

geben, so bleibt es der Geschicklichkeit und dem Scharfsinn des Arbeitenden überlassen, in jedem einzelnen Falle diejenige zu wählen, welche die einfachste Kurve gebraucht, und die am wenigsten mühsamen Betrachtungen erheischt. 2tens hat eine vielfache Erfahrung gezeigt, daß, anstatt bey jeder krummen Fläche nur eine einzige Erzeugungsart zu betrachten, was das Studium des Gesetzes der Bewegung und der Gestaltveränderung der Erzeugungslinie erforderte; es oft weit einfacher sey, zu gleicher Zeit zwey verschiedene Erzeugungsarten zu betrachten, und für jeden beliebigen Punkt die Konstruktion zweyer Erzeugungslinien anzugeben.

66. Um an einem Beyspiel zu zeigen, mit welcher Einfachheit und Fruchtbarkeit die vorgetragene Betrachtungsweise der krummen Flächen sich zu allen graphischen Operationen mit denselben anwenden lasse; nehmen wir an, es sey eine krumme Fläche gegeben, und es solle der Durchschnitt dieser Fläche mit einer gleichfalls gegebenen Ebene konstruirt werden. Wenn die Erzeugungslinie der vorgelegten Fläche in irgend einer ihrer Stellungen die gegebene Ebene durchschneidet, was in einem oder in mehreren Punkten geschehen kann, so gehören diese Punkte, da sie zu gleicher Zeit auf der Fläche sowohl, als auf der durchschneidenden Ebene liegen, offenbar dem Durchschnitte dieser beyden an. Hat man daher eine hinreichende Anzahl von Stellungen der Erzeugungslinie konstruirt, und die Begegnungspunkte einer jeden mit der durchschneidenden Ebene bestimmt, und man verbindet die Vertikalprojektionen dieser Begegnungspunkte durch eine erste krumme Linie, sodann die Horizontalprojektionen derselben Punkte durch eine zweyte Krumme, so hat man die beyden Projektionen der gesuchten Durchschnittslinie, und zwar um so genauer, je mehr Begegnungspunkte der durchschneidenden Ebene mit den verschiedenen Erzeugungslinien man bestimmt haben wird.

Die Konstruktionen der ebenen Schnitte der krummen Flächen und der Durchschnitte dieser Flächen unter sich, sind der Gegenstand des 3ten Buches. In dem weiteren Kapiteln des gegenwärtigen Buches werden wir uns mit der Konstruktion der tangirenden Ebenen und der Normalen zu den krummen Flächen beschäftigen.

## Z w e y t e s   K a p i t e l.

Von den Tangenten, den tangirenden Ebenen und den Normalen zu den krummen Linien und Flächen.

67. Nach der gemeinhin in der Geometrie angenommenene Erklärung ist eine krumme Linie diejenige, deren Richtung sich stetig verändert. Denken wir uns an irgend

einem Punkt einer krummen Linie eine Gerade dergestalt gezogen, daß sie mit dem unendlich kleinen Element der Krümmen, welches die Richtung derselben an dem genommenen Punkt bestimmt, zusammenfällt, so ist diese Gerade eine Tangente oder Berührungslinie zu der Krümmen. Der Punkt, durch welchen die Tangente geführt wurde, heißt der Berührungspunkt.

Man erklärt auch eine Tangente als eine Gerade, welche dergestalt an eine krumme Linie gezogen ist, daß man zwischen ihr und der Krümmen keine andere Gerade mehr ziehen kann. Diese Erklärung schließt aber offenbar die oben gegebene ein; denn nur deswegen, weil die Tangente mit der Krümmen am Berührungspunkt ein Element gemein hat, läßt sich durch denselben Punkt keine andere Gerade mehr zwischen jenen beyden Linien ziehen.

68. Wenden wir unsere Definition, um ein Beyspiel zu geben, auf einen bekannten Fall an. Die Kreislinie wird erzeugt durch den Endpunkt einer Geraden, die sich in einer Ebene, um einen auf ihr genommenen unveränderlichen Punkt dreht. Da die Neigung der beweglichen Geraden und der erzeugten Linie offenbar in allen Punkten der letzten unveränderlich bleibt, und diese Neigung überdies die gleiche ist, ob die Gerade sich nach der einen oder der andern Seite bewege, so folgt daraus, daß die Richtung der Kreislinie in jedem Punkte senkrecht auf den, diesem Punkte entsprechenden Halbmesser sey, und daß daher die Tangente an einem Punkt einer Kreislinie ebenfalls senkrecht auf den Halbmesser dieses Punkts seyn müsse; wie in den Elementen der Geometrie bewiesen wird.

69. Man nennt Normale die Gerade, welche durch einen Punkt einer ebenen krummen Linie senkrecht auf die Tangente an demselben Punkt gezogen ist. Die krummen Linien von doppelter Krümmung können keine bestimmten Normalen haben; die Ebenen, welche durch einen ihrer Punkte senkrecht auf die Tangente an demselben geführt sind, heißen Normalebene der krummen Linien von doppelter Krümmung.

#### T a n g i r e n d e E b e n e n .

70. Denken wir uns an irgend einem Punkt einer krummen Fläche zwey verschiedene Erzeugungslinien in der Stellung, die sie haben müssen, wenn sie durch diesen Punkt gehen: wenn man an demselben Punkt zu jeder von diesen Erzeugungslinien die Tangente konstruirt, und durch diese zwey Tangenten eine Ebene führt, so ist diese eine tangirende Ebene zu der Fläche. Der Punkt der Fläche, in welchem die zwey Erzeugungslinien sich schneiden, und welcher zugleich auch den beyden Tangenten und der tangirenden Ebene gemeinschaftlich ist, heißt der Berührungspunkt der Fläche und der

Ebene. Diese Erklärung schließt die Bedingung ein, daß die tangirende Ebene am Berührungspunkt die Tangenten zu allen Linien enthalte, welche durch jenen Punkt auf der Fläche gezogen werden können.

71. Wie bey den Linien, so heißt auch bey den Flächen die Gerade, welche durch den Berührungspunkt senkrecht auf die tangirende Ebene geführt ist, Normale zu der Fläche. Sie ist senkrecht auf das Element der Fläche, weil die Richtung dieses Elements nach allen Seiten mit jener der tangirenden Ebene zusammenfällt, welche als die Verlängerung desselben betrachtet werden kann.

72. Die Betrachtung der tangirenden Ebenen und der Normalen zu den krummen Flächen ist für einen großen Theil der Künste sehr nützlich, und mehreren von ihnen ist sie durchaus unerläßlich. Wir wollen von jedem dieser Fälle nur ein einziges Beyspiel anführen, und diese aus der Baukunst und der Mahleren entlehnen.

Die verschiedenen Theile, aus denen die, von behauenen Steinen erbauten Gewölbe zusammengesetzt sind, heißen Gewölbsteine, und man nennt Fugen, diejenigen Seitenflächen, mit welchen zwey aneinanderstoßende Gewölbsteine sich berühren; sey es nun, daß diese Gewölbsteine einer nemlichen Schichte angehören, oder daß sie in zwey aufeinanderfolgenden Schichten enthalten sind.

Die Stellung der Fugen bey den Gewölben unterliegt mehreren nothwendig zu erfüllenden Bedingungen; wir wollen hier nur diejenigen herausheben, die sich auf unsern Gegenstand beziehen. Eine dieser Bedingungen ist, daß die Fugen senkrecht unter sich seyen, und daß sie sämtlich senkrecht auf die Oberfläche des Gewölbes stoßen. Wenn man sich merklich von diesem Gesetze entfernte, so würde man nicht nur die allgemeine Konvenienz verletzen, ohne welche Nichts wohlgefällig erscheint, sondern man würde auch Gefahr laufen, das Gewölbe weniger fest und weniger dauerhaft zu machen; denn wenn eine dieser Fugen schief auf die Oberfläche des Gewölbes wäre, so hätte der Eine von den zwey, an diese Fuge anstoßenden Gewölbsteinen einen stumpfen, und der Andere einen spitzen Winkel, und bey der Reaktion, welche die beyden Gewölbsteine gegen einander ausüben, wären diese zwey Winkel nicht des gleichen Widerstandes fähig; der spitze Winkel würde wegen der Zerbrechlichkeit der Materialien dem Zerspringen ausgesetzt seyn, wodurch die Gestalt des Gewölbes geändert, und die Dauer des Gebäudes gefährdet wäre. Die Zerlegung eines Gewölbes in Gewölbsteine erheischt sonach unumgänglich die Betrachtung der tangirenden Ebenen und der Normalen zu der krummen Oberfläche des Gewölbes.

73. Gehen wir nun zu einem andern Beispiele über, das aus einer Gattung genommen ist, die auf den ersten Anblick keiner so großen Strenge fähig scheint.

Man ist gewohnt, die Mahleren als aus zwey verschiedenartigen Theilen zusammengesetzt zu betrachten. Der Eine ist die Kunst im eigentlichen Sinne, und hat zum Zweck, in dem Beschauer eine bestimmte Rührung zu erregen, ihm ein Gefühl mitzutheilen, oder ihn in die Stimmung zu versetzen, die ihn für gewisse Eindrücke am meisten empfänglich macht. Diese eigentliche Kunst setzt in dem Künstler einen philosophisch geübten Geist voraus, sie erfordert von seiner Seite die genauesten Kenntnisse von der Natur der Dinge, von der Art ihrer Wirkung auf uns, und selbst von den unwillkürlichen Zeichen, in welchen diese Wirkung sich kund thut. Sie kann nur das Ergebnis einer sehr ausgezeichneten Erziehung seyn, wie sie nicht leicht jemand erhält, und wie wir sie unsern angehenden Künstlern überall nicht geben. Sie hängt nicht von allgemeinen Regeln ab, und verträgt bloß guten Rath.

Der andere Theil der Mahleren ist, so zu sagen ihr Handwerk, die Aufgabe desselben ist die genaue Ausführung des Erfundenen. Hier ist nichts willkürlich, alles kann durch strenges Raisonnement vorher berechnet werden, weil hier alles das nothwendige Resultat angenommener Gegenstände und gegebener Verhältnisse ist. Wenn ein Gegenstand nach Gestalt und Stellung bekannt ist, wenn man die Natur, die Anzahl und die Stellung aller Körper kennt, die ihn beleuchten können, sey es durch gerades Licht, oder durch Reflexionsstrahlen, wenn die Stellung des Auges des Beschauers fest ist, wenn endlich alle Umstände, welche auf das Sehen Einfluß haben können, recht geordnet und bekannt sind, so ist der Ton eines jeden Punkts der sichtbaren Oberfläche des Körpers absolut bestimmt. Alles was Bezug hat, auf die Farbe dieses Tons und auf ihren Glanz, hängt ab, von der Stellung der tangirenden Ebene an diesem Punkt, in Rücksicht auf die beleuchtenden Körper und das Auge des Beschauers, es kann durch bloßes Raisonnement gefunden werden; und ist es gefunden, so muß man sich genau daran halten. Jede Schwächung, jede Uebertreibung würde Form und Farbe der Erscheinung alteriren und eine andere Wirkung hervorbringen, als der Künstler erwartete.

Ich weiß wohl, daß die oft nöthige Schnelligkeit der Ausführung nur selten die Anwendung einer Methode zulassen würde, welche den Künstler aller materiellen Hülfsmittel beraubte, und ihn bloß dem Gebrauche seiner eigenen Fähigkeiten überließe, und daß es viel leichter für den Mahler sey, die Gegenstände vor Augen zu haben, ihre Tinten zu beobachten und sie nachzubilden; aber wäre er gewöhnt, die Stellung der tangirenden Ebenen und die zwey Krümmungen der Flächen in jedem ihrer Punkte \*) zu betrachten, so würde er aus jenem materiellen Hülfsmittel weit größeren Vortheil ziehen;

---

\*) Diese Krümmungen bilden den Gegenstand des fünften Buches.

er würde im Stande seyn, die Wirkungen wieder herzustellen, welche die Weglassung einiger Umstände zu entstehen verhinderte, und jene zu beseitigen, zu denen fremdartige Verhältnisse die Veranlassung gaben.

Endlich geben die schwankenden Ausdrücke, wie Halbflach, Helldunkel ic., welche die Maler jeden Augenblick anwenden, stehende Beweise, wie nothwendig ihnen genauere Kenntnisse und strengeres Raisonnement seyen.

74. Außer ihrer Nützlichkeit in den Künsten ist die Betrachtung der tangirenden Ebenen und Normalen zu den krummen Flächen, eines der fruchtbarsten Mittel, welche die darstellende Geometrie zur Auflösung von Aufgaben anwendet, die mittelst anderer Verfahrensarten nur sehr schwierig zu lösen wären. Wir werden davon einige Beispiele beybringen.

75. Die allgemeine Methode zur Bestimmung der tangirenden Ebene zu einer krummen Fläche besteht, nach Art. 70 darin; an dem Berührungspunkt die Tangenten zu zwey verschiedenen Erzeugungslinien, welche durch diesen Punkt gehen, zu konstruiren und durch diese zwey Geraden eine Ebene zu führen.

Wenn eine Fläche zur Erzeugungslinie eine Gerade hat, so muß die tangirende Ebene offenbar die gerade Erzeugungslinie enthalten, welche durch den Berührungspunkt geht, denn diese Gerade ist zu gleicher Zeit eine Linie der Fläche und ihre eigene Tangente, und als solche gehört sie ganz der tangirenden Ebene an.

76. Diese allgemeine Methode findet jedoch alsdann eine Ausnahme, wenn der Punkt, an welchem die tangirende Ebene geführt werden soll, zugleich ein vielfacher Punkt der Fläche ist. Unter vielfachen Punkten einer Fläche versteht man nemlich jene, welche mehreren Netzen einer Fläche gemein sind. Nehmen wir als Beispiel einen Cylinder, dessen senkrechter Schnitt eine geschlossene Linie mit einem doppelten Punkte sey. \*) Die zwey Tangenten, welche zu dieser Kurve, durch den doppelten Punkt gezogen sind, sind offenbar auch Tangenten zu der Fläche, und dem ungeachtet ist die, durch diese beyden Tangenten gehende Ebene nicht tangirend zu dem Cylinder, denn sie müßte auch die gerade Erzeugungslinie enthalten, die durch den doppelten Punkt geht, (Art. 75.) auf welche sie aber in der That senkrecht ist. Aber man muß bemerken,

---

\*) Doppelten Punkt einer krummen Linie nennt man denjenigen, in welchem sich zwey Zweige derselben schneiden, wie zum Beispiel bey der Linie in Form einer 8 (Lemniscata). Dreyfacher Punkt heißt der gemeinschaftliche Punkt dreyer Zweige, und im Allgemeinen nennt man vielfachen Punkt einer Linie denjenigen, in welchen sich mehrere Zweige derselben Linie kreuzen.

daß diese Erzeugungslinie der Durchschnitt der zwey Netze der Fläche ist, und daß man durch eben diese Gerade zu jedem Netz der Fläche eine tangirende Ebene führen könne. Es folgt aus dem Gesagten, daß, so oft zwey Tangenten von demselben Punkt einer Fläche auslaufen, und zwey verschiedene krumme Linien berühren, die durch diese beyden Tangenten geführte Ebene an demselben Punkt tangirend zu der Fläche sey; vorausgesetzt jedoch, daß der genannte Berührungspunkt nicht zugleich ein vielfacher Punkt der Fläche sey, denn in diesem Falle kann man durch denselben so viele tangirende Ebenen zu der Fläche führen, als diese Netze hat.

Was die Konstruktion der Normalen betrifft, so beschränkt sich diese darauf, eine Senkrechte auf die tangirende Ebene zu errichten; wir werden uns deshalb einige besondere Fälle ausgenommen, im Allgemeinen nicht näher damit beschäftigen.

Konstruktion tangirender Ebenen zu krummen Flächen, wobey der Berührungspunkt gegeben ist.

77. Vorbemerkung. Wir glauben von nun an ohne Mißverständnisse folgende Abkürzungen im Texte eintreten lassen zu können. Einen Punkt im Raume werden wir durch die Buchstaben seiner Horizontal- und seiner Vertikalprojektion, zwischen eine Parenthese gesetzt bezeichnen. Unter Punkt  $(A, a)$  ist demnach der Punkt des Raumes zu verstehen, dessen Projektionen  $A$  und  $a$  sind. Auf gleiche Weise bezeichnet Linie  $(A B, a b)$  die Linie, deren Projektionen  $A B$  und  $a b$  sind.

Ebene  $(A B, a b)$  bezeichnet die Ebene, deren Risse auf beyden Projektionsebenen die Geraden  $A B, a b$  sind; und Ebene  $A B$  bezeichnet die Ebene, welche als Riß auf einer Projektionsebene die Gerade  $A B$  hat, und welche zugleich senkrecht auf dieselbe Ebene ist.

### E r s t e A u f g a b e.

Man soll durch einen Punkt einer Cylinderfläche, dessen eine Projektion gegeben ist, eine tangirende Ebene zu der Fläche führen?

78. Auflösung. Es sey  $(A B, a b)$  (Taf. VII. Fig. 1.) die Gerade, zu welcher die Erzeugungslinie der Cylinderfläche parallel seyn soll;  $P H Q G$  sey die, auf der horizontalen Projektionsebene gegebene Grundlinie der Fläche, welche man als ihren Horizontalriß betrachten kann.

Da alle geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche parallel zu der Geraden  $(A B, a b)$  seyn müssen, ziehe man parallel zu  $A B$  die Geraden  $G J, H N$  tangirend an

den Horizontalriß  $P H Q G$ , und nachdem man die projektirenden Geraden  $P p$ ,  $Q q$  ebenfalls berührend an dieselbe Linie gezogen, führe man durch die Punkte  $p$  und  $q$ , wo diese Geraden die Projektionsare  $L M$  treffen zu  $a b$  die Parallelen  $p s$ ,  $q r$ , so sind  $G J$ ,  $H N$  auf der Horizontalebene, und  $p s$ ,  $q r$  auf der Vertikalebene die Gränzen der Projektionen der Cylinderfläche, oder vielmehr die Gränzen, innerhalb welcher sich alle, der Fläche angehörigen Punkte projektiren.

Dieses festgesetzt, so sey  $C$  die gegebene Horizontalprojektion des Punkts, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll; und dessen Vertikalprojektion zuerst zu konstruiren bleibt.

79. Die Erzeugungslinie des Cylinders, welche durch den Berührungspunkt geht, muß als Horizontalprojektion die unbestimmte Gerade  $C F$  haben, welche durch den Punkt  $C$  parallel zu  $A B$  geführt ist. Um die Vertikalprojektion dieser nemlichen Erzeugungslinie zu erhalten, denken wir uns dieselbe verlängert, bis sie die horizontale Projektions-ebene trifft; dieses kann aber nur in einem Punkte geschehen, welcher zu gleicher Zeit auf der Projektion  $C F$  und auf der Krümmen  $P H Q G$  liegt. In unserm Beispiel ist aber diese Krümme eine Kreislinie, welche die Eigenschaft hat, von einer Geraden in zwey Punkten geschnitten zu werden. Die verlängerte Gerade  $C F$  wird daher diese Linie in zwey Punkten  $D$  und  $E$  durchschneiden und es folgt hieraus, daß der Horizontalprojektion  $D C F$  zwey verschiedene Erzeugungslinien entsprechen; eine Erste, welche sich auf den Punkt  $D$  des Risses  $P H G Q$  anlehnt, und eine Zweyte, welche sich auf den Punkt  $E$  stützt. Wenn man daher die Punkte  $D$  und  $E$  auf die Vertikalebene nach  $d$  und  $e$  projektirt, und durch diese letzten Punkte die Geraden  $d f$ ,  $e f'$  parallel zu  $a b$  zieht, so sind diese die Vertikalprojektionen jener zwey Erzeugungslinien. Da nun die Vertikalprojektion des Berührungspunkts einmal in der Geraden  $C c$  liegen muß, welche aus  $C$  senkrecht auf die Projektionsare gezogen ist, und zweitens in der Geraden  $d f$ , oder  $e f'$ , so ist sie in  $c$  oder  $c'$ , den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Vertikalen  $C c$ . Der Punkt  $(C, c)$  oder  $(C, c')$  kann daher als Berührungspunkt betrachtet werden, und jedem entspricht eine tangirende Ebene, welche der Aufgabe Genüge leistet, diese hat sonach zwey Auflösungen.

80. Die Erzeugungslinie  $(D F, d f)$  ist eine der Geraden, welche die tangirende Ebene am Punkt  $(C, c)$  bestimmen; (Art. 75.) und eben so ist die Erzeugungslinie  $(E F, e f')$  eine Linie der tangirenden Ebene an dem Punkt  $(C, c')$ .

Es bleibt also noch für jeden Berührungspunkt die zweyte Gerade zu finden, um die Stellung dieser Ebenen festzusetzen. Wollte man buchstäblich der allgemeinen Methode (Art. 70.) folgen, so müßte man, den Riß  $P H Q G$  als eine zweyte Erzeugungslinie betrachtend, sich denselben nacheinander durch jeden Berührungspunkt gehend

vorstellen; und in jedem dieser Punkte eine Tangente zu demselben konstruiren. Allein bey den Cylinderflächen kann man eine weit einfachere Konstruktion anwenden, denn die tangirende Ebene an dem Punkt  $(C, c)$  berührt die Fläche nicht bloß in diesem einzigen Punkt, sondern nach der ganzen Ausdehnung der durch ihn gehenden Erzeugungslinie  $(D F, d f)$ .

In der That, wenn die Kurve  $P H D G$  sich so bewegt, daß, während sie sich immer mit dem gleichen Punkte  $(D, d)$  an die Gerade  $(D F, d f)$  lehnt, alle ihre übrigen Punkte Parallelen zu dieser Geraden beschreiben, und wenn sie bey dieser Bewegung irgend eine ihrer Tangenten, zum Beyspiel die am Punkt  $(D, d)$  mit sich führt, so wird die Kurve die vorliegende Cylinderfläche durchlaufen, ihre Tangente wird eine Ebene beschreiben, und offenbar wird diese Ebene die Fläche in allen Punkten der Geraden  $(D F, d f)$  berühren.

Die tangirende Ebene, welche die Gerade  $(D F, d f)$  enthält, berührt den Cylinder daher auch in dem Punkt  $D$  dieser Geraden, und sie muß folglich durch die Tangente zu dem Riß  $E P D G$  im Punkt  $D$  gehen. Nach der gleichen Folgerung findet man, daß die tangirende Ebene am Punkt  $(C, c')$  durch die Tangente zu dem Riß, im Punkt  $E$  gehen muß. Wenn man daher durch die zwey Punkte  $D, E$ , zu jener Kurve die Tangenten  $D K, E L$  zieht, welche verlängert, die Projektionsaxe  $L M$  in den Punkten  $L$  und  $K$  schneiden, so hat man die Risse der zwey tangirenden Ebenen auf der Horizontalebene.

81. Für jede dieser Ebenen sind sonach zwey Gerade bekannt, durch welche sie geht, und es ist folglich leicht ihre Vertikalrisse zu konstruiren. Da die Berührungslinien  $(D F, d f)$   $(E F, e f')$  die Vertikalebene nicht mehr innerhalb des Rahmens der Zeichnung treffen; so führe man durch den Punkt  $(C, c)$  eine Parallele  $(C I, c i)$  zu dem Horizontalriß  $D K$ . Diese Parallele trifft die Vertikalebene in einem Punkt  $i$ , welchen man mit dem Punkt  $K$  verbinde, um den Vertikalriß  $K i$  der ersten tangirenden Ebene zu erhalten. Auf die gleiche Weise findet man die Gerade  $L m$  als den Riß der zweyten tangirenden Ebene auf der Vertikalebene.

Wenn die Durchschnittslinie der gegebenen Cylinderfläche mit der Vertikalebene noch auf der Zeichnung konstruirt wäre, so müßten die gefundenen Risse  $K i, G h$  diese Durchschnittslinie in den Punkten berühren, in welchen die Geraden  $(D F, d f)$ ,  $(E F, e f')$  auf die Vertikalebene treffen.

82. Die vorstehende Aufgabe über die tangirende Ebene zu einer Cylinderfläche giebt uns Veranlassung zu einer Bemerkung über die Tangenten zu den krummen Linien, welche für die darstellende Geometrie äußerst wichtig ist, nemlich:

Die Projektion der Tangente zu irgend einer krummen Linie im Raume ist selbst Tangente zu der Projektion der Linie, und ihr Berührungspunkt ist die Projektion des Berührungspunktes der krummen Linie. Denn in der That, wenn man aus allen Punkten der krummen Linie im Raume sich Senkrechte auf eine der Projektionsebenen, zum Beispiel auf die Horizontalebene gefällt denkt, so sind alle diese Senkrechten auf einer vertikalen Cylinderfläche gelegen, welche wir (Art. 13.) die projektirende Fläche der Krummen genannt haben, und welche von der Horizontalebene nach der Projektion der krummen Linie selbst geschnitten wird. Wenn man sich eben so durch alle Punkte der Tangente zu der krummen Linie im Raume, Vertikallinien denkt, so sind diese in einer Vertikalebene, der projektirenden Ebene der Tangente enthalten, welche von der Horizontalebene nach der Projektion der Tangente selbst geschnitten wird. Nun aber berühren sich die Cylinderfläche und die Vertikalebene, offenbar nach der ganzen Ausdehnung der aus dem Berührungspunkt gefällten Vertikalen, welche sie gemein haben. Die Durchschnitte der Cylinderfläche und der Vertikalebene durch die horizontale Projektionsebene berühren sich daher in einem Punkte, welcher der Durchschnitt der geraden Berührungslinie der Cylinderfläche und der Vertikalebene ist. Daher endlich berühren sich die Projektionen irgend einer krummen Linie und einer ihrer Tangenten in einem Punkte, welcher die Projektion ihres Berührungspunktes im Raume ist.

### Z w e y t e   A u f g a b e .

Es ist eine Regelfläche gegeben mittelst ihrer Basis und ihres Mittelpunktes; man soll durch einen gleichfalls gegebenen Punkt dieser Fläche eine tangirende Ebene zu derselben führen?

83. Auflösung. Es sey  $A H C B$  (Taf. VII. Fig. 2.) die gegebene Durchschnittslinie der Regelfläche durch die horizontale Projektionsebene;  $(E, e)$  sey der Mittelpunkt der Fläche.

Alle geraden Erzeugungslinien einer Regelfläche gehen durch den Mittelpunkt derselben; man ziehe daher durch den Punkt  $E$  die Tangenten  $E H, E F$  an die Krümme  $A H B C$ ; und man hat die Gränzen der Horizontalprojektion der Regelfläche. Man ziehe die projektirenden Geraden  $A a, G g$  tangirend an den Horizontalriß  $A H C B$ ; die Punkte  $a, g$ , wo sie die Projektionsaxe treffen, verbinde man mit der Vertikalprojektion  $e$  des Mittelpunktes, so hat man, wie leicht zu ersehen, die Gränzen der Vertikalprojektion der Regelfläche. Es sey endlich  $D$  die gegebene Horizontalprojektion des Punktes, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll.

84. Die Horizontalprojektion der geraden Erzeugungslinie, welche den Berührungspunkt enthält, muß offenbar die, durch D und E gezogene unbestimmte Gerade D E seyn. Diese verlängerte Gerade schneidet den Horizontalriß der Regelfläche, welche in unserm Beispiele eine Ellipse A H C B ist, in zwey Punkten B und C, und es ist einleuchtend, daß die beyden geraden Erzeugungslinien der Regelfläche, welche durch diese Punkte der Grundlinie gehen, die gleiche Horizontalprojektion B E K haben, und daß man die Vertikalprojektionen dieser nemlichen Geraden erhalte, wenn man die Punkte B und C auf die Vertikalebene nach  $b$  und  $c$  projektirt, und durch diese letzten Punkte die Geraden  $b e$ ,  $c e$  führt. Da nun diese beyden Geraden  $b e$  und  $c e$  die Vertikalprojektion des Berührungspunktes enthalten können, so ist diese in  $d$  oder  $d'$ , in welchen beyden Punkten die aus D errichtete Vertikale die Geraden  $b e k$ ,  $c e k'$  durchschneidet.

Es folgt hieraus, daß entweder (D,  $d$ ) oder (D,  $d'$ ) der Punkt der Regelfläche ist, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll, und daß die gerade Erzeugungslinie (B E K,  $c e k'$ ) der tangirenden Ebene an dem ersten, und die Erzeugungslinie (C E K,  $b e k'$ ) der tangirenden Ebene am zweyten Punkte angehöre (Art. 75.)

85. Nun läßt sich aber leicht nach der nemlichen Beweisart, welche wir in Bezug auf die tangirende Ebene zu den Cylinderflächen angewendet haben, (Art. 80.) darthun, daß die Regelfläche von einer Ebene nicht nur in einem einzigen Punkte berührt werde, sondern nach der ganzen Ausdehnung der durch jenen Punkt gehenden geraden Erzeugungslinie.

Da nun die gerade Erzeugungslinie (B E K,  $b e k$ ) der einen tangirenden Ebene, und die Erzeugungslinie (C E K,  $c e k'$ ) der Anderen die Grundlinie der Regelfläche in den Punkten B und C treffen, so folgt daraus, daß die beyden tangirenden Ebenen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen, durch die Tangenten B T, C N gehen, welche durch B und C zu der Ellipse A H C B gezogen sind. Diese Tangenten sind zugleich die Risse der beyden tangirenden Ebenen auf der horizontalen Projektionsebene; die Risse T j, N i derselben Ebenen auf der vertikalen Projektionsebene bestimme man nach demselben Verfahren, was wir bey der Cylinderfläche (Art. 81.) angewendet haben.

86. In Betreff der Ausführung der Tafel VII müssen wir hier noch Einiges anführen.

Fig 1. Wir haben die gegebene Cylinderfläche als wirklich im Raume vorhanden angenommen, und alle Linien dieser Fläche, je nachdem sie auf einer oder der andern Projektion dem gesehenen, oder dem vom Auge abgewendeten Theile der Fläche angehörten, mit vollen oder punktirten Linien bezeichnet.

Auf der Horizontalebene entsprechen die begränzenden Geraden G J, H N als Pro-

jektionen zweyer Kanten der gegebenen Cylinderfläche und es läßt sich leicht zeigen, daß diese nemlichen Kanten in der Horizontalprojektion den gesehenen Theil der Fläche von dem, vom Auge abgewendeten trennen; denn man betrachte die genannten Geraden  $G J$ ,  $H N$  als die Risse zweyer Vertikalebene, die den Cylinder nach zwey Kanten berühren, deren Projektionen eben jene Geraden  $G J$ ,  $H N$  sind. Diese berührenden Ebenen, da sie parallel unter sich sind, und senkrecht auf die Projektionsebene, werden sich im Auge, das wir in unendlicher Entfernung über derselben Ebene annehmen, schneiden, und dieses kann daher offenbar nur den oberhalb der beyden in  $G J$ ,  $H N$  projektirten Berührungskanten gelegenen Theil der Cylinderfläche überschauen. Da nun die Geraden  $G J$ ,  $H N$  die Grundlinie  $P H D G$  in  $G$  und  $H$  berühren, so kann demzufolge nur der Bogen  $G E H$  dieser Grundlinie gesehen werden, der Bogen  $H D G$  hingegen wird bedeckt seyn; und alle Kanten der Fläche, welche auf die Punkte des erstgenannten Bogens treffen, werden sonach gesehen, die Uebrigen aber bedeckt seyn. Von der Reihe der letzteren ist die Kante  $(Q R, q r)$ .

Für die Vertikalprojektion ergiebt sich nach den ganz gleichen Folgerungen, daß die Kanten, deren Projektionen die begränzenden Geraden  $p s$ ,  $q r$  sind, den gesehenen von dem bedeckt scheinenden Theil der Fläche trennen. Wenn man daher den zur Projektionsaxe parallelen Durchmesser  $P Q$  der kreisförmigen Grundlinie  $P D G$  zieht, so sind  $P$  und  $Q$  die Punkte, wo die in  $p s$  und  $q r$  projektirten Kanten auf die Grundlinie treffen, daher werden in der Vertikalprojektion alle Kanten, welche dem Bogen  $P G Q$  jener Grundlinie angehören, gesehen seyn; diejenigen hingegen, welche wie  $(H N, h n)$  sich auf die Punkte des Bogens  $P H Q$  stützen, bedeckt erscheinen.

87. Fig. 2. Alles über die Projektionen der Cylinderfläche Gesagte, findet eine gleichmäßige Anwendung auf die Projektionen der Kegelfläche Fig. 2. Nur ist hier noch zu bemerken, daß in jeder Projektion alle Kanten der Kegelfläche, welche auf dem einen Neze gesehen sind, auf dem andern Neze nothwendig dem bedeckten Theile angehören, und eben so umgekehrt.

Wenn, wie in dem vorliegenden Beispiele, die Grundlinie der Kegelfläche eine Ellipse ist, so bestimmt man auf der Horizontalebene die Durchschnittspunkte  $A$ ,  $G$  dieser Ebene und derjenigen Kanten, deren Vertikalprojektionen die begränzenden Geraden  $e a$ ,  $e g$  sind, wenn man den zusammengehörigen Durchmesser  $A G$  zu demjenigen konstruirt, welcher senkrecht auf die Projektionsaxe ist. Die Endpunkte jenes Durchmessers sind die gesuchten Punkte  $A$ ,  $G$ .  $A E$  ist demnach die Horizontalprojektion derselben Geraden, welche vertikal in  $a e$  projektirt ist. Die übrigen Linien beyder Figuren der Tafel bedürfen keiner weiteren Erklärung.

## Dritte Aufgabe.

Man soll durch einen gegebenen Punkt einer Umdrehungsfläche eine tangirende Ebene zu der Fläche führen?

88. Auflösung. Die Fläche sey gegeben durch ihre Ase, und ihren Erzeugungsmeridian, und wir nehmen die horizontale Projektionsebene senkrecht auf die Ase der Fläche an, wodurch die Allgemeinheit der Auflösung in nichts geändert wird.

Es sey demnach  $(A, a a')$  (Taf. VIII.) die Umdrehungsaxe;  $L M$  der Durchschnitt der Projektionsebenen. In einer zur vertikalen Projektionsebene parallelen Meridianebene  $L' M'$  sey der Erzeugungsmeridian  $(D D', b d f e d')$  gegeben. Nachdem man die projektirenden Geraden  $d D, d' D'$  tangirend an die Linie  $b d f e d'$  gezogen, beschreibe man aus  $A$  als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser  $A D = \frac{1}{2} d d'$  einen Umkreis  $D B D'$ , so hat man die Horizontalprojektion des größten Parallelkreises der Fläche. Der Berührungspunkt sey durch seine Horizontalprojektion  $G$  gegeben.

89. Dieser festgesetzt denken wir uns durch den Berührungspunkt eine Meridianebene geführt, deren Horizontalprojektion die unbestimmte Gerade  $A G$  ist. Diese Ebene wird die Fläche nach einem Meridiane schneiden, und wenn man aus dem Punkt  $G$  eine Vertikale errichtet, so wird diese den Meridian, und folglich die Umdrehungsfläche in einem, oder in mehreren Punkten treffen, welches eben so viele Berührungspunkte sind, von denen  $G$  die gemeinsame Horizontalprojektion ist. Um diese Punkte zu finden, denken wir uns die Meridianebene  $A G$  mittelst einer Drehung um die Ase  $(A, a a')$  auf die Ebene  $L' M'$  zurückgelegt. Es werde sodann  $A G$  nach  $A G'$  getragen, und die Vertikale  $G' e e'$  errichtet, welche den Meridian  $d f e d'$  in den Punkten  $e, e'$  schneidet, so geben diese Punkte die Höhen der Berührungspunkte über der Horizontalebene an. Wenn man daher durch  $e$  und  $e'$  unbestimmte Horizontallinien  $e g, e' g'$  zieht, so müssen in diesen Horizontalen die Vertikalprojektionen jener nemlichen Berührungspunkte enthalten seyn; diese Vertikalprojektionen sind folglich die Begegnungspunkte  $g, g'$  der Horizontalen  $e g, e' g'$  mit der, aus  $G$  senkrecht auf die Projektionsaxe errichteten Geraden  $G g g'$ .

Der bekannte Berührungspunkt ist sonach  $(G, g)$ , oder  $(G, g')$  und es sind sofort die Risse der tangirenden Ebenen an diesen Punkten zu bestimmen.

Denken wir uns zu diesem Ende, durch jeden Berührungspunkt den Parallelkreis der Umdrehungsfläche, welcher diesem Punkte entspricht, und den man als eine Erzeugungsline der Fläche betrachten kann, so werden die zu bestimmenden tangirenden Ebenen durch die Tangenten zu diesen Kreisen an den bekannten Berührungspunkten gehen. Aber diese beiden Tangenten sind senkrecht auf die Meridianebene  $A G$ , der die Berührungspunkte an-

gehören, daher müssen die tangirenden Ebenen ebenfalls senkrecht auf die nemliche Meridianebene seyn, und folglich ihre Risse auf der Horizontalebene senkrecht auf  $A G$ .

Um nun die Stellung der gesuchten tangirenden Ebenen vollends zu bestimmen, muß für jede noch eine zweyte in ihr enthaltene Tangente zu der Umdrehungsfläche konstruirt werden.

Hiezu ziehe man durch die, auf die Ebene  $L' M'$  zurückgelegten Berührungspunkte  $(G', e)$ ,  $(G', e')$  zu dem Meridian  $(L' M', b d f e)$  die Tangenten  $(D D', e \alpha)$ ,  $(D D', e' a')$ , welche verlängert die Drehungsaxe in den Punkten  $(A, \alpha)$ ,  $(A, a')$  treffen. Es ist leicht einzusehen, daß die Tangenten zu dem Meridian der Ebene  $A G H$  an den Punkten  $(G, g)$ ,  $(G, g')$  ebenfalls durch dieselben Punkte  $(A, \alpha)$ ,  $(A, a')$  gehen werden; denn wenn der Meridian  $(D D', d f e)$  sich um die Axe  $(A, a a')$  dreht um die Umdrehungsfläche zu erzeugen, und wenn er dabey die Tangenten an den Punkten  $(G', e)$ ,  $(G', e')$  mit sich führt, so werden diese während der Bewegung nicht aufhören, durch die nemlichen Punkte  $(A, \alpha)$ ,  $(A, a')$  der Axe zu gehen, und ihre Berührungspunkte, welche auf dem Meridian unveränderlich sind, werden die Parallelkreise der Fläche durchlaufen, denen die Punkte  $(G, g)$ ,  $(G, g')$  angehören. Die Tangenten an diesen letzten Punkten des Meridians der Ebene  $A G$  haben daher zu Projektionen die Geraden  $(A G H, \alpha i g)$ ,  $(A G H, a' g' h)$ . Sie treffen die horizontale Projektionsebene in den Punkten  $I$  und  $H$ , die den Horizontalrissen der gesuchten tangirenden Ebenen angehören, und dieses sind daher die auf  $A G$  senkrechten Geraden  $I Q$ ,  $H P$ .

Nachdem man diese Risse bis an die Projektionsaxe verlängert, führe man, zur Bestimmung der Vertikalrisse derselben tangirenden Ebenen, durch jeden Berührungspunkt eine Parallele  $(G K, g k)$ ,  $(G K, g' k')$ , zu dem entsprechenden Risse,  $I Q$ ,  $H P$ . Diese Parallelen, welche nichts anderes sind, als die Tangenten zu den Parallelkreisen der beyden Berührungspunkte, treffen die Vertikalebene in den Punkten  $k$  und  $k'$ , welche die Vertikalrisse  $Q k$  der ersten, und  $P k'$  der zweyten tangirenden Ebene bestimmen.

90. Wir haben als Beispiel eine Fläche gewählt, welche durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre große Axe hervorgebracht ist, und der man die Benennung Umdrehungs-Ellipsoid, oder auch Sphäroid giebt. Die beyden Berührungspunkte des Ellipsoids sind nach der Annahme der Projektionsebenen in gleichem Abstände von der Ebene des Parallelkreises  $(D B D', d d')$ . Die Horizontalrisse  $I Q$ ,  $H P$  der tangirenden Ebenen an diesen Punkten sind parallel unter sich, und die Vertikalrisse derselben schneiden sich in einem Punkt  $m$ , welcher in der Verlängerung der Geraden  $d d'$ , der kleinen Axe der Erzeugungselipse liegt, und zwar in Folge dessen, weil sich die Tan-

genten an den Punkten  $e, e'$  dieser Ellipse, in einem Punkte  $m'$  der nemlichen Axe be-  
gegnet, was eine bekannte Eigenschaft der Ellipse ist.

\* \* \*

91. Die Auflösung der vorstehenden Aufgabe leitet uns auf folgende allgemeine  
Eigenschaften der Umdrehungsflächen in Bezug auf ihre Tangenten und ihre Normalen.

1ten Alle Tangenten zu den verschiedenen Meridianen einer Umdrehungsfläche, deren  
Berührungspunkte auf einem nemlichen Parallelkreise liegen, gehen durch einen und densel-  
ben Punkt der Axe der Fläche, sie bilden zusammen einen geraden Kegel, welcher um  
die Umdrehungsfläche umschrieben ist, und sie nach Parallelkreise berührt.

2ten Alle Normalen zu einer Umdrehungsfläche, welche durch die Punkte eines  
nemlichen Meridians gehen, sind auch Normale zu eben diesem Meridian, denn einmal  
ist jede von ihnen senkrecht auf die entsprechende Tangente zu dem Meridiane, und zwey-  
tens sind sie alle in der Ebene desselben enthalten, weil alle tangirenden Ebenen zu einer  
Umdrehungsfläche längs den Punkten eines ihrer Meridiane senkrecht auf die Ebene  
desselben sind. Umgekehrt ist daher eine Normale zu einem Meridian auch zugleich Nor-  
male zu der Fläche; es folgt hieraus]

3ten, daß alle Normalen einer Umdrehungsfläche durch die Axe gehen, und daß

4ten alle Normalen längs den Punkten eines Parallelkreises durch einen nemlichen  
Punkt der Axe gehen, und daß sie eine gerade Kegelfläche bilden, welche selbst normal  
auf die Umdrehungsfläche ist.

Es ergibt sich aus diesen Eigenschaften die direkte Auflösung der folgenden Auf-  
gabe.

### V i e r t e   A u f g a b e.

Man soll durch einen gegebenen Punkt einer Umdrehungsfläche eine Normale  
zu der Fläche führen?

92. Auflösung. Es sey (A,  $a a'$ ) Taf. VIII, die Axe der Fläche  $b d f e$   
der Erzeugungsmeridian in einer Ebene  $L' M'$  parallel zur Vertikalebene betrachtet; und  
(S, s) sey der gegebene Punkt, durch welchen die Normale geführt werden soll. \*)

Diese Normale muß einmal in der, durch den Punkt (S, s) gehenden Meridian-  
ebene A S enthalten seyn, und sie ist bestimmt, sobald man den Punkt kennt, in wel-

---

\*) Wir nehmen an, die beyden Projektionen S, s des Punktes der Umdrehungsfläche seyen nach  
dem oben (Art. 89) angegebenen Verfahren konstruirt.

chem sie die Axe durchschneidet. Zu diesem Zweck betrachte man die Meridianebene  $A S$  als auf die Ebene  $L' M'$  zurückgelegt, indem sie eine Drehung um die Axe  $(A, a a')$  gemacht hat. Der gegebene Punkt wird, nach dieser Bewegung die Stellung  $(S', s')$  annehmen, und wenn man durch  $(S', s')$  die Normale  $(S' A, s' v)$  zu dem Meridian  $b d f e$  errichtet, so ist diese zugleich Normale zu der Fläche und  $(A, v)$  ist der Punkt, in welchem sie die Axe durchschneidet. Nun aber liegen die Punkte  $(S', s')$  und  $(S, s)$  auf einem und demselben Parallelkreis der Umdrehungsfläche; die Normalen der Fläche an diesen Punkten, müssen sich daher in einem Punkt der Axe kreuzen, und folglich ist die Gerade  $(A S, v s)$  die verlangte Normale der Umdrehungsfläche am Punkte  $(S, s)$ .

Diese Konstruktion kann auch zur Lösung der vorhergehenden dritten Aufgabe dienen: denn wenn man durch die gegebenen Punkte  $(G, g)$ ,  $(G', g')$  (Taf. VIII.) die Normalen zu der Fläche führt, und durch jeden Punkt eine Ebene senkrecht auf die zugehörige Normale; so sind diese die verlangten tangirenden Ebenen.

93. Wir beschränken uns für den Augenblick auf diese vier Beispiele über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen. Im folgenden Kapitel werden wir die Erzeugung anderer zahlreicher Familien von Flächen vortragen, und auf diese sodann dieselben Methoden zur Bestimmung ihrer tangirenden Ebenen und ihrer Normalen anwenden. Schließlich wollen wir noch eine zweyte Auflösung der vierzehnten Aufgabe im ersten Kapitel geben, welche auf die Betrachtung der tangirenden Ebenen gegründet ist.

### F ü n f t e A u f g a b e.

Man soll die kürzeste Entfernung zweyer gegebenen Geraden konstruiren?

95. Auflösung. (Fig. 2. Taf. V.) Wir haben die gleichnamigen Gegenstände mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie in der Figur 1., welche sich auf die erste Auflösung dieser Aufgabe (Art. 50.) bezieht.

Nachdem man den Horizontalriß  $A E F$  einer Ebene konstruirt hat, welche durch die erste gegebene Gerade  $(A B, a b)$  parallel zu der Zweyten  $(C D, c d)$  geführt ist; betrachte man dieselbe als tangirende Ebene zu einem geraden Cylinder von kreisförmiger Grundlinie, welcher als Axe die Gerade  $(C D, c d)$  hat, und als Halbmesser, die gesuchte Entfernung. Diese Cylinderfläche wird von jener Ebene nach einer Geraden berührt werden, welche parallel zu der Axe ist, und welche die erste Gerade  $(A B, a b)$  in einem Punkte schneidet. Wenn man durch diesen Punkt eine Senkrechte auf obige Ebene errichtet, so schneidet diese sowohl die erste als auch die zweyte Gerade senkrecht, denn sie

ist der Halbmesser eines Cylinders, von welchem diese zweyte Gerade die Axc ist, und auf ihr wird folglich die gesuchte kürzeste Entfernung gemessen.

Um die Berührungslinie der Cylindersfläche mit der Ebene, welche parallel zu den zwey gegebenen Geraden ist, zu finden, führe man durch irgend einen Punkt, der als Axc angenommenen Geraden, (zum Beyspiel durch den Punkt C, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet) eine Ebene senkrecht auf diese Axc. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der tangirenden Ebene ist die Berührungslinie dieser Letzten mit der kreisförmigen Grundlinie des Cylinders.

Nachdem die Vertikalebene C D sich um ihren Riß C D gedreht, und auf die Horizontalebene zurückgelegt hat, konstruire man den Winkel  $\beta C \beta'$  den die zweyte Gerade (C D, c d) mit der Horizontalebene macht, indem man eine Vertikale  $\beta' \beta = b' b$  nimmt. Dieselbe Vertikalebene schneidet die, zu den zwey Geraden parallele Ebene nach der Geraden F K, parallel zu C  $\beta'$ . Daher schneidet die, durch C, und senkrecht auf die Axc geführte Ebene die Vertikalebene C D nach der Geraden C K, senkrecht auf C  $\beta'$  oder F K, und die Horizontalebene nach der auf C D senkrechten Geraden C H.

Nachdem dieselbe Ebene sich um ihren Horizontalriß C H gedreht hat, um sich auf die horizontale Projektionsebene zurückzulegen; fällt der Punkt K nach K'; der Punkt H des Risses bleibt fest, und die Gerade H K' ist der Durchschnitt der tangirenden Ebene zu der Cylindersfläche mit der Ebene, welche senkrecht auf die Axc dieser Fläche ist. Wenn man daher aus dem Punkt C die Senkrechte C I auf jene Gerade H K' fällt, so ist der aus C als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser = C I beschriebene Kreis die Grundlinie der Cylindersfläche, und I N ist die Horizontalprojektion der Berührungskante. Diese Kante schneidet die erste Gerade in dem Punkt (N, n), durch welchen die gesuchte Senkrecht geht.

Der letzte Theil der Auflösung vollendet sich wie die in Art. 43. Vorgetragene, auf welche wir zurückweisen.

### D r i t t e s K a p i t e l.

#### Fortsetzung der Erzeugung der Flächen.

##### Von den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

95. Alle Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können, bilden zwey große Klassen; sie sind entweder aufwickelbare oder windische Flächen.