daß diese Erzeugungslinie der Durchschnitt der zwey Netze der Fläche ist, und daß man durch eben diese Gerade zu jedem Netz der Fläche eine tangirende Ebene führen könne. Es folgt aus dem Gesagten, daß, so oft zwey Tangenten von demselben Punkt einer Fläche auslaufen, und zwey verschiedene krumme Linien berühren, die durch diese beyden Tangenten geführte Ebene an demselben Punkt tangirend zu der Fläche sey; vorausgesetzt jedoch, daß der genannte Berührungspunkt nicht zugleich ein vielfacher Punkt der Fläche sey, denn in diesem Falle kann man durch denselben so viele tangirende Ebenen zu der Fläche führen, als diese Netze hat.

Was die Konstruktion der Normalen betrifft, so beschränkt sich diese darauf, eine Senkrechte auf die tangirende Ebene zu errichten; wir werden uns deßhalb einige besondere Fälle ausgenommen, im Allgemeinen nicht näher damit beschäftigen.

## Konstruktion tangirender Ebenen zu krummen Flächen, wobey der Berührungspunkt gegeben ist.

77. Vorbemerkung. Wir glauben von nun an ohne Mißverständnisse folgende Abkürzungen im Texte eintreten lassen zu können. Einen Punkt im Raume werden wir durch die Buchstaben seiner Horizontal- und seiner Vertikalprojektion, zwischen eine Parenthese gesetzt bezeichnen. Unter Punkt (A, *a*) ist demnach der Punkt des Raumes zu verstehen, dessen Projektionen A und *a* sind. Auf gleiche Weise bezeichnet Linie (A B, *a b*) die Linie, deren Projektionen A B und *a b* sind.

Ebene (A B, *a b*) bezeichnet die Ebene, deren Risse auf beyden Projektionsebenen die Geraden A B, *a b* sind; und Ebene A B bezeichnet die Ebene, welche als Riß auf einer Projektionsebene die Gerade A B hat, und welche zugleich senkrecht auf dieselbe Ebene ist.

### Erste Aufgabe.

**Man soll durch einen Punkt einer Cylinderfläche, dessen eine Projektion gegeben ist, eine tangirende Ebene zu der Fläche führen?**

78. Auflösung. Es sey (A B, *a b*) (Taf. VII. Fig. 1.) die Gerade, zu welcher die Erzeuguugslinie der Cylinderfläche parallel seyn soll; P H Q G sey die, auf der horizontalen Projektionsebene gegebene Grundlinie der Fläche, welche man als ihren Horizontalriß betrachten kann.

Da alle geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche parallel zu der Geraden (A B, *a b*) seym müssen, ziehe man parallel zu A B die Geraden G J, H N tangirend an den Horizontalriß P H Q G, und nachdem man die projektirenden Geraden P $p$, Q $q$ ebenfalls berührend an dieselbe Linie gezogen, führe man durch die Punkte $p$ und $q$, wo diese Geraden die Projektionsaxe L M treffen zu $a\ b$ die Parallelen $p\ s$, $q\ r$, so sind G J, H N auf der Horizontalebene, und $p\ s$, $q\ r$ auf der Vertikalebene die Gränzen der Projektionen der Cylinderfläche, oder vielmehr die Gränzen, innerhalb welcher sich alle, der Fläche angehörigen Punkte projektiren.

Dieses festgesetzt, so sey C die gegebene Horizotalprojektion des Punkts, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll; und dessen Vertikalprojektion zuerst zu konstruiren bleibt.

79. Die Erzeugungslinie des Cylinders, welche durch den Berührungspunkt geht, muß als Horizontalprojektion die unbestimmte Gerade C F haben, welche durch den Punkt C parallel zu A B geführt ist. Um die Vertikalprojektion dieser nemlichen Erzeugungslinie zu erhalten, denken wir uns dieselbe verlängert, bis sie die horizontale Projektionsebene trifft; dieses kann aber nur in einem Punkte geschehen, welcher zu gleicher Zeit auf der Projektion C F und auf der Krummen P H Q G liegt. In unserm Beyspiel ist aber diese Krumme eine Kreislinie, welche die Eigenschaft hat, von einer Geraden in zwey Punkten geschnitten zu werden. Die verlängerte Gerade C F wird daher diese Linie in zwey Punkten D und E durchschneiden und es folgt hieraus, daß der Horizontalprojektion D C F zwey verschiedene Erzeugungslinien entsprechen; eine Erste, welche sich auf den Punkt D des Risses P H G Q anlehnt, und eine Zweyte, welche sich auf den Punkt E stützt. Wenn man daher die Punkte D und E auf die Vertikalebene nach $d$ und $e$ projektirt, und durch diese letzten Punkte die Geraden $d\ f$, $e\ f'$ parallel zu $a\ b$ zieht, so sind diese die Vertikalprojektionen jener zwey Erzeugungslinien. Da nun die Vertikalprojektion des Berührungspunkts einmal in der Geraden C $c$ liegen muß, welche aus C senkrecht auf die Projektionsaxe gezogen ist, und zweytens in der Geraden $d\ f$, oder $e\ f'$, so ist sie in $c$ oder $c'$, den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Vertikalen C $c$. Der Punkt (C, $c$) oder (C, $c'$) kann daher als Berührungspunkt betrachtet werden, und jedem entspricht eine tangirende Ebene, welche der Aufgabe Genüge leistet, diese hat sonach zwey Auflösungen.

80. Die Erzeugungslinie (D F, $d\ f$) ist eine der Geraden, welche die tangirende Ebene am Punkt (C, $c$) bestimmen; (Art. 75.) und eben so ist die Erzeugungslinie (E F, $e\ f'$) eine Linie der tangirenden Ebene an dem Punkt (C, $c'$).

Es bleibt also noch für jeden Berührungspunkt die zweyte Gerade zu finden, um die Stellung dieser Ebenen festzusetzen. Wollte man buchstäblich der allgemeinen Methode (Art. 70.) folgen, so müßte man, den Riß P H Q G als eine zweyte Erzeugungslinie betrachtend, sich denselben nacheinander durch jeden Berührungspunkt gehend vorstellen; und in jedem dieser Punkte eine Tangente zu demselben konstruiren. Allein bey den Cylinderflächen kann man eine weit einfachere Konstruktion anwenden, denn die tangirende Ebene an dem Punkt (C, *c*) berührt die Fläche nicht blos in diesem einzigen Punkt, sondern nach der ganzen Ausdehnung der durch ihn gehenden Erzeugungslinie (D F, *d f*).

In der That, wenn die Kurve P H D G sich so bewegt, daß, während sie sich immer mit dem gleichen Punkte (D, *d*) an die Gerade (D F, *d f*) lehnt, alle ihre übrigen Punkte Parallelen zu dieser Geraden beschreiben, und wenn sie bey dieser Bewegung irgend eine ihrer Tangenten, zum Beyspiel die am Punkt (D, *d*) mit sich führt, so wird die Kurve die vorliegende Cylinderfläche durchlaufen, ihre Tangente wird eine Ebene beschreiben, und offenbar wird diese Ebene die Fläche in allen Punkten der Geraden (D F, *d f*) berühren.

Die tangirende Ebene, welche die Gerade (D F, *d f*) enthält, berührt den Cylinder daher auch in dem Punkt D dieser Geraden, und sie muß folglich durch die Tangente zu dem Riß E P D G im Punkt D gehen. Nach der gleichen Folgerung findet man, daß die tangirende Ebene am Punkt (C, *c'*) durch die Tangente zu dem Riß, im Punkt E gehen muß. Wenn man daher durch die zwey Punkte D, E, zu jener Kurve die Tangenten D K, E L zieht, welche verlängert, die Projektionsaxe L M in den Punkten L und K schneiden, so hat man die Risse der zwey tangirenden Ebenen auf der Horizontalebene.

81. Für jede dieser Ebenen sind sonach zwey Gerade bekannt, durch welche sie geht, und es ist folglich leicht ihre Vertikalrisse zu konstruiren. Da die Berührungslinien (D F, *d f*) (E F, *e f'*) die Vertikalebene nicht mehr innerhalb des Rahmens der Zeichnung treffen; so führe man durch den Punkt (C, *c*) eine Parallele (C I, *c i*) zu dem Horizontalriß D K. Diese Parallele trifft die Vertikalebene in einem Punkt *i*, welchen man mit dem Punkt K verbinde, um den Vertikalriß K *i* der ersten tangirenden Ebene zu erhalten. Auf die gleiche Weise findet man die Gerade L *m* als den Riß der zweyten tangirenden Ebene auf der Vertikalebene.

Wenn die Durchschnittslinie der gegebenen Cylinderfläche mit der Vertikalebene noch auf der Zeichnung konstruirt wäre, so müßten die gefundenen Risse K *i*, G *h* diese Durchschnittslinie in den Punkten berühren, in welchen die Geraden (D F, *d f*), (E F, *e f'*) auf die Vertikalebene treffen.

82. Die vorstehende Aufgabe über die tangirende Ebene zu einer Cylinderfläche giebt uns Veranlassung zu einer Bemerkung über die Tangenten zu den krummen Linien, welche für die darstellende Geometrie äußerst wichtig ist, nemlich:

Die Projektion der Tangente zu irgend einer krummen Linie im Raume ist selbst Tangente zu der Projektion der Linie, und ihr Berührungspunkt ist die Projektion des Berührungspunktes der krummen Linie. Denn in der That, wenn man aus allen Punkten der krummen Linie im Raume sich Senkrechte auf eine der Projektionsebenen, zum Beyspiel auf die Horizontalebene gefällt denkt, so sind alle diese Senkrechten auf einer vertikalen Cylinderfläche gelegen, welche wir (Art. 13.) die projektirende Fläche der Krummen genannt haben, und welche von der Horizontalebene nach der Projektion der krummen Linie selbst geschnitten wird. Wenn man sich eben so durch alle Punkte der Tangente zu der krummen Linie im Raume, Vertikallinien denkt, so sind diese in einer Vertikalebene, der projektirenden Ebene der Tangente enthalten, welche von der Horizontalebene nach der Projektion der Tangente selbst geschnitten wird. Nun aber berühren sich die Cylinderfläche und die Vertikalebene, offenbar nach der ganzen Ausdehnung der aus dem Berührungspunkt gefällten Vertikalen, welche sie gemein haben. Die Durchschnitte der Cylinderfläche und der Vertikalebene durch die horizontale Projektionsebene berühren sich daher in einem Punkte, welcher der Durchschnitt der geraden Berührungslinie der Cylinderfläche und der Vertikalebene ist. Daher endlich berühren sich die Projektionen irgend einer krummen Linie und einer ihrer Tangenten in einem Punkte, welcher die Projektion ihres Berührungspunkts im Raume ist.

## Zweyte Aufgabe.

**Es ist eine Kegelfläche gegeben mittelst ihrer Basis und ihres Mittelpunktes; man soll durch einen gleichfalls gegebenen Punkt dieser Fläche eine tangirende Ebene zu derselben führen?**

83. Auflösung. Es sey A H C B (Taf. VII. Fig. 2.) die gegebene Durchschnittslinie der Kegelfläche durch die horizontale Projektionsebene; (E, *e*) sey der Mittelpunkt der Fläche.

Alle geraden Erzeugungslinien einer Kegelfläche gehen durch den Mittelpunkt derselben; man ziehe daher durch den Punkt E die Tangenten E H, E F an die Krumme A H B C; und man hat die Gränzen der Horizontalprojektion der Kegelfläche. Man ziehe die projektirenden Geraden A *a*, G *g* tangirend an den Horizontalriß A H C B; die Punkte *a*, *g*, wo sie die Projektionsaxe treffen, verbinde man mit der Vertikalprojektion *e* des Mittelpunkts, so hat man, wie leicht zu ersehen, die Gränzen der Vertikalprojektion der Kegelfläche. Es sey endlich D die gegebene Horizontalprojektion des Punktes, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll.

84. Die Horizontalprojektion der geraden Erzeugungslinie, welche den Berührungspunkt enthält, muß offenbar die, durch D und E gezogene unbestimmte Gerade D E seyn. Diese verlängerte Gerade schneidet den Horizontalriß der Kegelfläche, welche in unserm Beyspiele eine Ellipse A H C B ist, in zwey Punkten B und C, und es ist einleuchtend, daß die beyden geraden Erzeugungslinien der Kegelfläche, welche durch diese Punkte der Grundlinie gehen, die gleiche Horizontalprojektion B E K haben, und daß man die Vertikalprojektionen dieser nemlichen Geraden erhalte, wenn man die Punkte B und C auf die Vertikalebene nach *b* und *c* projektirt, und durch diese letzten Punkte die Geraden *b e*, *c e* führt. Da nun diese beyden Geraden *b e* und *c e* die Vertikalprojektion des Berührungspunktes enthalten können, so ist diese in *d* oder *d'*, in welchen beyden Punkten die aus D errichtete Vertikale die Geraden *b e k*, *c e k'* durchschneidet.

Es folgt hieraus, daß entweder (D, *d*) oder (D, *d'*) der Punkt der Kegelfläche ist, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll, und daß die gerade Erzeugungslinie (B E K, *c e k'*) der tangirenden Ebene an dem ersten, und die Erzeugungslinie (C E K, *b e k'*) der tangirenden Ebene am zweyten Punkte angehöre (Art. 75.)

85. Nun läßt sich aber leicht nach der nemlichen Beweisart, welche wir in Bezug auf die tangirende Ebene zu den Cylinderflächen angewendet haben, (Art. 80.) darthun, daß die Kegelfläche von einer Ebene nicht nur in einem einzigen Punkte berührt werde, sondern nach der ganzen Ausdehnung der durch jenen Punkt gehenden geraden Erzeugungslinie.

Da nun die gerade Erzeugungslinie (B E K, *b e k*) der einen tangirenden Ebene, und die Erzeugungslinie (C E K, *c e k'*) der Anderen die Grundlinie der Kegelfläche in den Punkten B und C treffen, so folgt daraus, daß die beyden tangirenden Ebenen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen, durch die Tangenten B T, C N gehen, welche durch B und C zu der Ellipse A H C B gezogen sind. Diese Tangenten sind zugleich die Risse der beyden tangirenden Ebenen auf der horizontalen Projektionsebene; die Risse T *j*, N *i* derselben Ebenen auf der vertikalen Projektionsebene bestimme man nach demselben Verfahren, was wir bey der Cylinderfläche (Art. 81.) angewendet haben.

86. In Betreff der Ausführung der Tafel VII müssen wir hier noch Einiges anführen.

Fig 1. Wir haben die gegebene Cylinderfläche als wirklich im Raume vorhanden angenommen, und alle Linien dieser Fläche, je nachdem sie auf einer oder der andern Projektion dem gesehenen, oder dem vom Auge abgewendeten Theile der Fläche angehörten, mit vollen oder punktirten Linien bezeichnet.

Auf der Horizontalebene entsprechen die begränzenden Geraden G J, H N als Projektionen zweyen Kanten der gegebenen Cylinderfläche und es läßt sich leicht zeigen, daß diese nemlichen Kanten in der Horizontalprojektion den gesehenen Theil der Fläche von dem, vom Auge abgewendeten trennen; denn man betrachte die genannten Geraden G J, H N als die Risse zweyer Vertikalebenen, die den Cylinder nach zwey Kanten berühren, deren Projektionen eben jene Geraden G J, H N sind. Diese berührenden Ebenen, da sie parallel unter sich sind, und senkrecht auf die Projektionsebene, werden sich im Auge, das wir in unendlicher Entfernung über derselben Ebene annehmen, schneiden, und dieses kann daher offenbar nur den oberhalb der beyden in G J, H N projektirten Berührungskanten gelegenen Theil der Cylinderfläche überschauen. Da nun die Geraden G J, H N die Grundlinie P H D G in G und H berühren, so kann demzufolge nur der Bogen G E H dieser Grundlinie gesehen werden, der Bogen H D G hingegen wird bedeckt seyn; und alle Kanten der Fläche, welche auf die Punkte des erstgenannten Bogens treffen, werden sonach gesehen, die Uebrigen aber bedeckt seyn. Von der Reihe der letzteren ist die Kante (Q R, *q r*).

Für die Vertikalprojektion ergiebt sich nach den ganz gleichen Folgerungen, daß die Kanten, deren Projektionen die begränzenden Geraden *p* s, *q r* sind, den gesehenen von dem bedeckt scheinenden Theil der Fläche trennen. Wenn man daher den zur Projektionsaxe parallelen Durchmesser P Q der kreisförmigen Grundlinie *P D G* zieht, so sind P und Q die Punkte, wo die in *p s* und *q r* projektirten Kanten auf die Grundlinie treffen, daher werden in der Vertikalprojektion alle Kanten, welche dem Bogen P G Q jener Grundlinie angehören, gesehen seyn; diejenigen hingegen, welche wie (H N, *h n*) sich auf die Punkte des Bogens P H Q stützen, bedeckt erscheinen.

87. Fig. 2. Alles über die Projektionen der Cylinderfläche Gesagte, findet eine gleichmäßige Anwendung auf die Projektionen der Kegelfläche Fig. 2. Nur ist hier noch zu bemerken, daß in jeder Projektion alle Kanten der Kegelfläche, welche auf dem einen Netze gesehen sind, auf dem andern Netze nothwendig dem bedeckten Theile angehören, und eben so umgekehrt.

Wenn, wie in dem vorliegenden Beyspiele, die Grundlinie der Kegelfläche eine Ellipse ist, so bestimmt man auf der Horizontalebene die Durchschnittspunkte A, G dieser Ebene und derjenigen Kanten, deren Vertikalprojektionen die begränzenden Geraden *e a*, *e g* sind, wenn man den zusammengehörigen Durchmesser A G zu demjenigen konstruirt, welcher senkrecht auf die Projektionsaxe ist. Die Endpunkte jenes Durchmessers sind die gesuchten Punkte A, G. A E ist demnach die Horizontalprojektion derselben Geraden, welche vertikal in *a e* projektirt ist. Die übrigen Linien beyder Figuren der Tafel bedürfen keiner weiteren Erklärung.

## Dritte Aufgabe.

**Man soll durch einen gegebenen Punkt einer Umdrehungsfläche eine tangirende Ebene zu der Fläche führen?**

88. Auflösung. Die Fläche sey gegeben durch ihre Axe, und ihren Erzeugungsmeridian, nnd wir nehmen die horizontale Projektionsebene senkrecht auf die Axe der Fläche an, wodurch die Allgemeinheit der Auflösung in nichts geändert wird.

Es sey demnach (A, $a\,a'$) (Taf. VIII.) die Umdrehungsaxe; L M der Durchschnitt der Projektionsebenen. In einer zur vertikalen Projektionsebene parallelen Meridianebene L′ M′ sey der Erzeugungsmeridian (D D′, $b\,d\,f\,e\,d'$) gegeben. Nachdem man die projektirenden Geraden $d$ D, $d'$ D′ tangirend an die Linie $b\,d\,f\,e\,d'$ gezogen; beschreibe man aus A als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser A D $= \frac{1}{2}\,d\,d'$ einen Umkreis D B D′, so hat man die Horizontalprojektion des größten Parallelkreises der Fläche. Der Berührungspunkt sey durch seine Horizontalprojektion G gegeben.

89. Dieser festgesetzt denken wir uns durch den Berührungspunkt eine Meridianebene geführt, deren Horizontalprojektion die unbestimmte Gerade A G ist. Diese Ebene wird die Fläche nach einem Meridiane schneiden, und wenn man aus dem Punkt G eine Vertikale errichtet, so wird diese den Meridian, und folglich die Umdrehungsfläche in einem, oder in mehreren Punkten treffen, welches eben so viele Berührungspunkte sind, von denen G die gemeinsame Horizontalprojektion ist. Um diese Punkte zu finden, denken wir uns die Meridianebene A G mittelst einer Drehung um die Axe (A, $a\,a'$) auf die Ebene L′ M′ zurückgelegt. Es werde sodann A G nach A G′ getragen, und die Vertikale G′ $e\,e'$ errichtet, welche den Meridian $d\,f\,e\,d'$ in den Punkten $e$, $e'$ schneidet, so geben diese Punkte die Höhen der Berührungspunkte über der Horizontalebene an. Wenn man daher durch $e$ und $e'$ unbestimmte Horizontallinien $e\,g$, $e'\,g'$ zieht, so müssen in diesen Horizontalen die Vertikalprojektionen jener nemlichen Berührungspunkte enthalten seyn; diese Vertikalprojektionen sind folglich die Begegnungspunkte $g$, $g'$ der Horizontalen $e\,g$, $e'\,g'$ mit der, aus G senkrecht auf die Projektionsaxe errichteten Geraden G $g\,g'$.

Der bekannte Berührungspunkt ist sonach (G, $g$), oder (G, $g'$) und es sind sofort die Risse der tangirenden Ebenen an diesen Punkten zu bestimmen.

Denken wir uns zu diesem Ende, durch jeden Berührungspunkt den Parallelkreis der Umdrehungsfläche, welcher diesem Punkte entspricht, und den man als eine Erzeugungslinie der Fläche betrachten kann, so werden die zu bestimmenden tangirenden Ebenen durch die Tangenten zu diesen Kreisen an den bekannten Berührungspunkten gehen. Aber diese beyden Tangenten sind senkrecht auf die Meridanebene A G, der die Berührungspunkte angehören, daher müssen die tangirenden Ebenen ebenfalls senkrecht auf die nemliche Meridianebene seyn, und folglich ihre Risse auf der Horizontalebene senkrecht auf A G.

Um nun die Stellung der gesuchten tangirenden Ebenen vollends zu bestimmen, muß für jede noch eine zweyte in ihr enthaltene Tangente zu der Umdrehungsfläche konstruirt werden.

Hiezu ziehe man durch die, auf die Ebene L′ M′ zurückgelegten Berührungspunkte (G′, $e$), (G′, $e'$) zu dem Meridian (L′ M′, $b\ d\ f\ e$) die Tangenten (D D′, $e\ \alpha$), (D D′, $e'\ a'$), welche verlängert die Drehungsaxe in den Punkten (A, $\alpha$), (A, $a'$) treffen. Es ist leicht einzusehen, daß die Tangenten zu dem Meridian der Ebene A G H an den Punkten (G, $g$), (G, $g'$) ebenfalls durch dieselben Punkte (A, $\alpha$), (A, $a'$) gehen werden; denn wenn der Meridian (D D′, $d\ f\ e$) sich um die Axe (A, $a\ a'$) dreht um die Umdrehungsfläche zu erzeugen, und wenn er dabey die Tangenten an den Punkten (G′, $e$), (G′; $e'$) mit sich führt, so werden diese während der Bewegung nicht aufhören, durch die nemlichen Punkte (A, $\alpha$), (A, $a'$) der Axe zu gehen, und ihre Berührungspunkte, welche auf dem Meridian unveränderlich sind, werden die Parallelkreise der Fläche durchlaufen, denen die Punkte (G, $g$), (G, $g'$) angehören. Die Tangenten an diesen letzten Punkten des Meridians der Ebene A G haben daher zu Projektionen die Geraden (A G H, $\alpha\ i\ g$), (A G H, $a'\ g'\ h$). Sie treffen die horizontale Projektionsebene in den Punkten I und H, die den Horizontalrissen der gesuchten tangirenden Ebenen angehören, und dieses sind daher die auf A G senkrechten Geraden I Q, H P.

Nachdem man diese Risse bis an die Projektionsaxe verlängert, führe man, zur Bestimmung der Vertikalrisse derselben tangirenden Ebenen, durch jeden Berührungspunkt eine Parallele (G K, $g\ k$), (G K, $g'\ k'$), zu dem entsprechenden Risse, I Q, H P. Diese Parallelen, welche nichts anderes sind, als die Tangenten zu den Parallelkreisen der beyden Berührungspunkte, treffen die Vertikalebene in den Punkten $k$ und $k'$, welche die Vertikalrisse Q $k$ der ersten, und P $k'$ der zweyten tangirenden Ebene bestimmen.

90. Wir haben als Beyspiel eine Fläche gewählt, welche durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre große Axe hervorgebracht ist, und der man die Benennung Umdrehungs-Ellipsoid, oder auch Sphäroid giebt. Die beyden Berührungspunkte des Ellipsoids sind nach der Annahme der Projektionsebenen in gleichem Abstande von der Ebene des Parallelkreises (D B D′, $d\ d'$). Die Horizontalrisse I Q, H P der tangirenden Ebenen an diesen Punkten sind parallel unter sich, und die Vertikalrisse derselben schneiden sich in einem Punkt $m$, welcher in der Verlängerung der Geraden $d\ d'$, der kleinen Axe der Erzeugungsellipse liegt, und zwar in Folge dessen, weil sich die Tan-

genten an den Punkten $e, e'$ dieser Ellipse, in einem Punkte $m'$ der nemlichen Axe begegnen, was eine bekannte Eigenschaft der Ellipse ist.

* *
*

91. Die Auflösung der vorstehenden Aufgabe leitet uns auf folgende allgemeine Eigenschaften der Umdrehungsflächen in Bezug auf ihre Tangenten und ihre Normalen.

1tens Alle Tangenten zu den verschiedenen Meridianen einer Umdrehungsfläche, deren Berührungspunkte auf einem nemlichen Parallelkreise liegen, gehen durch einen und denselben Punkt der Axe der Fläche, sie bilden zusammen einen geraden Kegel, welcher um die Umdrehungsfläche umschrieben ist, und sie nach Parallelkreise berührt.

2tens Alle Normalen zu einer Umdrehungsfläche, welche durch die Punkte eines nemlichen Meridians gehen, sind auch Normale zu eben diesem Meridian, denn einmal ist jede von ihnen senkrecht auf die entsprechende Tangente zu dem Meridiane, und zweytens sind sie alle in der Ebene desselben enthalten, weil alle tangirenden Ebenen zu einer Umdrehungsfläche längs den Punkten eines ihrer Meridiane senkrecht auf die Ebene desselben sind. Umgekehrt ist daher eine Normale zu einem Meridian auch zugleich Normale zu der Fläche; es folgt hieraus

3tens, daß alle Normalen einer Umdrehungsfläche durch die Axe gehen, und daß

4tens alle Normalen längs den Punkten eines Parallelkreises durch einen nemlichen Punkt der Axe gehen, und daß sie eine gerade Kegelfläche bilden, welche selbst normal auf die Umdrehungsfläche ist.

Es ergiebt sich aus diesen Eigenschaften die direkte Auflösung der folgenden Aufgabe.

## Vierte Aufgabe.

**Man soll durch einen gegebenen Punkt einer Umdrehungsfläche eine Normale zu der Fläche führen?**

92. Auflösung. Es sey (A, $a\,a'$) Taf. VIII. die Axe der Fläche $b\,d\,f\,e$ der Erzeugungsmeridian in einer Ebene L′M′. parallel zur Vertikalebene betrachtet; und (S, s) sey der gegebene Punkt, durch welchen die Normale geführt werden soll. *)

Diese Normale muß einmal in der, durch den Punkt (S, s) gehenden Meridianebene A S enthalten seyn, und sie ist bestimmt, sobald man den Punkt kennt, in wel-

*) Wir nehmen an, die beyden Projektionen S, s des Punkts der Umdrehungsfläche seyen nach dem oben (Art. 89) angegebenen Verfahren konstruirt.

chem sie die Axe durchschneidet. Zu diesem Zweck betrachte man die Meridianebene A S als auf die Ebene L′ M′ zurückgelegt, indem sie eine Drehung um die Axe (A, *a a′*) gemacht hat. Der gegebene Punkt wird, nach dieser Bewegung die Stellung (S′, *s′*) annehmen, und wenn man durch (S′, *s′*) die Normale (S′ A, *s′ v*) zu dem Meridian *b d f e* errichtet, so ist diese zugleich Normale zu der Fläche und (A, *v*) ist der Punkt, in welchem sie die Axe durchschneidet. Nun aber liegen die Punkte (S′, s′) und (S, s) auf einem und demsemben Parallelkreis der Umdrehungsfläche; die Normalen der Fläche an diesen Punkten, müssen sich daher in einem Punkt der Axe kreuzen, und folglich ist die Gerade (A S, *v* s) die verlangte Normale der Umdrehungsfläche am Punkte (S, s).

Diese Konstruktion kann auch zur Lösung der vorhergehenden dritten Aufgabe dienen: denn wenn man durch die gegebenen Punkte (G, *g*), (G, *g′*) (Taf. VIII.) die Normalen zu der Fläche führt, und durch jeden Punkt eine Ebene senkrecht auf die zugehörige Normale; so sind diese die verlangten tangirenden Ebenen.

---

93. Wir beschränken uns für den Augenblick auf diese vier Beyspiele über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen. Im folgenden Kapitel werden wir die Erzeugung anderer zahlreicher Familien von Flächen vortragen, und auf diese sodann dieselben Methoden zur Bestimmung ihrer tangirenden Ebenen und ihrer Normalen anwenden. Schließlich wollen wir noch eine zweyte Auflösung der vierzehnten Aufgabe im ersten Kapitel geben, welche auf die Betrachtung der tangirenden Ebenen gegründet ist.

## Fünfte Aufgabe.

**Man soll die kürzeste Entfernung zweyer gegebenen Geraden konstruiren?**

95. Auflösung. (Fig. 2. Taf. V.) Wir haben die gleichnamigen Gegenstände mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie in der Figur 1., welche sich auf die erste Auflösung dieser Aufgabe (Art. 50.) bezieht.

Nachdem man den Horizontalriß A E F einer Ebene konstruirt hat, welche durch die erste gegebene Gerade (A B, *a b*) parallel zu der Zweyten (C D, *c d*) geführt ist; betrachte man dieselbe als tangirende Ebene zu einem geraden Cylinder von kreisförmiger Grundlinie, welcher als Axe die Gerade (C D, *c d*) hat, und als Halbmesser, die gesuchte Entfernung. Diese Cylinderfläche wird von jener Ebene nach einer Geraden berührt werden, welche parallel zu der Axe ist, und welche die erste Gerade (A B, *a b*) in einem Punkte schneidet. Wenn man durch diesen Punkt eine Senkrechte auf obige Ebene errichtet, so schneidet diese sowohl die erste als auch die zweyte Gerade senkrecht, denn sie ist der Halbmesser eines Cylinders, von welchem diese zweyte Gerade die Axe ist, und auf ihr wird folglich die gesuchte kürzeste Entfernung gemessen.

Um die Berührungslinie der Cylinderfläche mit der Ebene, welche parallel zu den zwey gegebenen Geraden ist, zu finden, führe man durch irgend einen Punkt, der als Axe angenommenen Geraden, (zum Beyspiel durch den Punkt C, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet) eine Ebene senkrecht auf diese Axe. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der tangirenden Ebene ist die Berührungslinie dieser Letzten mit der kreisförmigen Grundlinie des Cylinders.

Nachdem die Vertikalebene C D sich um ihren Riß C D gedreht, und auf die Horizontalebene zurückgelegt hat, konstruire man den Winkel $\beta$ C $\beta'$ den die zweyte Gerade (C D, $c\,d$) mit der Horizontalebene macht, indem man eine Vertikale $\beta'\,\beta = b'\,b$ nimmt. Dieselbe Vertikalebene schneidet die, zu den zwey Geraden parallele Ebene nach der Geraden F K, parallel zu C $\beta'$. Daher schneidet die, durch C, und senkrecht auf die Axe geführte Ebene die Vertikalebene C D nach der Geraden C K, senkrecht auf C $\beta'$ oder F K, und die Horizontalebene nach der auf C D senkrechten Geraden C H.

Nachdem dieselbe Ebene sich um ihren Horizontalriß C H gedreht hat, um sich auf die horizontale Projektionsebene zurückzulegen; fällt der Punkt K nach K′; der Punkt H des Risses bleibt fest, und die Gerade H K′ ist der Durchschnitt der tangirenden Ebene zu der Cylinderfläche mit der Ebene, welche senkrecht auf die Axe dieser Fläche ist. Wenn man daher aus dem Punkt C die Senkrechte C I auf jene Gerade H K′ fällt, so ist der aus C als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser = C I beschriebene Kreis die Grundlinie der Cylinderfläche, und I N ist die Horizontalprojektion der Berührungskante. Diese Kante schneidet die erste Gerade in dem Punkt (N, $n$), durch welchen die gesuchte Senkrecht geht.

Der letzte Theil der Auflösung vollendet sich wie die in Art. 43. Vorgetragene, auf welche wir zurückweisen.

---

## Drittes Kapitel.

### Fortsetzung der Erzeugung der Flächen.

#### Von den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

95. Alle Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können, bilden zwey große Klassen; sie sind entweder aufwickelbare oder windische Flächen.