkehrkante der aufwickelbaren Fläche nennt, dergestalt berührend aneinander stoßend, daß kein Theil der Fläche sich in den, durch die Höhlung jener krummlinigen Kante begränzten Raum ausdehnt. Indem man die Fläche durch eine beliebige Ebene schneidet, erhält man als Durchschnitt eine Kurve mit einem Rückkehrpunkte (Art. 408.), und dieser ist der Begegnungspunkt der schneidenden Ebene mit der Rückkehrkante. \*) Diese merkwürdige Linie der aufwickelbaren Flächen ist, welches außerdem auch die eigenthümliche Beschaffenheit der Fläche seyn mag, immer eine Centrallinie derselben.

Wenn die Rückkehrkante sich auf einen einzigen Punkt reduziert, in dem sich sämtliche geraden Erzeugungslinien kreuzen, so entsteht eine Kegelfläche, und jener Punkt ist ihr Mittelpunkt.

Die Kegelfläche wird eine Cylinderfläche, wenn der Mittelpunkt in eine unendliche Entfernung übergeht, so daß sämtliche geraden Erzeugungslinien parallel unter sich werden.

Bei der Erzeugung der Umhüllungsflächen, zu Ende dieses Kapitels, werden wir noch eine andere Entstehungsart der aufwickelbaren Flächen kennen lernen.

### Von den windischen Flächen.

103. Die Bewegung einer Geraden als Erzeugungslinie einer Fläche erfordert um bestimmt zu seyn, im Allgemeinen drey Bedingungen.

Wenn die entstehende Fläche eine aufwickelbare seyn soll, so ist hiemit schon die eine Bedingung ausgesprochen, daß je zwey aufeinanderfolgende Erzeugungslinien in einer Ebene seyn müssen, und man hat nur noch zwey weitere Bedingungen nöthig; zum Beispiel, man läßt die bewegliche Gerade beständig eine gegebene Kurve und einen gegebenen festen Punkt durchschneiden, wie bey der Erzeugung der Kegelflächen, oder eine Kurve durchschneiden und dabey stets parallel zu einer bestimmten Richtung bleiben wie die gerade Erzeugungslinie der Cylinder; endlich ist die alleinige Bedingung, daß die bewegliche Gerade stets eine gegebene Kurve von doppelter Krümmung berühren soll, hinreichend um ihren Weg festzusetzen.

Im Allgemeinen aber werden drey Bedingungen erfordert, um die Bewegung der

---

\*) Nach dieser Analogie zwischen dem Rückkehrpunkte (point de rebroussement) gewisser Kurven, und der Rückkehrkante (arête de rebroussement) der aufwickelbaren Flächen wurde von Monge die Benennung der letzteren gebildet.

geraden Erzeugungslinie zu leiten. Es ist in der That leicht einzusehen, daß wenn eine bewegliche Gerade nur den zwey Foderungen entsprechen sollte, stets zwey Linien von doppelter Krümmung zu schneiden: ihre Bewegung dadurch nicht festgesetzt wäre. Denn, nachdem man die Gerade durch irgend einen Punkt der ersten krummen Leitlinie geführt hat, kann sie noch alle Punkte der zweyten Kurve durchlaufen, und ihre Stellung ist somit nicht bestimmt. Fügen wir nun noch eine dritte Bedingung bey; und unter allen, die wir wählen könnten, diese: die Gerade soll bey ihrer Bewegung immer horizontal bleiben; so ist diese Bewegung, und somit auch die Erzeugung einer Fläche bestimmt. Will man zum Beyspiel die Erzeugungslinie konstruiren, die einem beliebigen Punkte der einen Leitlinie entspricht, so hat man nur durch diesen Punkt eine horizontale Ebene zu führen, und nachdem man ihren Durchschnitt mit der zweyten Leitlinie bestimmt, diesen Punkt mit dem Erstgenommenen durch eine Gerade zu verbinden.

Es ist einleuchtend, daß, wenn nicht einige besondere Umstände hiebey obwalten, die das Gegentheil möglich machten, je zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien nicht in einer Ebene seyn können; sie werden übereinander weggehen, indem sie sich in ihren Richtungen kreuzen, was die charakteristische Eigenthümlichkeit der windischen Flächen ausmacht.

104. Das Element einer windischen Fläche, was zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien einschließen, ist in der Richtung dieser Geraden von unbegrenzter Ausdehnung, aber es ist, wie klein auch die Entfernung der einschließenden Erzeugungslinien seyn mag, kein Stück einer Ebene, sondern ein krummflächiges Element in jedem seiner Punkte, und von der Gestalt einer sogenannten windischen oder windschiefen Ebene; weßhalb man auch allen, aus derartigen Elementen zusammengesetzten, Flächen die Geschlechtsbenennung „windisch“ gegeben hat.

Diese Flächen haben zwar die Gerade zur Erzeugungslinie, wie die Aufwickelbaren; aber sie können nicht wie diese Letzteren eine Rückkehrkante haben. Denkt man sich immer zwey aufeinanderfolgende Erzeugungslinien einer windischen Fläche durch die Gerade geschnitten, welche senkrecht auf beyde ist; so bilden die Fußpunkte aller dieser Senkrechten auf der windischen Fläche eine besondere Linie, welche man die Einziehungslinie (courbe de striction) \*) nennen kann.

105. Die allgemeinste windische Fläche wird durch eine Gerade erzeugt, der man

---

\*) Anm. Diese Linie enthält offenbar die kürzeste Entfernungen aller Geraden der windischen Fläche, so daß dieselbe nach dieser Linie am engsten, oder gewissermaßen eingeschnürt erscheint; daher die Benennung der Linie.

aufgelegt, sich auf drey gegebenen krummen Linien zu bewegen. Nimmt man einen Punkt der einen krummen Leitlinie als Scheitel eines Kegels, welcher die zweyte Krumme als Basis hat, so wird dieser die dritte Krumme in einem oder mehreren Punkten schneiden, und die Gerade, welche durch einen dieser Letzten, und durch den Punkt der ersten Kurve geführt ist, lehnt sich zu gleicher Zeit auf alle drey gegebenen Kurven.

Wenn man diese drey Bedingungen zum Theil oder ganz durch andere ersetzt; indem man zum Beyspiel der Geraden aufgibt, sich auf zwey Krummen und einer Fläche zu bewegen; oder auf zwey Flächen und einer Kurve; oder auf drey Flächen; oder auf zwey Flächen, wobey sie einen bekannten Winkel mit einer gegebenen Ebene macht, so entsteht durch diese Bewegung, im Allgemeinen, eine windische Fläche.

Sehr häufig sind zwey Leitlinien gegeben, und eine Ebene, zu welcher die bewegliche Gerade beständig parallel bleiben soll. Wenn in diesem Falle, die Eine der beyden Leitlinien eine Gerade wird, so entsteht eine Fläche, welche unter dem Namen Konoid bekannt ist, weil sie einige Aehnlichkeit mit dem Kegel (conus) hat. Ist bey dem Konoid die gerade Leitlinie senkrecht auf die Ebene des Parallelismus, so erhält die Fläche die Benennung gerades Konoid, und jene gerade Leitlinie ist zugleich die Einziehungslinie derselben.

#### Von den Umhüllungsflächen.

106. Wenn eine Fläche von beständiger oder veränderlicher Gestalt sich nach gewissem Gesetze bewegt, so durchläuft sie einen Raum, dessen Gränze oder Umhüllung eine gewisse krumme Fläche ist. Man nennt die Flächen, die auf solche Weise hervorgebracht werden können, Umhüllungsflächen oder auch nur Umhüllungen; der beweglichen Erzeugungsfläche giebt man den Beynamen der umhüllten.

Betrachten wir eine umhüllte Fläche in drey unmittelbar aufeinanderfolgenden Stellungen: die Zweyte und die Erste werden sich nach einer gewissen krummen Linie schneiden, die Zweyte und die Dritte werden sich nach einer ähnlichen Linie schneiden; der geometrische Ort alle so aufeinanderfolgenden Durchschnitte ist die Umhüllung des von der beweglichen Fläche durchlaufenen Raumes.

Man denke sich zum Beyspiel eine im Raume bewegliche Kugel, von beständigem oder veränderlichem Halbmesser, deren Mittelpunkt eine bekannte Linie durchläuft. Wenn man bemerkt, daß zwey Kugeln sich nach einem Kreise schneiden, dessen Ebene senkrecht auf die, durch ihre Mittelpunkte gezogene Gerade ist, so wird man leicht einsehen, daß die Umhüllung dieser beweglichen Kugel, oder vielmehr des von ihr durchlaufenen Raumes, eine röhrenförmige Fläche sey, deren Schnitte senkrecht auf die Kurve, in wel-