ist der Halbmesser eines Cylinders, von welchem diese zweyte Gerade die Axe ist, und auf ihr wird folglich die gesuchte kürzeste Entfernung gemessen.

Um die Berührungslinie der Cylinderfläche mit der Ebene, welche parallel zu den zwey gegebenen Geraden ist, zu finden, führe man durch irgend einen Punkt, der als Axe angenommenen Geraden, (zum Beyspiel durch den Punkt C, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet) eine Ebene senkrecht auf diese Axe. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der tangirenden Ebene ist die Berührungslinie dieser Letzten mit der kreisförmigen Grundlinie des Cylinders.

Nachdem die Vertikalebene C D sich um ihren Riß C D gedreht, und auf die Horizontalebene zurückgelegt hat, konstruire man den Winkel β C β' den die zweyte Gerade (C D, $c\,d$) mit der Horizontalebene macht, indem man eine Vertikale $\beta'\,\beta = b'\,b$ nimmt. Dieselbe Vertikalebene schneidet die, zu den zwey Geraden parallele Ebene nach der Geraden F K, parallel zu C β'. Daher schneidet die, durch C, und senkrecht auf die Axe geführte Ebene die Vertikalebene C D nach der Geraden C K, senkrecht auf C β' oder F K, und die Horizontalebene nach der auf C D senkrechten Geraden C H.

Nachdem dieselbe Ebene sich um ihren Horizontalriß C H gedreht hat, um sich auf die horizontale Projektionsebene zurückzulegen; fällt der Punkt K nach K′; der Punkt H des Risses bleibt fest, und die Gerade H K′ ist der Durchschnitt der tangirenden Ebene zu der Cylinderfläche mit der Ebene, welche senkrecht auf die Axe dieser Fläche ist. Wenn man daher aus dem Punkt C die Senkrechte C I auf jene Gerade H K′ fällt, so ist der aus C als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser = C I beschriebene Kreis die Grundlinie der Cylinderfläche, und I N ist die Horizontalprojektion der Berührungskante. Diese Kante schneidet die erste Gerade in dem Punkt (N, n), durch welchen die gesuchte Senkrecht geht.

Der letzte Theil der Auflösung vollendet sich wie die in Art. 43. Vorgetragene, auf welche wir zurückweisen.

Drittes Kapitel.

Fortsetzung der Erzeugung der Flächen.

Von den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

95. Alle Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können, bilden zwey große Klassen; sie sind entweder aufwickelbare oder windische Flächen.

Wenn vermöge des Gesetzes, wodurch die Bewegung der geraden Erzeugungslinie vorgeschrieben ist, immer zwey aufeinanderfolgende Stellungen dieser Geraden betrachtet werden können, als in einer nemlichen Ebene liegend; das heißt, wenn sie entweder parallel unter sich sind, oder wenn sie sich in einem Punkte begegnen, so gehört die erzeugte Fläche zu der Klasse der **aufwickelbaren Flächen**.

Im andern Falle, und zwar im Allgemeinsten, wenn nemlich je zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien nicht in einer und derselben Ebene enthalten sind, entsteht durch die Bewegung dieser Geraden eine **windische Fläche**.

Aus diesen Erklärungen ist ersichtlich, daß die Kegelflächen und die Cylinderflächen zufolge ihrer Erzeugungsart durch die gerade Linie zu der erstgenannten Klasse gehören.

97. Die Bedingung, eine aufwickelbare Fläche zu erzeugen, wird am Allgemeinsten ausgedrückt, wenn man der geraden Erzeugungslinie auferlegt, sich dergestalt zu bewegen, daß sie beständig tangirend ist, zu einer gegebenen krummen Linie von doppelter Krümmung.

In der That, es sey A B C D (Taf. XII. Fig. 1.) eine doppelt gekrümmte Linie von beliebiger Stellung im Raume; denken wir uns alle möglichen Tangenten a A a', b B b', c C c', . . . ꝛc. dieser Linie, so sind diese eben so viele Stellungen der beweglichen Geraden, und es ist leicht zu ersehen, daß die krumme Fläche, die sie alle zusammen bilden, der gegebenen Erklärung (Art. 97.) einer aufwickelbaren Fläche vollkommen entspreche; denn irgend eine Erzeugungslinie, wie b B b' wird von der unmittelbar vorhergehenden Geraden a A a', und der unmittelbar Nachfolgenden c C c' in zwey, auf der Krummen A B C D gelegenen Punkten A und B geschnitten, weil diese Geraden als Tangenten der Krummen A B C D die Verlängerungen ihrer aneinanderstoßenden Elemente sind.

98. Man nennt jede einzelne Stellung der geraden Erzeugungslinie eine Kante der aufwickelbaren Fläche. Je zwey aufeinanderfolgende Kanten schließen ein Flächenelement ein, das man als ein unendlich schmales, und in der Richtung der begränzenden Kanten, unbestimmtes Stückchen einer Ebene betrachten kann. Alle diese Elemente der Fläche lassen sich, ohne auseinander gerissen zu werden, und ohne sich zu verdoppeln, auf eine Ebene aufrollen oder aufwickeln. Man kann sich in der That vorstellen, daß das erste Element a b B sich um die Kante b B, welche es mit dem Zweyten b c C verbindet, als ein Scharnier drehe, bis es in der nemlichen Ebene ist wie dieses Element; daß sodann diese beyden vereinigten Elemente sich um die Kante d D, die sie mit dem Dritten verbindet, drehen, bis sie mit diesem dritten Elemente in einer nemlichen Ebene sind, und sofort; und es ist einleuchtend, daß die ganze Fläche sich dergestalt ohne Unterbrechung des Zusammenhanges,

und ohne Verdoppelung auf eine Ebene aufwickeln lasse, welche Eigenschaft den aufwickelbaren Flächen ihren Namen gegeben hat.

99. Wenn man den Begriff der Aufwicklung auf die durch ebene Flächen begränzten Körper überträgt, so sieht man sogleich, daß die Seitenflächen aller Pyramiden und aller Prismen, wenn man ihre Grundflächen außer Acht läßt, welches blos zufällige Gränzen dieser unbestimmt betrachteten Körper sind, sich auf die Ebene irgend einer Seite neben einander auflegen lassen ohne einen leeren Raum zwischen sich zu lassen, und ohne irgend einer Verdopplung zu unterliegen.

Will man diese nemliche Operation bey einem Körper anderer Art, zum Beyspiel bey einem Ikosaeder, bey einem Dodekaeder anwenden, so ist eben so leicht zu ersehen, daß sie nicht statt finden könne, ohne daß zwischen den verschiedenen Theilen der Aufwicklung leere Räume bleiben.

Die Prismen und Pyramiden sind jedoch nicht die einzigen Körper, deren Seitenflächen sich ohne eine Unterbrechung des Zusammenhanges auf eine Ebene aufwickeln lassen, sondern dieses kann jedesmal geschehen, wenn die Oberfläche eines vorgelegten Körpers durch winkelförmige unbestimmte Stücke von Ebenen gebildet wird, die nach ebenfalls unbestimmten Kanten aneinanderstoßen, und wenn auch diese winkelförmigen Seiten ihre Scheitel nicht in einem nemlichen Punkte hätten.

100. Betrachtet man nun irgend eine andere krumme Fläche als eine aufwickelbare, so läßt sich dieselbe immer auf irgend eine Art, zum Beyspiel, durch zwey Systeme paralleler Ebenen in so viele Theile getheilt denken, daß keiner von ihnen merkbar von einem ebenen Elemente verschieden ist. Aber wenn alle diese Theilchen auf eine Ebene ausgebreitet werden sollten, so daß zwey aneinanderstoßende Theilchen eine gemeinschaftliche Seite hätten, so würden sie leere Räume zwischen sich lassen, oder sich übereinander schieben, und der, durch den äußeren Umriß dieser so ausgebreiteten Theilchen eingeschlossene Flächenraum, würde nicht von gleicher Größe seyn, mit dem krummen Flächenstück, das von allen jenen Theilchen gebildet wird. Die aufwickelbaren Flächen besitzen daher allein die Eigenthümlichkeit, ohne Zerreißung oder Verdopplung auf eine Ebene aufgewickelt werden zu können; weil sie die Einzigen sind, deren ebene Elemente eine, in der Richtung der Kanten der Flächen unbegränzte Ausdehnung haben.

101. Die Kegel- und die Cylinderflächen, lassen sich leicht als besondere Arten der (Art. 97.) erklärten allgemeinen aufwickelbaren Fläche ableiten. In der That besteht die Eigenthümlichkeit dieser Letztern darin, daß ihre aufeinanderfolgenden geraden Erzeugungslinien sich zu zwey und zwey auf einer Linie von doppelter Krümmung, welche sie alle berührt, kreuzen; und sich von da aus unbestimmt nach beyden Seiten ver-

längern. Sie bilden dadurch zwey unterschiedene aber vollkommen ähnliche Flächennetze, die selbst nach jener Krummen, welche man die Rückkehrkante der aufwickelbaren Fläche nennt, dergestalt berührend aneinander stoßend, daß kein Theil der Fläche sich in den, durch die Höhlung jener krummlinigen Kante begränzten Raum ausdehnt. Indem man die Fläche durch eine beliebige Ebene schneidet, erhält man als Durchschnitt eine Kurve mit einem Rückkehrpunkte (Art. 408.), und dieser ist der Begegnungspunkt der schneidenden Ebene mit der Rückkehrkante. *) Diese merkwürdige Linie der aufwickelbaren Flächen ist, welches außerdem auch die eigenthümliche Beschaffenheit der Fläche seyn mag, immer eine Zentrallinie derselben.

Wenn die Rückkehrkante sich auf einen einzigen Punkt reduzirt, in dem sich sämmtliche geraden Erzeugungslinien kreuzen, so entsteht eine Kegelfläche, und jener Punkt ist ihr Mittelpunkt.

Die Kegelfläche wird eine Cylinderfläche, wenn der Mittelpunkt in eine unendliche Entfernung übergeht, so daß sämmtliche geraden Erzeugungslinien parallel unter sich werden.

Bey der Erzeugung der Umhüllungsflächen, zu Ende dieses Kapitels, werden wir noch eine andere Entstehungsart der aufwickelbaren Flächen kennen lernen.

Von den windischen Flächen.

103. Die Bewegung einer Geraden als Erzeugungslinie einer Fläche erfodert um bestimmt zu seyn, im Allgemeinen drey Bedingungen.

Wenn die entstehende Fläche eine aufwickelbare seyn soll, so ist hiemit schon die eine Bedingung ausgesprochen, daß je zwey aufeinanderfolgende Erzeugungslinien in einer Ebene seyn müssen, und man hat nur noch zwey weitere Bedingungen nöthig; zum Beyspiel, man läßt die bewegliche Gerade beständig eine gegebene Kurve und einen gegebenen festen Punkt durchschneiden, wie bey der Erzeung der Kegelflächen, oder eine Kurve durchschneiden und dabey stets parallel zu einer bestimmten Richtung bleiben wie die gerade Erzeugungslinie der Cylinder; endlich ist die alleinige Bedingung, daß die bewegliche Gerade stets eine gegebene Kurve von doppelter Krümmung berühren soll, hinreichend um ihren Weg festzusetzen.

Im Allgemeinen aber werden drey Bedingungen erfodert, um die Bewegung der

---

*) Nach dieser Analogie zwischen dem Rückkehrpunkte (point de rebroussement) gewisser Kurven, und der Rückkehrkante (arête de rebroussement) der aufwickelbaren Flächen wurde von Monge die Benennung der letzteren gebildet.

geraden Erzeugungslinie zu leiten. Es ist in der That leicht einzusehen, daß wenn eine bewegliche Gerade nur den zwey Foderungen entsprechen sollte, stets zwey Linien von doppelter Krümmung zu schneiden: ihre Bewegung dadurch nicht festgesetzt wäre. Denn, nachdem man die Gerade durch irgend einen Punkt der ersten krummen Leitlinie geführt hat, kann sie noch alle Punkte der zweyten Kurve durchlaufen, und ihre Stellung ist somit nicht bestimmt. Fügen wir nun noch eine dritte Bedingung bey; und unter allen, die wir wählen könnten, diese: die Gerade soll bey ihrer Bewegung immer horizontal bleiben; so ist diese Bewegung, und somit auch die Erzeugung einer Fläche bestimmt. Will man zum Beyspiel die Erzeugungslinie konstruiren, die einem beliebigen Punkte der einen Leitlinie entspricht, so hat man nur durch diesen Punkt eine horizontale Ebene zu führen, und nachdem man ihren Durchschnitt mit der zweyten Leitlinie bestimmt, diesen Punkt mit dem Erstgenommenen durch eine Gerade zu verbinden.

Es ist einleuchtend, daß, wenn nicht einige besondere Umstände hiebey obwalten, die das Gegentheil möglich machten, je zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien nicht in einer Ebene seyn können; sie werden übereinander weggehen, indem sie sich in ihren Richtungen kreuzen, was die charakteristische Eigenthümlichkeit der windischen Flächen ausmacht.

104. Das Element einer windischen Fläche, was zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien einschließen, ist in der Richtung dieser Geraden von unbegränzter Ausdehnung, aber es ist, wie klein auch die Entfernung der einschließenden Erzeugungslinien seyn mag, kein Stück einer Ebene, sondern ein krummflächiges Element in jedem seiner Punkte, und von der Gestalt einer sogenannten windischen oder windschiefen Ebene; weßhalb man auch allen, aus derartigen Elementen zusammengesetzten, Flächen die Geschlechtsbenennung „windisch“ gegeben hat.

Diese Flächen haben zwar die Gerade zur Erzeugungslinie, wie die Aufwickelbaren; aber sie können nicht wie diese Letzteren eine Rückkehrkante haben. Denkt man sich immer zwey aufeinanderfolgende Erzeugungslinien einer windischen Fläche durch die Gerade geschnitten, welche senkrecht auf beyde ist; so bilden die Fußpunkte aller dieser Senkrechten auf der windischen Fläche eine besondere Linie, welche man die Einziehungslinie (courbe de striction) *) nennen kann.

105. Die allgemeinste windische Fläche wird durch eine Gerade erzeugt, der man

*) Anm. Diese Linie enthält offenbar die kürzeste Entfernungen aller Geraden der windischen Fläche, so daß dieselbe nach dieser Linie am engsten, oder gewissermaßen eingeschnürt erscheint; daher die Benennung der Linie.

auferlegt, sich auf drey gegebenen krummen Linien zu bewegen. Nimmt man einen Punkt der einen krummen Leitlinie als Scheitel eines Kegels, welcher die zweyte Krumme als Basis hat, so wird dieser die dritte Krumme in einem oder mehreren Punkten schneiden, und die Gerade, welche durch einen dieser Letzten, und durch den Punkt der ersten Kurve geführt ist, lehnt sich zu gleicher Zeit auf alle drey gegebenen Kurven.

Wenn man diese drey Bedingungen zum Theil oder ganz durch andere ersetzt; indem man zum Beyspiel der Geraden aufgiebt, sich auf zwey Krummen und einer Fläche zu bewegen; oder auf zwey Flächen und einer Kurve; oder auf drey Flächen; oder auf zwey Flächen, wobey sie einen bekannten Winkel mit einer gegebenen Ebene macht, so entsteht durch diese Bewegung, im Allgemeinen, eine windische Fläche.

Sehr häufig sind zwey Leitlinien gegeben, und eine Ebene, zu welcher die bewegliche Gerade beständig parallel bleiben soll. Wenn in diesem Falle, die Eine der beyden Leitlinien eine Gerade wird, so entsteht eine Fläche, welche unter dem Namen Konoid bekannt ist, weil sie einige Aehnlichkeit mit dem Kegel (conus) hat. Ist bey dem Konoid die gerade Leitlinie senkrecht auf die Ebene des Parallelismus, so erhält die Fläche die Benennung gerades Konoid, und jene gerade Leitlinie ist zugleich die Einziehungslinie derselben.

Von den Umhüllungsflächen.

106. Wenn eine Fläche von beständiger oder veränderlicher Gestalt sich nach gewissem Gesetze bewegt, so durchläuft sie einen Raum, dessen Gränze oder Umhüllung eine gewisse krumme Fläche ist. Man nennt die Flächen, die auf solche Weise hervorgebracht werden können, Umhüllungsflächen oder auch nur Umhüllungen; der beweglichen Erzeugungsfläche giebt man den Beynamen der umhüllten.

Betrachten wir eine umhüllte Fläche in drey unmittelbar aufeinanderfolgenden Stellungen: die Zweyte und die Erste werden sich nach einer gewissen krummen Linie schneiden, die Zweyte und die Dritte werden sich nach einer ähnlichen Linie schneiden; der geometrische Ort alle so aufeinanderfolgenden Durchschnitte ist die Umhüllung des von der beweglichen Fläche durchlaufenen Raumes.

Man denke sich zum Beyspiel eine im Raume bewegliche Kugel, von beständigem oder veränderlichem Halbmesser, deren Mittelpunkt eine bekannte Linie durchläuft. Wenn man bemerkt, daß zwey Kugeln sich nach einem Kreise schneiden, dessen Ebene senkrecht auf die, durch ihre Mittelpunkte gezogene Gerade ist, so wird man leicht einsehen, daß die Umhüllung dieser beweglichen Kugel, oder vielmehr des von ihr durchlaufenen Raumes, eine röhrenförmige Fläche sey, deren Schnitte senkrecht auf die Kurve, in welcher sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, Kreise sind. Eine dieser Erzeugung unterworfene Fläche ist die der gewundenen Säule, welche nichts anderes ist, als die Umhüllung des von einer Kugel, von veränderlichem Halbmesser durchlaufenen Raumes, deren Mittelpunkt in einer Schraubenlinie von vertikaler Axe läuft.

Die aufeinanderfolgenden Durchschnitte der umhüllten Fläche sind die eigentlichen Erzeugungslinien der Umhüllungsfläche; aber diese Durchschnitte oder Erzeugungslinien sind bey allen Umhüllungen, die durch eine nemliche umhüllte Fläche hervorgebracht werden können, ähnlich, und sie geben diesen Umhüllungen gewissermaaßen einen gemeinsamen Charakter, weßhalb man ihnen den Namen Charakteristiken gegeben hat, um sie von den gewöhnlichen Erzeugungslinien auszuzeichnen.

107. Betrachtet man eine im Raume bewegliche Fläche, und ihre Umhüllung, welche der Ort ihrer aufeinanderfolgenden Durchschnitte ist, so wird man leicht einsehen, daß die Umhüllungsfläche jede Stellung der Umhüllten nach einer, dieser Stellung entsprechenden Charakteristik berühre; weil je zwey Charakteristiken, aufeinanderfolgend betrachtet, sich zu gleicher Zeit auf der umhüllten, und der Umhüllungsfläche befinden, und diese daher das, zwischen jenen Charakteristiken gefaßte Flächenelement gemeinschaftlich haben.

Aber die Reihe der Charakteristiken einer Umhüllungsfläche werden sich aus eben dem Grunde, weil sie zu zwey und zwey auf einer nemlichen Umhüllten liegen, im Allgemeinen auch, zu zwey und zwey, jedesmal in einer gewissen Zahl von Punkten begegnen. Der Ort dieser Begegnungspunkte ist auf der Umhüllungsfläche eine sichtbare krumme Linie von einem oder mehreren Zweigen, welche in jedem dieser Zweige von einer jeden Charakteristik berührt wird, denn jede Charakteristik hat zwey unendlich nahe liegende Punkte, oder mit andern Worten, ein Linearelement mit demselben gemein.

Diese Linie, obschon sie nicht auf jeder Umhüllungsfläche wirklich erscheint, ist aber da wo sie vorkommt, im Allgemeinen eine nothwendige Folge der Erzeugung, und unabhängig von der Figur der umhüllten Fläche, sie ist eine Rückkehrkante (Art. 102.), die zwey oder mehrere Netze der Umhüllungsfläche von einander trennt.

108. Die einfachste Umhüllungsfläche ist diejenige, welche den, von einer Ebene durchlaufenen Raum begränzt. Diese Fläche ist, wie leicht zu entnehmen, aufwickelbar. Stellen wir uns zum Beyspiel vor, eine bewegliche Ebene solle in jeder ihrer Stellungen normal zu einer gegebenen Linie von doppelter Krümmung seyn.

Wenn wir irgend eine Stellung dieser Ebene betrachten, so wird diese von der unmittelbar nachfolgenden Ebene nach einer geraden Linie geschnitten werden, die zweyte Ebene selbst wird wiederum von der dritten Ebene nach einer von der ersten verschiedenen Geraden geschnitten werden; die dritte Ebene wird von der vierten nach einer neuen, von den zwey ersten unterschiedenen Geraden durchschnitten, und so weiter fort. Diese auf einanderfolgenden geraden Durchschnitte sind die Charakteristiken der Umhüllung der beweglichen Ebene. Ueberdies sind alle diese Charakteristiken zu zwey und zwey aufeinanderfolgend betrachtet in einerley Ebene, weil sie die Durchschnitte einer nemlichen umhüllten Ebene sind mit derjenigen, welche ihr unmittelbar vorhergeht und der, welche ihr unmittelbar folgt; daher ist die Umhüllungsfläche, die sie zusammen bilden, aufwickelbar.

Aber außerdem, daß jene Charakteristiken zu zwey und zwey in einer Ebene liegen, können sie in dieser Ebene nicht parallel seyn, weil zwey aufeinanderfolgende Normalebenen einer doppelt gekrümmten Linie im Allgemeinen nicht parallel seyn können. Daher wird jede Charakteristik von den beyden anliegenden in zwey unendlich nahen Punkten geschnitten, der Ort dieser so bestimmten Punkte ist auf der Fläche eine Linie von doppelter Krümmung, welche alle geraden Charakteristiken berührt, es ist die Rückkehrkante der aufwickelbaren Umhüllungsfläche. (Art. 102.)

Im Falle die Kurve, zu welcher die bewegliche Ebene stets normal seyn soll, eben wäre, statt von doppelter Krümmung, so würde die Umhüllung des von jener Ebene durchlaufenen Raumes eine Cylinderfläche werden; denn, da die umhüllte Ebene stets senkrecht auf eine und dieselbe Ebene seyn müßte, auf jene der Kurve nemlich, so wären ihre aufeinanderfolgenden Durchschnitte ebenfalls senkrecht auf diese Ebene und folglich parallel unter sich.

Die Kegelflächen werden durch eine Ebene erzeugt, welche immer durch den Mittelpunkt der Fläche geht, und sich so bewegt, daß sie stets die Tangente zu der Leitlinie des Kegels enthält. Zwey aufeinanderfolgende Ebenen schneiden sich hier nach einer Kante des Kegels.

109. Wir haben (Art. 103.) gesehen, daß drey Bedingungen die Bewegung einer geraden Linie festsetzen, und daß die dadurch entstehende Fläche, im Allgemeinen eine windische sey. Zwey Bedingungen hingegen bestimmen die Erzeugung einer aufwickelbaren Fläche, weil dadurch die Bewegung einer Ebene festgesetzt ist, und jede aufwickelbare Fläche als durch eine bewegliche Ebene hervorgebracht, angesehen werden kann.

Durch zwey gegebene krumme Linien läßt sich daher stets eine aufwickelbare Fläche führen, aber nur eine Einzige. In der That, wir wollen beyde Kurven mit A und B bezeichnen; nachdem man auf der A einen beliebigen Punkt genommen, kann man denselben als Scheitel einer Kegelfläche betrachten, deren Leitlinie die Kurve B ist; jede tangirende Ebene zu dieser Kegelfläche, muß durch eine Tangente zu der Kurve B gehen. Führt man daher durch den, auf der Krummen A genommenen Punkt eine Tangente zu dieser Linie, und durch die Tangente eine tangirende Ebene zu der Kegelfläche, so geht diese Ebene durch zwey Tangenten, won denen die Eine der Linie A, und die Andere, der Linie B angehört. Indem man den auf der Krummen A genommenen Scheitel verändert, erhält man eine neue Kegelfläche, und eine neue Stellung der tangirenden Ebene zu den Krummen A und B; die Umhüllung des von dieser Ebene durchlaufenen Raumes, ist die aufwickelbare Fläche, welcher auferlegt ward, durch die zwey Krummen A und B zu gehen.

Die Bewegung einer Ebene, welche eine aufwickelbare Fläche erzeugt, läßt sich am Allgemeinsten dadurch bestimmen, daß man der Ebene auferlegt, sich zu bewegen, indem sie stets tangirend bleibt, zu zwey gegebenen krummen Flächen. Man wird irgend eine Stellung dieser Ebene bestimmen, wenn man einen beliebigen Punkt im Raume als gemeinsamen Scheitel zweyer Kegelflächen nimmt, welche um die beyden krummen Flächen umschrieben sind, und diese nach gewissen krummen Linien berühren; eine Ebene, welche diese beyden Kegelflächen tangirt, berührt auch beyde gegebener krummen Flächen, und ist folglich die Gesuchte. Indem man den Scheitel der umschriebenen Kegelflächen verändert, bestimmt man eine weitere Stellung der tangirenden Ebene zu beyden Flächen. Die Umhüllung des von dieser Ebene durchlaufenen Raumes, ist die aufwickelbare Fläche, welche um die beyden gegebenen krummen Flächen umschrieben ist, und dieselben nach zwey krummen Linien berührt. Wären diese Berührungslinien der zwey Flächen mit der Aufwickelbaren bekannt, so könnte man diese Letzte auch konstruiren, indem man ihr auferlegte, durch die zwey Berührungslinien zu gehen.

110. Die Umdrehungsflächen können betrachtet werden, als die Umhüllung eines beweglichen geraden Kegels von kreisförmiger Grundlinie, oder einer Kugel, oder eines geraden Cylinders, welcher als Grundlinie einen Meridian der Fläche hat.

Denken wir uns durch irgend einen Punkt einer Umdrehungsfläche zwey Ebenen; Eine, senkrecht auf die Axe, und die Andere durch die Axe gehend: der Schnitt der ersten Ebene wird ein Parallelkreis und der Schnitt der Zweyten ein Meridian der Fläche seyn. Die Tangente zu dem Meridian an dem Begegnungspunkt der zwey Schnitte trifft die Axe der Fläche in einem Punkt, und wir haben (Art. 82.) gesehen, daß dieser der Mittelpunkt eines geraden Kegels sey, der die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise berührt. Da man auf diese Art jeden Parallelkreis als die Berührungslinie der Fläche mit einem geraden Kegel betrachten kann, so ist auch jede Umdrehungsfläche als die Umhüllung des Raumes anzusehen, den ein gerader Kegel durchläuft, welcher sich dergestalt verändert, daß seine Grundlinie stets ein Parallelkreis der Umdrehungsfläche ist; seine Erzeugungslinie, die Tangente zu dem Meridian an dem Punkt, in welchem derselbe die kreisförmige Grundlinie schneidet, und daß sein Mittelpunkt immer in der Umdrehungsaxe liegt. Die aufeinanderfolgenden Durchschnitte dieses beweglichen Kegels sind die Parallelkreise der Umdrehungsfläche.

Eine Kugel, welche als Halbmesser das Stück der Normale zu einem Meridian der Fläche hat, was zwischen dem Meridian und der Axe liegt (Art. 91.), und deren Mittelpunkt der Begegnungspunkt dieser Normalen mit der Axe ist, berührt offenbar die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreis, welcher durch den Fuß der Normalen geht; denn die beyden Flächen haben an allen Punkten dieses Parallelkreises einerley Normalen, und folglich einerley tangirende Ebenen; wenn daher diese Kugel sich so bewegt, daß ihr Mittelpunkt die Umdrehungsaxe durchläuft und ihr Halbmesser immer gleich ist dem Stück der Normalen zwischen ihrem Mittelpunkt und dem Meridian, so bildet die Umdrehungsfläche ihre Umhüllung.

Betrachtet man den Meridianschnitt einer Umdrehungsfläche als Grundlinie eines geraden Cylinders, dessen Kanten senkrecht auf die Ebene des Schnittes sind; so ist jegliche von diesen Kanten Tangente zu einem Parallelkreis der Umdrehungsfläche, und folglich Tangente zu der Fläche selbst: die Berührungspunkte der Tangenten sind die Punkte des Meridianes. Der Cylinder ist daher umschrieben zu der Umdrehungsfläche, und berührt dieselbe nach dem Meridiane. Läßt man den Cylinder sich so bewegen, daß seine Grundlinie nach und nach in alle Meridianebenen übergeht, so ist die Umdrehungsfläche die Umhüllung des von dem Cylinder durchlaufenen Raumes.

111. Die Umhüllung des Raumes, den eine Kugel durchläuft, deren Halbmesser beständig oder veränderlich ist, gehört im Allgemeinen zu der Gattung, welche man röhrenförmige Flächen nennt. Wenn der Halbmesser der Kugel beständig ist, und die, von ihrem Mittelpunkt durchlaufene Linie ein Kreis, so ist die Umhüllung derselben eine ringförmige Fläche. (Art. 64.)

112. Obgleich die Erzeugung der Umhüllungsflächen sehr abstrakt scheinen mag, so wird sie doch in mehreren technischen Künsten angewendet, und dies hauptsächlich von den Drehern und Blechnern (Klempnern).

Die Letzten wissen eine Tafel Blech um eine Reihe gerader Linien so zu biegen, daß die Ebene der Tafel sich in eine aufwickelbare Fläche verwandelt, von welcher diese Tafel, während der Arbeit, die umhüllte Erzeugungsebene ist.

Die Dreher geben ihren Werken mit einem Instrumente die Vollendung, dessen Schneide eine gerade Linie ist. Wenn sie arbeiten, so beschreibt diese Schneide, in Bezug auf die zu verfertigende Umdrehungsfläche eine umhüllte Kegelfläche derselben, und durch die passende Aenderung der Richtung des Instruments geschieht es, daß die verschiedenen Zonen der Umhüllten nach und nach mit der auszuführenden Fläche zusammenfließen.

Es ist demzufolge einleuchtend, daß die Uebung den Blechnern und Drehern einige Begriffe von der Erzeugung der Umhüllungen geben müsse; aber was vielleicht überraschend scheinen mag, ist, daß sie einen sehr feinen Takt hierin haben, und daß sie auf den bloßen Anblick einer Oberfläche erkennen, ob sie dieselbe verfertigen können oder nicht.

Nehmen wir an, man habe Modelle von aufwickelbaren Flächen, von Umdrehungsflächen und von windischen Flächen *) zusammengestellt, und man verlange von geschickten Blechnern und Drehern, alle diejenigen herauszunehmen, die sie verfertigen könnten; so wird der Blechner alle aufwickelbaren Flächen zur Seite stellen, der Dreher alle Umdrehungsflächen, und keiner von beyden wird sich mit den windischen befassen.

Nun aber sind die windischen Flächen das Resultat der Bewegung einer Geraden, wie die Aufwickelbaren; woran unterscheidet nun der Blechner die Ersten von den Letzten? An folgendem: bey der windischen Fläche ist die bewegliche Gerade nur eine gewöhnliche Erzeugungslinie, bey der aufwickelbaren Fläche aber ist sie eine Charakteristik auf einer kleinen, unendlich schmalen Zone gelegen, und diese Zone, welche eine Andeutung von der umhüllten Ebene giebt, zeigt dem Blechner an, daß dieser Umhüllten ein cylindrischer oder kegelförmiger Ambos substituirt werden könne, um darauf eine Tafel Blech so zu biegen, daß sie sich in eine aufwickelbare Fläche verwandle.

Eben so entsteht eine Umdrehungsfläche durch die Bewegung eines Kreises, wie alle Kegel- und Cylinderflächen von elliptischen Grundlinien. **) Aber bey diesen Letzten ist der Kreis nur eine gewöhnliche Erzeugungslinie, bey der Umdrehungsfläche hingegen ist er die Berührungslinie der Umhüllungsfläche mit der Umhüllten, daß heißt, eine Charakteristik. Diese Charakteristik zeigt dem Dreher an, daß wenn er seinen Meissel, in Bezug auf den zu drehenden Körper gerade Kegelflächen beschreiben läßt, dieser Meissel, mit Gewandheit geführt, ihre Umhüllung hervorbringen werde, und daß er folglich zur Verfertigung aller möglichen Umdrehungsflächen dienen könne, während er zur Verfertigung aufwickelbarer Flächen, die nicht zugleich durch Umdrehung erzeugt werden können, nicht zu gebrauchen ist.

---

*) Vorausgesetzt, daß unter diesen Modellen keine seyen, welche entweder windisch oder aufwickelbar und zugleich durch Umdrehung entstanden seyen.

**) Alle Kegel- und Cylinderflächen von elliptischen Grundlinien können durch zwey Systeme paralleler Ebenen, nach Kreisen geschnitten werden. (Siehe Art. 126.)

Von den Flächen der zweyten Ordnung.

113. Unter Flächen der zweyten Ordnung oder des zweyten Grads begreift man diejenigen, welche, wenn sie von einer Ebene geschnitten werden, immer eine Kurve der zweyten Ordnung hervorbringen. Sie haben, wie diese, die Eigenthümlichkeit von einer Geraden in nicht mehr als zwey Punkten getroffen zu werden.

Die Eigenschaften der Flächen der zweyten Ordnung lassen sich nur durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie herleiten, woher auch die Benennung "Fläche vom zweyten Grad" gezogen ist, oder durch rein geometrische Theorien, welche aber durchaus außer den Gränzen dieses Lehrbuches liegen. *) Jedoch wegen der häufigen Anwendung, welche diese Fläche in den graphischen Künsten finden; ist es unerläßlich, wenn auch nicht die Eigenschaften derselben, doch wenigstens ihre Gestalt und Erzeugung zu kennen; und diese wollen wir in den nachfolgenden Paragraphen auseinandersetzen.

114. Der Kegel von kreisförmiger Grundlinie kann, wie bekannt, von einer Ebenen nach den drey krummen Linien vom zweyten Grad, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden. (Art. 262 et seq.) Diese drey Kurven sind symeterisch, **) in Beziehung auf zwey unter sich senkrechte Gerade, welche man Haupt-Axen des Kegelschnittes nennt; sie haben Scheitel und diese Scheitel sind die Begegnungspunkte der Linie mit ihren Haupt-Axen.

Wir setzen als bekannt voraus, daß man diese Kurven mittelst ihrer Haupt-Axen zu zeichnen verstehe. (Diejenigen, welche diese Vorkenntnisse noch nicht besitzen sollten, finden in dem §. 1. des Anhanges eine kurzgefaßte Darstellung der Konstruktion und der vorzüglichsten Eigenschaften der Kegelschnittslinien.)

115. Man denke sich durch irgend einen Punkt des Raumes drey unter sich senkrechte Geraden, und, um unsere Vorstellung zu fixiren, wollen wir annehmen, zwey von diesen Geraden wären in einer Horizontalebene und die Dritte folglich vertikal. Denken wir uns sofort diesen gemeinschaftlichen Punkt der drey Geraden als Mittelpunkt dreyer

---

*) Man sehe hierüber Poncelet'ts Traité des propriétés projectives des figures. (Siehe die Vorrede.)

**) Zwey ebene Figuren, oder auch zwey Theile einer solchen Figur sind symetrisch, wenn ihre korrespondirenden Punkte auf Parallelen liegen, die sämmtlich von einer nemlichen Senkrechten, der Axe der Symetrie, durch ihre Mitten geschnitten werden. — Zwey Körper sind symetrisch von Gestalt und Stellung, wenn die korrespondirenden Punkte der Beyden durch parallele Gerade verbunden werden können, deren Mitten in einer nemlichen auf dieselben senkrechten Ebene liegen, welche die Ebene der Symetrie heißt.

Kugeln von den Halbmessern a, b, c; diese Kugeln werden die drey Geraden in sechs Punkten schneiden, so, daß die zwey Punkte, welche auf einer nemlichen Geraden liegen, um die Abstände 2 a, 2 b, 2 c, von einander entfernt sind.

Dieses festgesetzt, so konstruire man zwey Ellipsen, welche, als gemeinschaftlichen Mittelpunkt, den Durchschnitt der senkrechten Geraden haben, und von denen die Eine als Haupt-Axen die zwey Geraden 2 a und 2 b hat, und die Andere, die zwey Geraden 2 a, 2 c. Nachdem man durch die Gerade 2 c eine Reihe von Ebenen geführt hat, von denen jegliche die Ebene der ersten Ellipse nach einer, durch den Mittelpunkt gehenden Geraden schneidet, konstruire man über diesen zwey Geraden, als Haupt-Axen, eine neue Ellipse. Diese Reihe von Ellipsen, welche als gemeinschaftliche Axe die Gerade 2c haben, gehört einer Fläche vom zweyten Grad, welche man Ellipsoid nennt.

Wenn man sich eine Reihe von Hyperbeln denkt, welche die Gerade 2 c als eingebildete Axe gemein haben, und als Scheitel die Punkte der Ellipse, welche über den Geraden 2 a, 2 b, als Axen konstruirt ist; so gehört diese Reihe von Hyperbeln einer Fläche vom zweyten Grad, welche Hyperboloid von einem Netze genennt wird. Die Ellipse, deren Axen 2 a, 2 b sind, bildet die Kehle des Hyperboloids von einem Netz. Diese Fläche besteht aus zwey gleichen Theilen, welche nach jener Kehllinie tangirend in einander laufen, und sich von da an, auf und abwärts ins Unendliche ausdehnen.

Man substituire der Ellipse, welche als Axen, die Geraden 2 a, 2 b hat eine, über denselben Axen konstruirte Hyperbel, deren reelle Scheitel an den Endpunkten der Geraden 2 a liegen. Durch die Gerade 2 c führe man eine Reihe von Ebenen, von denen jede die Ebene der Hyperbel nach einer Geraden schneidet, das Stück dieser Geraden, was zwischen den beyden Zweigen der Hyperbel gefaßt ist, nehme man als reelle Axe einer neuen Hyperbel, welche als zweyte oder eingebildete Axe die Gerade 2 c hat. Die Reihe dieser neuen Hyperbeln gehören einer dritten Fläche vom zweyten Grad, welche Hyperboloid von zwey Netzen heißt.

116. Die drey Geraden 2 a, 2 b, 2 c sind die Haupt-Axen der Flächen der zweyten Ordnung; ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt der Fläche. *) Die Begegnungspunkte der Fläche mit ihren Axen sind die Scheitel derselben. Bey dem Ellipsoid sind die sechs Scheitel reell; bey dem Hyperboloid von einem Netz

*) Dieser Mittelpunkt hat die Eigenschaft, daß er alle durch denselben geführten Sehnen der Fläche in zwey gleiche Theile theilt, Sehne einer Fläche nennt man nemlich das Stück einer Geraden, welche die Fläche in zwey Punkten schneidet, was zwischen diesen Durchschnittspunkten gefaßt ist.

beschränkt sich die Zahl der reellen Scheitel auf vier, und auf zwey bey dem Hyperboloid von zwey Netzen. Man nennt die Schnitte der drey Ebenen, wellche durch zwey und zwey Axen gehen die Haupt-Schnitte der Fläche.

Zwey andere Flächen vom zweyten Grad, welchen man die Benennung elliptisches Paraboloid und hyperbolisches Paraboloid gegeben hat, haben keinen Mittelpunkt oder ihr Mittelpunkt liegt vielmehr im Unendlichen, und sie haben nur einen einzigen reellen Scheitel.

117. Denken wir uns zwey, unter sich senkrechte Ebenen, und in denselben zwey Parabeln, deren große Axen in dem Durchschnitt der Ebenen liegen, und welche als gemeinsamen Scheitel einen Punkt dieses Durchschnitts haben. Nehmen wir überdies die Parabeln von verschiedener Weite an, und lassen wir, während die eine Parabel fest bleibt, die andere sich so bewegen, daß ihre Ebenen immer senkrecht sind, und daß der Scheitel der beweglichen Parabel beständig auf der Festen bleibe. Durch diese Bewegung wird die mobile Parabel, wenn sie nach derselben Richtung divergirt, wie die feste Parabel, das elliptische Paraboloid erzeugen, und wenn sie nach entgegengesetzter Richtung divergirt, so erzeugt sie das hyperbolische Paraboloid.

118. Alle Flächen der zweyten Ordnung reduziren sich auf die fünf Folgenden: das Ellipsoid, das Hyperboloid von einem Netz, das Hyperboloid von zwey Netzen, das elliptische Paraboloid und das hyperbolische Paraboloid. Die beständigen Größen, welche diese fünf Flächenarten bestimmen, können unter sich gewisse Behältnisse haben, welche dieselben in andere Flächen vom zweyten Grad umgestalten als die Kugel, den Kegel und den Cylinder, deren Grundlinien die drey Kegelsschnittslinien sind ꝛc. Wenn von den drey Axen 2 a, 2 b, 2 c des Ellipsoids zwey gleich werden, so verwandelt sich dasselbe in eine Umdrehungsfläche, und es hat als Umdrehungsaxe diejenige von den dreyen, welche keine gleiche hat. Werden alle drey Axen des Ellipsoids einander gleich, so wird diese Fläche eine Kugel.

Das Hyperboloid von einem Netz verwandelt sich in eine Umdrehungsfläche, wenn die Axen 2 a, 2 b des elliptischen Haupt-Schnittes gleich werden; so daß diese Ellipse ein Kreis wird; die Gerade 2 c ist sodann die Umdrehungsaxe. Auch das Hyperboloid von zwey Netzen, und das elliptische Paraboloid können Umdrehungsflächen werden. Die erstere Fläche wird sodann erzeugt, durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre reelle Axe, und die Zweyte, durch die Umdrehung einer Parabel um ihre große Axe.

119. Das Hyperboloid von einem Netze hat die Eigenschaft, durch die gerade Linie erzeugt werden zu können; und zwar auf zwey verschiedene Weisen, so daß man durch jeden Punkt dieser Fläche zwey Gerade ziehen kann, die mit allen ihren Punkten

der Fläche angehören. Wenn eine bewegliche Gerade sich auf drey festen Geraden als Leitlinien bewegt, so ist die Fläche, die sie erzeugt, ein Hyperboloid von einem Netz: und wenn man drey beliebige Stellungen der Erzeugungslinie als die Leitlinien einer neuen beweglichen Geraden nimmt, so erzeugt diese Letztere durch ihre Bewegung abermals dasselbe Hyperboloid.

Es sey I K, (Taf. XII. Fig. 6.) eine Gerade, welche sich bewegt, indem sie sich beständig auf drey im Raume gegebene Gerade A B, M N, C D stützt, und diese Geraden in den Punkten I, G, K schneidet. Es seyen ferner A M D, B N C zwey andere Stellungen der beweglichen Geraden. Wenn eine zweyte bewegliche Gerade sich auf den drey als fest angenommenen Geraden A M D, I G K, B N C als Leitlinien bewegt, so bringen die beyden Bewegungen nur eine und dieselbe Fläche hervor. *)

Diese Eigenschaft des Hyperboloids von einem Netze ist für die darstellende Geometrie die merkwürdigste, weil sie, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, auf eine einfache Weise zur Konstruktion der tangirenden Ebenen zu den windischen Flächen führt.

120. Wenn die beyden reellen Axen 2 a, 2 b des Hyperboloids von einem Netze gleich werden, das heißt, wenn sich dasselbe in eine Umdrehungsfläche verwandelt, so kann diese Fläche auch durch eine Gerade erzeugt werden, die mit der Axe 2 c nicht in einer Ebene liegt, und sich um dieselbe als Rotationsaxe dreht.

Geht man von dieser, durch die Analisis bewiesenen Eigenschaft des Umdrehungshyperboloids von einem Netze aus, so läßt sich auch bey dieser Fläche die Eigenschaft der doppelten Erzeugung durch die gerade Linie geometrisch darthun.

121. Es sey (A, *a a'*) (Taf. IX.) eine vertikale Gerade, sie stelle die Axe 2 c des Hyperboloids vor, (R Q, *r q*) sey eine zweyte Gerade, welche durch ihre Umdrehung um die Erste ein Umdrehungshyperboloid von einem Netze erzeugt. Die aus dem Punkt A auf die Gerade R Q gefällte Senkrechte A T, ist die Horizontalprojektion der kürzesten Entfernung der zwey Geraden (A, *a a'*), (R Q, *r q*). Der Fußpunkt (T, *t*) dieser Senkrechten auf der Erzeugungslinie (R Q, *r q*) beschreibt bey der Umdrehung dieser Letzten den kleinsten Parallelkreis der Fläche, welchen wir aus diesem Grunde den Kehlkreis nennen (Art 115). Jeder andere Punkt der Erzeugungslinie, beschreibt

*) Der Beweis für die Identität der auf beyde Arten erzeugten Flächen läßt sich rein geometrisch nur auf eine weitläufige Art führen.

Wir haben denjenigen, den Hachette in seinen Elements de Géométrie à trois dimensions beybringt, und welcher sich auf einen Artikel von Chasles in der Correspondance sur l'école polytechnique gründet, in der Note II. zu Ende dieses Buches angefügt.

einen größeren Parallelkreis, wie zum Beyspiel der Punkt (R, r) auf der Horizontalebene den Kreis. (R U Q V, $e\,f$).

Wenn man durch die Axe irgend eine Meridianebene A M führt, so schneidet diese die Erzeugungslinie (R Q, $r\,q$) in einen Punkt (M, m) und man kann sich eine zweyte Gerade (V U, $v\,u$) denken, welche symetrisch mit der (R Q, $r\,q$) gestellt ist, in Bezug auf die Ebene A M. Diese zweyte Gerade wird die Horizontalebene in einem Punkt U des Kreises (R U Q V, $e\,f$) treffen, so daß die Gerade R U senkrecht auf A M ist, und sie wird die Ebene A M in dem nemlichen Punkt (M, m) wie die Gerade (R Q, $r\,q$) durchschneiden. Lassen wir die beyden Geraden (R Q, $r\,q$), (V U, $v\,u$) eine gleich große Drehung um die Axe machen, indem sie sich gleichmäßig der Ebene A M nähern, oder von ihr entfernen; so bleibt diese letzte immer ihre Ebene der Symetrie, sie werden sich immer in einen Punkt derselben Ebene schneiden, und wenn beyde Geraden eine ganze Umdrehung vollendet haben, so wird die Reihe ihrer Durchschnittspunkte auf der Ebene A M eine Linie bilden, welche nichts anderes ist, als der Meridian der Fläche. Wenn man daher die Meridianebene sammt den zwey Geraden sich zu gleicher Zeit um die Axe drehen läßt, so werden sie nur eine und dieselbe Umdrehungsfläche beschreiben.

Das Umdrehungshyperboloid von einem Netz kann daher auf doppelte Art durch die gerade Linie erzeugt werden, die geraden Erzeugungslinien eines Systems begegnen sich nicht, aber sie werden Alle durch irgend eine Gerade des andern Systems geschnitten. Da nun durch drey Leitlinien die Bewegung einer Geraden festgesetzt wird, so ist zufolge dieser Eigenthümlichkeit einleuchtend, daß je drey, einem nemlichen Erzeugungssystem angehörigen Geraden des Umdrehungshyperboloids genommen werden können, um als Leitlinien einer Geraden zu dienen, welche durch ihre Bewegung auf jenen Geraden, dieselbe Fläche erzeugen wird.

In allen ihren Stellungen sind die Geraden (R Q, $r\,q$), (V U, $v\,u$) tangirend zu einem geraden Cylinder, welcher als Axe die Vertikale (A, $a\,a'$) hat, und als Basis den Kehlkreis (T C D, $c\,d$), dessen Halbmesser die kürzeste Entfernung einer geraden Erzeugungslinie von der Axe ist. Alle Geraden der Fläche haben die gleiche Neigung gegen die Axe, und der Winkel, den sie mit der Horizontalebene machen, ist beständig.

122. Wenn man die drey geraden Leitlinien des Hyperboloids von einem Netze parallel zu einer und derselben Ebene annimmt, so bleibt die, auf diese drey Geraden sich stützende gerade Erzeugungslinie der Fläche immer parallel zu einer andern Ebene, und das Hyperboloid von einem Netze verwandelt sich in ein hyperbolisches Paraboloid. Diese letzte Fläche wird auch durch eine Gerade erzeugt, die sich bey ihrer Bewegung

auf zwey gerade Leitlinien stützt und dabey beständig parallel zu einer gegebenen Ebene bleibt.

Wenn man von dieser Erklärung des hyperbolischen Paraboloids ausgeht, so läßt sich beweisen, daß diese Fläche noch auf eine zweyte Art durch eine Gerade erzeugt werden kann, wenn sich nemlich diese neue Erzeugungslinie auf zwey beliebige Erzeugungslinien des ersten Systems, als Leitlinien stützt, und dabey parallel zu der Ebene der zwey ersten Leitlinien bleibt.

123. Es seyen A C, A″ C″, (Taf. XII. Fig. 5) zwey gegebene Leitlinien des Paraboloids; A A″, C C″ seyen zwey Erzeugungslinien, welche die gegebenen Leitlinien in den Punkten A und A″, C und C″ schneiden. Durch die Geraden C C″ und A″ C″ denke man sich eine Ebene geführt, und diese sey als Projektionsebene angenommen.

Die Ebenen, welche durch die Gerade A A″ parallel zu der C C″, und durch die Gerade C A parallel zu der C″ A″ geführt sind, schneiden sich nach einer Geraden A a, und ihre Risse auf der Projektionsebene schließen mit jenen obigen Geraden ein Parallelogramm C a A″ C″ ein.

Eine zu den zwey Erzeugungslinien A A″, C C″ parallele Ebene hat als Riß eine Parallele zu A″ a, wie B″ b: sie schneidet die gegebenen Erzeugungslinien in zwey Punkten B, B″, welche Punkte die Stellung einer dritten Erzeugungslinie B B″ bestimmen; und sie trennt von dem Dreyecke A C a ein ähnliches Dreyeck B C b.

Wir werden beweisen, daß, wenn man durch irgend einen Punkt B′ der Geraden B B″ eine Ebene parallel zu der Ebene a C A führt, diese Ebene das Paraboloid ebenfalls nach einer geraden Linie schneide.

Der Riß C′ a' dieser genannten Ebene muß parallel zu C a seyn, und sie wird die zwey parallelen Ebenen A A″ a, B B″ b nach den zu A a parallelen Geraden A′ a', B′ b' durchschneiden. A′ und C′ sind die Punkte, in denen dieselbe Ebene die Geraden A A″, C C″ trifft, und ich sage, daß die drey Punkte A′, B′, C′ in gerader Linie liegen.

In der That, die Ebene C a' A′ schneidet von den drey Dreyecken A″ A a, B″ B b, C A a wechselseitig ähnliche Dreyecke ab, welche folgende Proportionen geben:

$$A\,a : A'\,a' :: A''\,a : A''\,a' :: B''\,b : B''\,b' : B'\,b' : B\,b : B'\,b',$$

oder wenn man die mittlere Verhältnisse ausschließt.

$$A\,a : B\,b :: A'\,a' : B'\,b'.$$

Man hat daher

$$\frac{A\,a}{B\,b} = \frac{A'\,a'}{B'\,b'} = \frac{C\,a}{C\,b} = \frac{C'\,a'}{C'\,c'}$$

und folglich liegen die drey Punkte A′, B′, C′ in gerader Linie.

Es ergiebt sich hieraus, daß das hyperbolische Paraboloid nach zwey verschiedenen Weisen durch die gerade Linie erzeugt werden kann, einmal, indem die Erzeugungslinie sich auf zwey feste Gerade als Leitlinien lehnt und dabey parallel zu einer gegebenen Ebene bleibt; und zweytens, indem man zwey beliebige Erzeugungslinien jenes ersten Systems als feste Leitlinien nimmt, wobey die bewegliche Gerade immer parallel bleibt, zu der Ebene der zwey Leitlinien des ersten Systems. Beyde Erzeugungsarten ergeben sich, wie man sieht, Eine aus der Andern auf durchaus gleiche Weise.

124. Das Hyperboloid von einem Netze, das Umdrehungshyperboloid von einem Netze und das hyperbolische Paraboloid gehören, wie aus ihrer Erzeugungsart durch die gerade Linie hervorgeht zu den windischen Flächen, und sie sind die einfachsten dieses Geschlechtes. Alle drey können auf doppelte Art durch die Gerade erzeugt werden. Die zwey Systeme der geraden Erzeugungslinien theilen diese Flächen in eine unendliche Anzahl kleiner windischer Vierecke, und die Flächenstückchen, welche zwischen zwey aufeinanderfolgenden Erzeugungslinien eines nemlichen Systems gefaßt sind, sind windische Elemente, die sich nach der Richtung der Geraden, von denen sie eingeschlossen werden, ins Unendliche ausdehnen.

125. Das Hyperboloid von einem Netz wird ein gerader Kegel von elliptischer Grundlinie, wenn die, auf den beyden Axen 2 a, 2 b (Art. 115.) konstruirte Ellipse sich auf einen Punkt reduzirt, während die dritte Axe 2 c unendlich groß wird.

Dieser Kegel ist die einfachste Fläche vom zweyten Grad, welche durch eine Ebene nach den drey Kurven vom zweyten Grad, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden kann; er besitzt so wie alle übrigen Flächen vom zweyten Grad die Eigenschaft, durch zwey Reihen verschiedentlich geneigter Ebenen nach Kreisen geschnitten werden zu können, wobey übrigens bemerkt werden muß, daß bey dem hyperbolischen Paraboloid die Kreise von unendlichem Halbmesser sind, und mit den Geraden der Fläche zusammenfallen. Nimmt man bey dem elliptischen Kegel einen dieser Kreise für seine Grundlinie, so geht die aus dem Mittelpunkt der Fläche auf die Ebene des Kreises gefällte Senkrechte nicht durch den Mittelpunkt desselben, und aus diesem Grunde nennt man ihn schiefen Kegel. (Art. 61.) Siehe Note III.

126. Unter den Eigenschaften der Flächen vom zweyten Grad ist diejenige für die zeichnenden Künste besonders bemerkenswerth, daß alle Schnitte dieser Flächen durch parallele

Ebenen ähnlich sind. Die Kegel und Cylinder des zweyten Grads, haben diese Eigenschaft mit allen übrigen Kegeln und Cylindern gemein. Siehe Note I.

* * *

127. Indem wir somit diese Kapitel über die Gestalt und die Erzeugung der krummen Flächen schließen, müssen wir in einige nothwendige Erörterungen in Bezug auf die Projektionszeichnungen eingehen, wozu wir bis jetzt noch keine Gelegenheit fanden.

Im Allgemeinen haben alle krummen Flächen, wie vervielfältigt auch ihre Netze seyn mögen, doch immer nach einer gewissen Richtung eine endliche und umgränzte Ausdehnung. Der Umfang ihrer Projektionen wird daher im Allgemeinen ebenfalls ganz oder theilweise durch eine gewisse krumme Linie eingeschlossen, welche wir die Begränzungslinie der Projektion der Fläche nennen. Bey der Kugel ist dies eine Kreislinie, bey den Cylindern und Kegeln gewöhnlich das System zweyer Geraden u. s. w. Diese Begränzungslinie ist aber nichts anderes als die Basis einer Cylinderfläche, deren Kanten senkrecht auf die Projektionsebene sind, und welche die projektirte Fläche nach einer gewissen krummen Linie berührt, von welcher jene Basis des Cylinders selbst die Projektion ist.

Da wir nun (Art. 25.) die Stellung des Auges als in unendlicher Entfernung von der Projektionsebene angenommen haben, so, daß alle Sehestrahlen parallel unter sich sind und senkrecht auf die Projektionsebene, so ist zufolge dieser Annahme einleuchtend, daß die genannte Berührungslinie des umhüllenden Cylinders mit der projektirten Fläche, diese in zwey Theile theile, wovon der, gegen das Auge gewendete mit allen auf demselben verzeichneten Linien gesehen sey, der übrige Theil hingegen durch diesen bedeckt erscheine.

Denken wir uns nun auf der Fläche irgend eine krumme Linie verzeichnet, welche die Berührungslinie derselben mit dem umschriebenen Cylinder in einem Punkte schneidet; so sind die Tangenten zu den beyden Linien an jenem Punkt, in einer und derselben tangirenden Ebene enthalten. In dieser nemlichen Ebene muß aber auch die durch denselben Punkt gehende Kante des umschriebenen Cylinders enthalten seyn, weil diese eine Tangente zu der Fläche ist; die tangirende Ebene ist daher senkrecht auf die Projektionsebene und die Projektionen der in ihr enthaltenen zwey Tangenten fallen in eine einzige Gerade zusammen, welche selbst die unbestimmte Projektion der tangirenden Ebene ist. Die Projektionen der zwey auf der Fläche gezogenen Linien berühren sich daher in einem Punkte, welcher die Projektion ihres Durchschnittspunks auf der Fläche ist.

128. Aus allem oben Gesagten ziehen wir folgende Sätze als Resultate:

I. **Die Begränzungslinie, welche den Umfang der Projektion einer krummen Fläche bestimmt, berührt die Projektionen aller auf der Fläche verzeichneten Linien, wenn nemlich die Ausdehnung derselben so groß ist, daß sie auf die Fläche jene Linie durchschneiden, oder berühren, deren Projektion die genannte Begränzungslinie ist.**

II. **Wenn eine durch ihre Projektionen dargestellte krumme Fläche allein im Raume vorhanden ist, so daß keiner ihrer Theile durch eine andere Fläche bedeckt erscheint, so sind die Berührungspunkte der Begränzungslinie der Projektion der Fläche mit den Projektionen alle auf der Fläche verzeichneten Linien zugleich auch die Trennungspunkte der gesehenen und bedeckten Theile dieser letztgenannten Linien.**

129. Von diesen beyden Sätzen findet besonders der Erste eine stete Anwendung bey der Konstruktion der Durchschnitte krummer Flächen; und überhaupt bey jeder geometrischen Zeichnung, auf welcher krumme Flächen dargestellt werden; und obgleich Nichts mehr der Klarheit einer solchen Darstellung schadet als ein Verstoß gegen denselben, so werden doch dergleichen Fehler nur zu häufig von Zeichnern begangen, die unbekannt sind mit den Methoden der darstellenden Geometrie.

Wir werden bey Gelegenheit einiger Aufgaben des dritten Buches. (Art. 315 — 323) zwar auf eine Ausnahme von dieser allgemeinen Regel treffen, diese Ausnahme jedoch daselbst deutlich erklärt finden.

Das Umgekehrte des ersten Satzes läßt sich anwenden, um die Begränzungslinie der Projektion irgend einer krummen Fläche zu finden; denn wenn man die Projektionen einer hinlänglichen Zahl von Erzeugungslinien der Fläche konstruirt hat, und man zieht an diese sämmtlichen Projektionen eine berührende krumme Linie, so ist diese offenbar die verlangte Begränzungslinie. Dieses Verfahren erfodert übrigens, um genau zu seyn, daß man eine ziemlich große Anzahl von Projektionen der Erzeugungslinie bestimme, denn nur mit einer sehr geübten Hand läßt sich eine krumme Linie, die durch die alleinige Bedingung gegeben ist, eine gewisse Anzahl anderer in einer Ebene gegebener Kurven zu berühren, mit hinlänglicher Genauigkeit ziehen.

Was den zweyten Satz betrifft, so giebt derselbe eine sichere Regel, wie die gesehenen und bedeckten Theile einer durch ihre Projektionen dargestellten krummen Fläche zu unterscheiden seyen, durch welche Unterscheidung eine Projektionszeichnung erst den großen Vorzug erhält, ein Bild zu machen. Es ist jedoch leicht zu ersehen, daß diese Regel nur dann ihre Anwendung finden könne, wenn die vorgestellte Fläche durch Nichts anderes bedeckt erscheint, als durch ihre eigenen Theile, denn im andern Falle läßt sich durchaus keine allgemein gültige Regel geben. Die Lösung der Aufgabe hängt alsdann ganz davon ab, daß man sich eine deutliche Anschauung von der gegenseitigen Stellung der sich bedeckenden Flächen erwerbe. Wir verweisen hier auf das, was wir bereits über diesen Gegenstand (Art. 28 — 29.) gesagt haben.

Die einzelnen Fälle werden, nach Allem diesem, aus den beygefügten Zeichnungen selbst deutlich hervorgehen, und zur Norm bey andern ähnlichen dienen können.

Viertes Kapitel.

Von den tangirenden Ebenen zu den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

130. Wie wir im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, kann jede aufwickelbare Fläche als die Umhüllung des von einer beweglichen Ebene durchlaufenen Raumes betrachtet werden; sie berührt die verschiedenen Stellungen der erzeugenden Ebene nach geraden Charakteristiken, welches gewöhnlich die Erzeugungslinien der aufwickelbaren Fläche sind.

Die tangirende Ebene an einem gegebenen Punkte einer aufwickelbaren Fläche fällt mit der entsprechenden Stellung der umhüllten Erzeugungsebene zusammen; sie berührt daher die Fläche in der ganzen Länge der geraden Erzeugungslinie des Berührungspunktes, und *ihre Stellung ist bestimmt*; durch diese Gerade, und durch die Tangente zu irgend einer Kurve der Fläche an dem Punkte, wo sie dieselbe Erzeugungslinie durchschneidet.

* * *

131. Die windischen Flächen werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, weßhalb die tangirende Ebene an irgend einem Punkt einer solchen Fläche auch die gerade Erzeugungslinie enthalten muß, welche durch den Berührungspunkt geht. Diese Ebene berührt aber die windische Fläche nur in jenem einzigen Punkte, während bey allen aufwickelben Flächen, die ebenfalls durch die gerade Linie erzeugt sind, die Berührung längs der ganzen Ausdehnung einer geraden Linie statt findet. Aber diese letzte Eigenthümlichkeit gehört ausschließlich nur den aufwickelbaren Flächen; bey allen Andern beschränkt sich die Berührung mit ihren tangirenden Ebenen auf einen oder mehrere