ist der Halbmesser eines Cylinders, von welchem diese zweyte Gerade die Axe ist, und auf ihr wird folglich die gesuchte kürzeste Entfernung gemessen.

Um die Berührungslinie der Cylinderfläche mit der Ebene, welche parallel zu den zwey gegebenen Geraden ist, zu finden, führe man durch irgend einen Punkt, der als Axe angenommenen Geraden, (zum Beyspiel durch den Punkt C, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet) eine Ebene senkrecht auf diese Axe. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der tangirenden Ebene ist die Berührungslinie dieser Letzten mit der kreisförmigen Grundlinie des Cylinders.

Nachdem die Vertikalebene C D sich um ihren Riß C D gedreht, und auf die Horizontalebene zurückgelegt hat, konstruire man den Winkel β C β' den die zweyte Gerade (C D, $c\, d$) mit der Horizontalebene macht, indem man eine Vertikale $\beta' \beta = b' b$ nimmt. Dieselbe Vertikalebene schneidet die, zu den zwey Geraden parallele Ebene nach der Geraden F K, parallel zu C β'. Daher schneidet die, durch C, und senkrecht auf die Axe geführte Ebene die Vertikalebene C D nach der Geraden C K, senkrecht auf C β' oder F K, und die Horizontalebene nach der auf C D senkrechten Geraden C H.

Nachdem dieselbe Ebene sich um ihren Horizontalriß C H gedreht hat, um sich auf die horizontale Projektionsebene zurückzulegen; fällt der Punkt K nach K'; der Punkt H des Risses bleibt fest, und die Gerade H K' ist der Durchschnitt der tangirenden Ebene zu der Cylinderfläche mit der Ebene, welche senkrecht auf die Axe dieser Fläche ist. Wenn man daher aus dem Punkt C die Senkrechte C I auf jene Gerade H K' fällt, so ist der aus C als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser = C I beschriebene Kreis die Grundlinie der Cylinderfläche, und I N ist die Horizontalprojektion der Berührungskante. Diese Kante schneidet die erste Gerade in dem Punkt (N, n), durch welchen die gesuchte Senkrecht geht.

Der letzte Theil der Auflösung vollendet sich wie die in Art. 43. Vorgetragene, auf welche wir zurückweisen.

Drittes Kapitel.

Fortsetzung der Erzeugung der Flächen.

Von den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

95. Alle Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können, bilden zwey große Klassen; sie sind entweder **aufwickelbare** oder **windische Flächen**.

Wenn vermöge des Gesetzes, wodurch die Bewegung der geraden Erzeugungslinie vorgeschrieben ist, immer zwey aufeinanderfolgende Stellungen dieser Geraden betrachtet werden können, als in einer nemlichen Ebene liegend; das heißt, wenn sie entweder parallel unter sich sind, oder wenn sie sich in einem Punkte begegnen, so gehört die erzeugte Fläche zu der Klasse der **aufwickelbaren Flächen**.

Im andern Falle, und zwar im Allgemeinsten, wenn nemlich je zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien nicht in einer und derselben Ebene enthalten sind, entsteht durch die Bewegung dieser Geraden eine **windische Fläche**.

Aus diesen Erklärungen ist ersichtlich, daß die Kegelflächen und die Cylinderflächen zufolge ihrer Erzeugungsart durch die gerade Linie zu der erstgenannten Klasse gehören.

97. Die Bedingung, eine aufwickelbare Fläche zu erzeugen, wird am Allgemeinsten ausgedrückt, wenn man der geraden Erzeugungslinie auferlegt, sich dergestalt zu bewegen, daß sie beständig tangirend ist, zu einer gegebenen krummen Linie von doppelter Krümmung.

In der That, es sey A B C D (Taf. XII. Fig. 1.) eine doppelt gekrümmte Linie von beliebiger Stellung im Raume; denken wir uns alle möglichen Tangenten a A a', b B b', c C c', . . . ꝛc. dieser Linie, so sind diese eben so viele Stellungen der beweglichen Geraden, und es ist leicht zu ersehen, daß die krumme Fläche, die sie alle zusammen bilden, der gegebenen Erklärung (Art. 97.) einer aufwickelbaren Fläche vollkommen entspreche; denn irgend eine Erzeugungslinie, wie b B b' wird von der unmittelbar vorhergehenden Geraden a A a', und der unmittelbar Nachfolgenden c C c' in zwey, auf der Krummen A B C D gelegenen Punkten A und B geschnitten, weil diese Geraden als Tangenten der Krummen A B C D die Verlängerungen ihrer aneinanderstoßenden Elemente sind.

98. Man nennt jede einzelne Stellung der geraden Erzeugungslinie eine Kante der aufwickelbaren Fläche. Je zwey aufeinanderfolgende Kanten schließen ein Flächenelement ein, das man als ein unendlich schmales, und in der Richtung der begränzenden Kanten, unbestimmtes Stückchen einer Ebene betrachten kann. Alle diese Elemente der Fläche lassen sich, ohne auseinander gerissen zu werden, und ohne sich zu verdoppeln, auf eine Ebene aufrollen oder aufwickeln. Man kann sich in der That vorstellen, daß das erste Element a b B sich um die Kante b B, welche es mit dem Zweyten b c C verbindet, als ein Scharnier drehe, bis es in der nemlichen Ebene ist wie dieses Element; daß sodann diese beyden vereinigten Elemente sich um die Kante d D, die sie mit dem Dritten verbindet, drehen, bis sie mit diesem dritten Elemente in einer nemlichen Ebene sind, und sofort; und es ist einleuchtend, daß die ganze Fläche sich dergestalt ohne Unterbrechung des Zusammenhanges,

und ohne Verdoppelung auf eine Ebene aufwickeln lasse, welche Eigenschaft den aufwickelbaren Flächen ihren Namen gegeben hat.

99. Wenn man den Begriff der Aufwicklung auf die durch ebene Flächen begränzten Körper überträgt, so sieht man sogleich, daß die Seitenflächen aller Pyramiden und aller Prismen, wenn man ihre Grundflächen außer Acht läßt, welches blos zufällige Gränzen dieser unbestimmt betrachteten Körper sind, sich auf die Ebene irgend einer Seite neben einander auflegen lassen ohne einen leeren Raum zwischen sich zu lassen, und ohne irgend einer Verdopplung zu unterliegen.

Will man diese nemliche Operation bey einem Körper anderer Art, zum Beyspiel bey einem Ikosaeder, bey einem Dodekaeder anwenden, so ist eben so leicht zu ersehen, daß sie nicht statt finden könne, ohne daß zwischen den verschiedenen Theilen der Aufwicklung leere Räume bleiben.

Die Prismen und Pyramiden sind jedoch nicht die einzigen Körper, deren Seitenflächen sich ohne eine Unterbrechung des Zusammenhanges auf eine Ebene aufwickeln lassen, sondern dieses kann jedesmal geschehen, wenn die Oberfläche eines vorgelegten Körpers durch winkelförmige unbestimmte Stücke von Ebenen gebildet wird, die nach ebenfalls unbestimmten Kanten aneinanderstoßen, und wenn auch diese winkelförmigen Seiten ihre Scheitel nicht in einem nemlichen Punkte hätten.

100. Betrachtet man nun irgend eine andere krumme Fläche als eine aufwickelbare, so läßt sich dieselbe immer auf irgend eine Art, zum Beyspiel, durch zwey Systeme paralleler Ebenen in so viele Theile getheilt denken, daß keiner von ihnen merkbar von einem ebenen Elemente verschieden ist. Aber wenn alle diese Theilchen auf eine Ebene ausgebreitet werden sollten, so daß zwey aneinanderstoßende Theilchen eine gemeinschaftliche Seite hätten, so würden sie leere Räume zwischen sich lassen, oder sich übereinander schieben, und der, durch den äußeren Umriß dieser so ausgebreiteten Theilchen eingeschlossene Flächenraum, würde nicht von gleicher Größe seyn, mit dem krummen Flächenstück, das von allen jenen Theilchen gebildet wird. Die aufwickelbaren Flächen besitzen daher allein die Eigenthümlichkeit, ohne Zerreißung oder Verdopplung auf eine Ebene aufgewickelt werden zu können; weil sie die Einzigen sind, deren ebene Elemente eine, in der Richtung der Kanten der Flächen unbegränzte Ausdehnung haben.

101. Die Kegel- und die Cylinderflächen, lassen sich leicht als besondere Arten der (Art. 97.) erklärten allgemeinen aufwickelbaren Fläche ableiten. In der That besteht die Eigenthümlichkeit dieser Letztern darin, daß ihre aufeinanderfolgenden geraden Erzeugungslinien sich zu zwey und zwey auf einer Linie von doppelter Krümmung, welche sie alle berührt, kreuzen; und sich von da aus unbestimmt nach beyden Seiten ver-

längern. Sie bilden dadurch zwey unterschiedene aber vollkommen ähnliche Flächennetze, die selbst nach jener Krummen, welche man die Rückkehrkante der aufwickelbaren Fläche nennt, dergestalt berührend aneinander stoßend, daß kein Theil der Fläche sich in den, durch die Höhlung jener krummlinigen Kante begränzten Raum ausdehnt. Indem man die Fläche durch eine beliebige Ebene schneidet, erhält man als Durchschnitt eine Kurve mit einem Rückkehrpunkte (Art. 408.), und dieser ist der Begegnungspunkt der schneidenden Ebene mit der Rückkehrkante. *) Diese merkwürdige Linie der aufwickelbaren Flächen ist, welches außerdem auch die eigenthümliche Beschaffenheit der Fläche seyn mag, immer eine Zentrallinie derselben.

Wenn die Rückkehrkante sich auf einen einzigen Punkt reduzirt, in dem sich sämmtliche geraden Erzeugungslinien kreuzen, so entsteht eine Kegelfläche, und jener Punkt ist ihr Mittelpunkt.

Die Kegelfläche wird eine Cylinderfläche, wenn der Mittelpunkt in eine unendliche Entfernung übergeht, so daß sämmtliche geraden Erzeugungslinien parallel unter sich werden.

Bey der Erzeugung der Umhüllungsflächen, zu Ende dieses Kapitels, werden wir noch eine andere Entstehungsart der aufwickelbaren Flächen kennen lernen.

Von den windischen Flächen.

103. Die Bewegung einer Geraden als Erzeugungslinie einer Fläche erfodert um bestimmt zu seyn, im Allgemeinen drey Bedingungen.

Wenn die entstehende Fläche eine aufwickelbare seyn soll, so ist hiemit schon die eine Bedingung ausgesprochen, daß je zwey aufeinanderfolgende Erzeugungslinien in einer Ebene seyn müssen, und man hat nur noch zwey weitere Bedingungen nöthig; zum Beyspiel, man läßt die bewegliche Gerade beständig eine gegebene Kurve und einen gegebenen festen Punkt durchschneiden, wie bey der Erzeung der Kegelflächen, oder eine Kurve durchschneiden und dabey stets parallel zu einer bestimmten Richtung bleiben wie die gerade Erzeugungslinie der Cylinder; endlich ist die alleinige Bedingung, daß die bewegliche Gerade stets eine gegebene Kurve von doppelter Krümmung berühren soll, hinreichend um ihren Weg festzusetzen.

Im Allgemeinen aber werden drey Bedingungen erfodert, um die Bewegung der

*) Nach dieser Analogie zwischen dem Rückkehrpunkte (point de rebroussement) gewisser Kurven, und der Rückkehrkante (arête de rebroussement) der aufwickelbaren Flächen wurde von Monge die Benennung der letzteren gebildet.