veranlassen, die dem eigentlichen Gegenstande der Aufgabe zu fremd wären. Es bleibt in dem Falle der, durch Uebung in den Projektionszeichnungen zu erwerbenden Gewandheit des Arbeitenden überlassen, diese Schwierigkeiten zu umgehen, ohne der erforderlichen Deutlichkeit der Darstellung Eintrag zu thun. Wir werden (Art. 116. 117.) nochmals auf diesen Gegenstand zurückkommen und einige einfache Regeln über die Ausführung der Zeichnungen hinsichtlich der krummen Flächen geben.

Zweytes Kapitel.

Lösung verschiedener Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene.

Erste Aufgabe.

Es ist eine Gerade gegeben, mittelst ihrer beyden Projektionen; man soll die Punkte konstruiren, in denen sie die Projektionsebenen durchschneidet?

30. Auflösung. Es sey A B D (Taf. II. Fig. 2.) die Horizontalprojektion, und *a b d* die Vertikalprojektion der gegebenen Geraden.

Der Punkt, in welchem diese Gerade die vertikale Projektionsebene durchschneidet, muß als Horizontalprojektion einen Punkt der Projektionsaxe L M haben; (Art. 18.) er muß aber auch horizontal irgendwo in der Geraden A B D projektirt seyn; der Punkt B, der einzige den die Geraden L M und A B D gemein haben, ist daher die Horizontalprojektion dieses Durchschnittspunktes. Da nun die beyden Projektionen eines Punkts im Raume in einer nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen, so muß die aus B auf L M errichtete Senkrechte B *b* den fraglichen Punkt enthalten; dieser Punkt muß aber außerdem auch in der Vertikalprojektion *a b d* enthalten seyn; daher ist der Begegnungspunkt *b* der zwey Geraden B *b* und *a b d* derjenige, in welchem die gegebene Gerade die Vertikalebene durchschneidet.

Um den Punkt D zu bestimmen, in welchem dieselbe Gerade die horizontale Projektionsebene durchschneidet, wendet man aus leicht einzusehendem Grunde die ganz ähnliche Konstruktion an: man verlängert die Vertikalprojektion *a b d* der gegebenen Geraden bis sie die L M in einem Punkt *d* trifft; die aus diesem Punkt errichtete Senkrechte *d* D auf L M schneidet die Horizontalprojektion A B D der gegebenen Geraden in dem gesuchten Punkt D.

Zweyte Aufgabe.

Es sind mittelst ihrer Projektionen ein Punkt und eine gerade Linie gegeben; man soll die Projektionen einer zweyten Geraden konstruiren, welche durch den gegebenen Punkt parallel zu der Ersten gezogen ist?

31. Auflösung. Die Horizontalprojektionen der gegebenen und der gesuchten Geraden müssen parallel unter sich seyn, denn sie sind die Durchschnitte der beyden parallelen projektirenden Ebenen mit der Horizontalebene: eben so verhält es sich mit den Vertikalprojektionen derselben Geraden. Da nun überdies die gesuchte Gerade durch den gegebenen Punkt gehen soll, so müssen ihre Projektionen auch wechselseitig durch die Projektionen dieses Punktes gehen.

Es seyen A B, *a b* (Taf. II. Fig. 3.) die Projektionen der gegebenen Geraden und D, *d* die des gegebenen Punkts; man ziehe durch den Punkt D die E F parallel zu A B und durch den Punkt *d*, die *e f* parallel zu *a b*, so sind die Geraden E F, *e f*, die verlangten Projektionen.

Dritte Aufgabe.

Es ist eine Ebene gegeben mittelst ihrer Risse, und die Projektionen eines Punkts; man soll die Risse einer zweyten Ebene konstruiren, welche durch den gegebenen Punkt parallel zu der Ersten geführt ist?

32. Auflösung. Es seyen A B, B C (Taf. II. Fig. 4.) die beyden gegebenen Risse und G, *g* die Projektionen des Punktes.

Die Risse der gesuchten Ebene müssen zu den entsprechenden Rissen der gegebenen Ebene parallel seyn, denn sie sind die Durchschnitte zweyer parallelen Ebenen, durch die nemliche Ebene. Man braucht also für jeden nur einen Punkt zu kennen, durch welchen er gehen muß. Zu diesem Zweck denke man sich durch den gegebenen Punkt eine horizontale Gerade, die in der gesuchten Ebene liege. Diese Gerade muß parallel zu dem zu suchenden Horizontalrisse derselben Ebene, und deßhalb auch parallel zu dem Riß A B seyn, und sie wird die Vertikalebene in einem Punkt treffen, welcher dem Vertikalriß der gesuchten Ebene angehört. Um diesen Punkt zu erhalten, ziehe man durch *g* die unbestimmte Horizontale *g* F und durch G die Gerade G I parallel zu A B; diese zwey Geraden sind die Projektionen der gedachten Parallelen zu dem Riß A B; diese trifft die Vertikalebene in einem Punkt F, welchen man nach der ersten Aufgabe (Art. 30.) konstruirt. Wenn man sofort durch den Punkt F eine Parallele E F zu B C zieht, so ist diese der Vertikalriß der gesuchten Ebene; nachdem man diesen Riß verlängert hat, bis er die Projektionsaxe L M in einen Punkt E schneidet, und man zieht durch E die Parallele E D zu A B, so hat man den Riß derselben Ebene auf der Horizontalebene.

Anstatt in der gesuchten Ebene eine horizontale Gerade zu konstruiren, hätte man in derselben eine Parallele zu der Vertikalebene annehmen können, was nach einem durchaus ähnlichen Raisonnement folgende Konstruktion gegeben hätte: durch den Punkt G werde parallel zu L M die unbestimmte Gerade G D gezogen; durch den Punkt g die Gerade g H parallel zu C B, welche verlängert die L M in einem Punkt H schneidet, durch den man H D senkrecht auf L M errichtet. Diese letztere schneidet die G D in einem Punkt D; und wenn man durch diesen Punkt eine Parallele zu A B zieht; und durch E, wo diese Parallele die L M trifft, die E F, parallel zu B C, so hat man in D E, E F die verlangten Risse. Diese zweyte Konstruktion kann als Bewährung für die Richtigkeit der ersten dienen.

Vierte Aufgabe.

Es sind mittelst ihrer Projektionen drey Punkte im Raume gegeben; man soll die Risse einer Ebene konstruiren, welche durch diese drey Punkte geht?

33. Auflösung. Jede in der verlangten Ebene gezogene Gerade, durchschneidet die beyden Projektionsebenen in zwey Punkten, die den entsprechenden Rissen der Ebene angehören.

Es seyen A, und a (Taf. III. Fig. 1.) die Projektionen des ersten Punkts, B und b die des Zweyten, C und c die Projektionen des Dritten. Die drey Geraden, welche je zwey und zwey dieser Punkte verbinden, und welche ganz in der gesuchten Ebene liegen, haben zu Projektionen die Geraden A B, und $a\ b$, B C und $b\, c$, A C und $a\, c$. Die Punkte U, V, T, in denen diese Geraden die horizontale Projektionsebene treffen, (Art. 30) gehören daher dem Horizontalrisse U V T der verlangten Ebene an, und die Durchschnittspunkte p, q, r derselben Geraden mit der vertikalen Projektionsebene bestimmen den Vertikalriß $p\, q\, r$ eben dieser Ebene. Die beyden nach Erfoderniß verlängerten Risse U V T, $p\, q\, r$ müssen sich in einem nemlichen Punkte S der Projektionsaxe durchschneiden.

Fünfte Aufgabe.

Es sind zwey Ebenen gegeben, mittelst ihrer Risse auf beyden Projektionsebenen; man soll die Projektionen der Geraden bestimmen, nach welcher sie sich schneiden.

34. Auflösung. (Taf. III. Fig. 2.) Es seyen A B, $a\ b$ die Risse der ersten Ebene, C D, $c\ d$ die Risse der Zweyten. Der Punkt E, den die, nach Erfoderniß ver-

längerten Horizontalrisse der beyden Ebenen mit einander gemein haben, gehört offenbar beyden Ebenen zu gleicher Zeit an, und also ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte; eben so ist der Begegnungspunkt *f* der beyden Risse auf der Vertikalebene ein weiterer Punkt desselben Durchschnitts. Die gesuchte Durchschnittslinie der beyden Ebenen ist demnach so gelegen, daß sie die Horizontalebene in einem Punkt E trifft, und die Vertikalebene in einem Punkt *f*.

Wenn man daher den Punkt *f* auf die Horizontalebene nach F projektirt, indem man auf die Projektionsaxe L M die Senkrechte F *f* fällt, und alsdann die gerade F E zieht, so ist diese die Horizontalprojektion des Durchschnittes der zwey Ebenen; und wenn man auf gleiche Weise den Punkt E auf die L M nach *e* projektirt und hierauf die Gerade *e f* zieht, so ist diese die Vertikalprojektion des nemlichen Durchschnittes.

Sechste Aufgabe.

Es ist eine Gerade mittelst ihrer Projektionen, und eine Ebene mittelst ihrer Risse gegeben; man soll die Projektionen des Punktes konstruiren, in welchem die Gerade der Ebene begegnet?

35. Auflösung. Wenn man durch die gegebene Gerade irgend eine Ebene führt, und wenn man die Durchschnittslinie dieser Ebene und der Gegebenen konstruirt, so werden dieser gefundene Durchschnitt und die gegebene Gerade, da sie beyde in einer nemlichen Ebene liegen, sich schneiden, und ihr Durchschnitt, da er zu gleicher Zeit der gegebenen Geraden und der gegebenen Ebene angehört, ist der Begegnungspunkt dieser beyden.

Es seyen F G, G *c* (Taf. III. Fig 3.) die beyden Risse der gegebenen Ebene, und A B, *a b* seyen die Horizontal- und Vertikalprojektion der Geraden. Denken wir uns die Ebene durch die horizontal projektirende Ebene der Geraden durchschnitten; so wird ihr Durchschnitt horizontal in A B C projektirt seyn, und vertikal in *d c*, welche letzte Gerade man nach dem (Art. 34.) angegebenen Verfahren bestimme. Der gesuchte Begegnungspunkt muß nun in diesem Durchschnitte liegen und auch in der gegebenen Geraden; wenn aber zwey Gerade sich im Raume schneiden, so hat ihr Durchschnitt zu Projektionen die Durchschnittspunkte der Projektionen der Geraden, daher ist der Begegnungspunkt *a* der Projektionen *a b f* und *d c* die Vertikalprojektion des Begegnungspunkts der vorgelegten Geraden und Ebene.

Die Horizontalprojektion desselben Punkts, welche in der A B C enthalten seyn muß, ist daher in A, dem Begegnungspunkt dieser Geraden mit der aus dem Punkt *a* errichteten Senkrechten *a* A auf die Projektionsaxe L M.

Hätte man die vertikal projektirende Ebene der gegebenen Geraden zur Lösung der Aufgabe angewendet, so würde man nach den ganz ähnlichen Konstruktionen zuerst die Horizontalprojektion A des gesuchten Punktes erhalten haben, woraus man sodann die Vertikalprojektion *a* desselben abgeleitet hätte. Man kann sich dieser zweyten Konstruktion als Bewährungsmittel für die Genauigkeit der Ersten bedienen. Die folgende Auflösung ist allgemeiner.

36. (Taf. IV. Fig. 1.) Es sey N M die Projektionsaxe; L S, S *p* seyen die Risse der Ebene und A B, *a b* die Projektionen der Geraden. Diese Gerade schneidet die Projektionsebenen in die Punkten R, R′ (Erste Aufgb. Art. 30.) und deßhalb muß jede Ebene, welche durch dieselbe Gerade geführt ist, die Projektionsebenen nach zwey Geraden schneiden, welche durch diese nemlichen Punkte R und R′ gehen. Zieht man sonach durch den Punkt R eine Gerade R T L, welche die Gerade N M in einem Punkt T schneidet und durch die zwey Punkte T und R′ die Gerade R′ T *p*, so wird die Ebene, welche als Risse die Geraden L T, T *p* hat, die gegebene Ebene nach einer Geraden schneiden, welche sich nach L P und *l p* projektirt, (Art. 34.). Der Begegnungspunkt A der Geraden A B und L P, und der Begegnungspunkt *a* der Geraden *a b* und *l p*, sind die Projektionen des gesuchten Durchschnittpunkts. Die, die beyden Punkte A und *a* verbindende Gerade A *a* muß senkrecht seyn, auf die Projektionsaxe N M.

Siebente Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkt soll eine Senkrechte auf eine gegebene Ebene gefällt werden?

37. Auflösung. (Taf. IV. Fig. 2.) Es seyen *A B*, *B C* die Risse der Ebene; der gegebene Punkt sey in D und *d* projektirt. Um die Horizontalprojektion der gesuchten Geraden zu erhalten, fälle man aus D auf den Riß A B die Senkrechte D G, so ist diese die gesuchte Projektion; denn die horizontal projektirende Ebene der verlangten Geraden muß zu gleicher Zeit senkrecht auf die gegebene Ebene und auf die Horizontalebene seyn, sie muß daher auch senkrecht seyn auf den Durchschnitt dieser beyden Ebenen, das heißt auf den Horizontalriß A B der gegebenen Ebene, und folglich muß die Horizontalprojektion der gesuchten Geraden ebenfalls senkrecht seyn auf diesen Riß.

Die gleiche Schlußfolge giebt die Senkrechte *d g* auf B C als Vertikalprojektion der gesuchten Geraden.

38. Der Satz, den wir so eben bewiesen haben: Daß, wenn eine Gerade senkrecht auf eine Ebene ist, die Projektionen der Geraden senkrecht auf die Risse der

Ebene seyen, ist einer von denjenigen, welche die häufigste Anwendung in der darstellenden Geometrie finden.

Das Umgekehrte desselben ist ebenfalls wahr; nemlich: wenn die zwey Projektionen einer Geraden senkrecht auf die Risse einer Ebene sind, so ist die Ebene selbst senkrecht auf die Gerade; denn wenn man sich durch jede Projektion der Geraden die projektirende Ebene derselben denkt, so hat man zwey Ebenen deren gemeinschaftlicher Durchschnitt die projektirte Gerade ist; nun aber ist jede dieser Ebenen senkrecht auf die, durch ihre Risse Gegebene, daher ist ihr gemeinsamer Durchschnitt, das heißt die projektirte Gerade, selbst senkrecht auf diese letzte Ebene.

39. Wenn aufgegeben wäre, durch eine gegebene Gerade eine Ebene senkrecht auf eine andere gegebene Ebene zu führen, so würde man aus irgend einem Punkt der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die gegebene Ebene fällen, und die, durch diese Senkrechte und durch die gegebene Gerade geführte Ebene (Art. 33.) wäre die Verlangte; denn zwey Ebenen sind senkrecht unter sich, wenn die Eine von Ihnen, durch eine Senkrechte auf die Andere geht.

Achte Aufgabe.

Durch einen bestimmten Punkt soll eine Gerade senkrecht auf eine gegebene Gerade gefällt, und der Begegnungspunkt der beyden Geraden konstruirt werden?

40. Auflösung. Wenn man durch den bekannten Punkt eine Ebene senkrecht auf die gegebene Gerade führt; sodann den Begegnungspunkt der Geraden mit dieser Ebene konstruirt, und diesen Punkt und den Gegebenen durch eine zweyte Gerade verbindet, so ist diese die verlangte Senkrechte; denn sie geht durch den bestimmten Punkt, und schneidet die genannte Gerade; überdem liegt sie in einer auf diese Gerade senkrechten Ebene und ist folglich senkrecht auf dieselbe.

Es seyen A B, *a b*, (Taf. IV. Fig. 3.) die Projektionen der gegebenen Geraden; D, *d* die des gegebenen Punktes. Die Risse der Ebene, welche durch diesen Punkt senkrecht auf die gegebene Gerade geführt ist, müssen wechselsweise senkrecht auf die Projektionen A B, *a b* seyn (Art. 38.). Ueberdem, wenn man in derselben Ebene, und durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu einem ihrer Risse, zu ihrem Horizontalrisse zum Beyspiel annimmt, deren Projektionen die Senkrechte D H auf A B, und die Parallele *d h* zu L M sind, und wenn man nach Art. 30. den Punkt *h* konstruirt, wo diese Parallele die Vertikalebene durchschneidet, sodann durch *h* die Gerade *h* C senkrecht auf *a b* zieht, und durch den Begegnungspunkt dieser Geraden mit der L M die Gerade

C E senkrecht auf A B, so sind C E, C h die Risse jener senkrechten Ebene. Eine durch den gegebenen Punkt angenommene Parallele zu dem Vertikalrisse der senkrechten Ebene, deren Projektionen die, wechselsweise auf A B, $a\ b$ senkrechten Geraden D K, $d\ k$ sind, hätte zu dem nemlichen Resultate geführt. Die gegebene Gerade schneidet die letztgefundene Ebene in einem Punkte, als dessen Projektionen man nach Art. 35. die Punkte T und t findet; wenn man daher die Geraden D T, $d\ t$ zieht, so hat man die Projektionen der verlangten, auf die gegebene Gerade gefällten Senkrechten und die Projektionen des gesuchten Begegnungspunktes.

Neunte Aufgabe.

Es ist eine Ebene gegeben, und ein Punkt in derselben; man soll die Ebene auf eine der Projektionsebenen zurücklegen, und sodann die neue Stellung des Punktes bestimmen?

41. Auflösung. Taf. III. Fig. 1. *) Es seyen T S, S p die gegebenen Risse einer Ebene, welche Risse sich in einem Punkte S die Projektionsaxe schneiden. Was die Projektionen A, a eines Punktes der Ebene betrifft, so bemerken wir: wenn ein Punkt in einer Ebene enthalten seyn soll, so muß eine Parallele zu einem Risse der Ebene, welche durch diesen Punkt geführt wird, die Projektionsebene, auf welcher sich der zweyte Riß der Ebene befindet, in einem Punkte eben dieses Risses treffen. Um sich daher die Projektionen A, a eines in der Ebene T S, S p gelegenen Punktes zu geben, wendet man folgende Konstruktion an:

Durch die willkührlich angenommene Horizontalprojektion A, werde eine Parallele A F zu dem Risse T S geführt; aus dem Punkt F, in welchem diese Parallele die Projektionsaxe L M trifft, errichte man auf L M die Senkrechte F f, welche den Vertikalriß S p der gegebenen Ebene in einem Punkt f schneidet. Zieht man durch f eine unbestimmte Parallele $f\ a$ zu L M, und durch A eine Senkrechte A A′ a auf L M, so bestimmen diese beyden Geraden durch ihr Zusammentreffen in dem Punkt a, diesen als Vertikalprojektion des gegebenen Punkts.

Man hätte den Punkt a auch erhalten, wenn man durch A zu L M eine Parallele A K gezogen, und diese als die Horizontalprojektion einer Parallelen zu dem Risse S p betrachtet hätte. Diese Parallele schneidet die Horizontalebene in dem Punkt K, und man

*) Wir haben der Raumersparniß wegen die auf vorliegende Aufgabe sich beziehenden Konstruktionen noch auf die zur Aufgabe IV. Art. 33. gehörige Figur eingezeichnet; die Anfänger werden aber wohl thun, dieser Aufgabe eine besondere Zeichnung zu widmen.

erhält ihre Vertikalprojektion $a\,k$, wenn man K k senkrecht auf L M und $a\,k$ parallel zu S p zieht. Die Vertikale A A′ a begegnet der $a\,k$ in dem gesuchten Punkt a.

42. Es sey nun aufgegeben, die Ebene T S, S p, das heißt, die Ebene, deren Risse T S, S p sind, um ihren Riß S p auf der Vertikalebene zu drehen, um sie auf diese Ebene zurückzulegen.

Wenn eine Ebene sich um eine feste Gerade als Axe dreht, so beschreibt jeder Punkt der Ebene einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf die feste Gerade ist, und dessen Mittelpunkt in der nemlichen Geraden liegt.

Bey der Umdrehung der gegebenen Ebene um ihren Vertikalriß S p, bewegt sich folglich der in A, a projektirte Punkt in einer Ebene, welche senkrecht auf S p ist, und deren unbestimmte Vertikalprojektion man erhält, wenn man durch den Punkt a eine Gerade $a\,n\,a'$ senkrecht auf S p zieht; wenn daher die Ebene zurückgelegt ist, so wird der in Rede stehende Punkt irgendwo in einen Punkt dieser Geraden fallen. Es bleibt demnach nur noch der Halbmesser des durch denselben Punkt beschriebenen Kreises, das heißt, seine Entfernung von der Axe zu finden. Aber diese Entfernung ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, dessen Seiten $a\,n$ und A A′ sind. Errichtet man daher $a\,m$ senkrecht auf $a\,n$ und macht $a\,m$ = A A′ so ist die Hypothenuse $m\,n$ des Dreyecks $m\,a\,n$ gleich dieser Entfernung, und wenn man die Weite $m\,n$ von n nach a' trägt, so ist a' die Stellung des gegebenen Punkts, nachdem die Ebene, der er angehört, auf die Vertikalebene zurückgelegt ist.

Da der zurückgelegte Punkt immer in gleichem Abstande von jedem Punkte des Risses S p bleibt, so muß der Punkt a' auch an dem Endpunkt der Geraden $f\,a'$ = F A liegen; weil der Punkt f der Vertikalebene sich mit dem in A, a projektirten Punkt in einer nemlichen Horizontalen befindet, und daher A F gleich der wahren Entfernung dieser zwey Punkte ist. (Art. 19.)

Nehmen wir nun an, die gegebene Ebene drehe sich um ihren Riß T S auf der Horizontalebene, um sich auf diese aufzulegen, so wird der Punkt, dessen Projektionen A, a sind, einen Kreis beschreiben, dessen Ebene die Horizontalebene nach der Geraden A Z A″ senkrecht auf T S schneidet; man konstruirt den Punkt A″, in welchem der Umfang dieses Kreises durch die Horizontalebene geht, indem man aus K als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser K A″ = $k\,a$ einen Bogen beschreibt, welcher die Gerade A Z A″ in dem Punkt A″ schneidet; denn $a\,k$ ist die wahre Länge der in A K und $a\,k$ projektirten Geraden. A″ Z ist daher die Entfernung des gegebenen Punkts von dem Horizontalriß S T der gegebenen Ebene; diese Entfernung ist auch die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks $a\,A'\,Z'$, dessen eine Seite $a\,A'$ ist, und die andere $A'\,Z' = A\,Z$, und man hat folglich $a\,z' = A''\,Z$.

43. Die beyden Risse T S, S p der gegebenen Ebene schließen einen Winkel T S X' ein, welchen man konstruirt, indem man irgend einen Punkt x des Vertikalrisses S p um den Horizontalriß T S als Scharnier dreht. Dieser Punkt x auf die Horizontalebene zurückgelegt, fällt in der Senkrechten X X' auf das Scharnier T S, in einem Abstande Z X' von diesem Scharnier, gleich der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreyecks x' X Z, in welchem die Seite x' X gleich der Geraden X x ist.

Es ist einleuchtend, daß man mittelst der vorstehenden Konstruktionen über die Ebene, einen Punkt und eine Gerade dieser Ebene, die wahre Gestalt, den Flächeninhalt und den Umfang einer jeden ebenen Figur bestimmen könne, deren zwey Projektionen gegeben sind.

Zehnte Aufgabe.

Es sind zwey Gerade gegeben, mittelst ihrer Projektionen; man soll den Winkel konstruiren, den ihre Richtungen bilden, wenn die gegebenen Geraden sich schneiden?

44. Taf. V. Fig. 1. Es seyen A B, $a\,b$; A C, $a\,c$ die gegebenen Projektionen der Geraden; wir bemerken dabey: daß, da die zwey Geraden als sich schneidend angenommen sind, die Projektionen A, a ihres Durchschnittspunkts in einer Senkrechten A a auf die Projektionsaxe L M liegen müssen.

Nachdem man die Punkte D und E konstruirt hat, in denen die gegebenen Geraden die Horizontalebene durchschneiden, und die Gerade D E gezogen, so bildet diese mit den zwey Theilen der gegebenen Geraden, die zwischen ihrem Durchschnittspunkt und den Punkten D und E gefaßt sind, ein Dreyeck, in welchem der, der Seite D E gegenüberstehende Winkel der gesuchte ist. Wenn man die Ebene dieses Dreyecks um die Gerade D E als Scharnier dreht, um sie auf die Horizontalebene niederzulegen, so beschreibt der Scheitel des gesuchten Winkels einen Kreis, welcher die Horizontalebene in einem Punkte H der Geraden A F H schneidet, die durch den Punkt A senkrecht auf D E gezogen ist. Um den Punkt H zu bestimmen, konstruire man das rechtwinklige Dreyeck a G F', dessen Seite f' G gleich A F' oder gleich A F ist; man trage die Hypothenuse $a\,f'$ von F nach H, verbinde diesen Punkt mit D und E durch zwey Gerade, und man erhält das Dreyeck D H E, in welchem der Winkel H gleich dem Winkel ist, den die zwey gegebenen Geraden einschließen.

Wenn die gegebenen Geraden sich nicht schnitten, so würde man durch einen Punkt der Einen, eine Parallele zu der Andern führen und, wie oben, den Winkel dieser zwey Geraden konstruiren, welcher sodann der gesuchte wäre.

Eilfte Aufgabe.

Es sind zwey Ebenen gegeben, man soll den Winkel konstruiren, den sie unter sich bilden?

45. Auflösung. Nachdem man die Durchschnittslinie der beyden Ebenen konstruirt hat, führe man eine dritte Ebene senkrecht auf diesen Durchschnitt. Diese Ebene schneidet die beyden Gegebenen nach zwey Geraden; der Winkel, den diese unter sich bilden, ist gleich dem Winkel der beyden Ebenen.

Es seyen A B, A *b* (Taf. V. Fig. 2.) die Risse der ersten Ebene; C D, C *d* die Risse der Zweyten, und folglich E F, *e f* die Projektionen der Geraden, nach welcher sie sich schneiden. (Art. 34.) Nachdem man durch einen beliebigen Punkt I der Geraden E F eine Gerade G I H senkrecht auf dieselbe gezogen hat, betrachte man diese als den Horizontalriß, der zu konstruirenden dritten Ebene. Diese Ebene schneidet die Risse A B, B C in zwey Punkten G, H, und sie schneidet die Ebenen selbst nach zwey Geraden, welche mit der G H ein Dreyeck bilden, in welchem der, der horizontalen Seite G H gegenüberstehende Winkel der Gesuchte ist. Lassen wir die Ebene dieses Dreyecks sich um seine Grundlinie G H drehen, um sich auf die Horizontalebene zurückzulegen, so wird der Scheitel desselben sich in irgend einen Punkt der Geraden E F auflegen, weil diese Gerade E F zugleich die unbestimmte Projektion einer auf die Horizontale G H senkrechten Ebene ist. Es bleibt also nur noch die Höhe des Dreyecks, oder die Größe der Senkrechten, welche aus dem Punkt I auf den Durchschnitt der zwey Ebenen gefällt ist, zu finden.

Diese Senkrechte liegt aber in der, durch E F geführten Vertikalebene, und wenn man diese Ebene um die Vertikale F *f* dreht, um sie auf die vertikale Projektionsebene zurück zu legen, und hierauf F E von F nach E′ trägt, und F I von F nach *i*, so ist die Gerade E′ *f* die Größe desjenigen Stückes der Durchschnittslinie, welches zwischen den zwey Projektionsebenen gefaßt ist; fällt man nun aus dem Punkt *i* auf jene Gerade die Senkrechte *i k*, so ist dies die Höhe des verlangten Dreyecks. Wenn man daher endlich, *i k* von I nach K trägt und das Dreyeck G K H vollendet, so ist der Winkel bey K gleich dem von den beyden Ebenen gebildeten Winkel.

46. Wenn der Winkel bestimmt werden sollte, den eine gegebene Ebene mit einer Projektionsebene macht, so wird in diesem besondern Fall die Anwendung der so eben vorgetragenen Methode weit einfacher.

Nehmen wir an, es solle der Winkel konstruirt werden, den die, durch ihre Risse A B, A b gegebene Ebene mit der vertikalen Projektionsebene macht. Durch einen Punkt P des Vertikalrisses A b errichte man eine Senkrechte P R auf diesen Riß, welche die Projektionsaxe in den Punkt R schneidet, und man betrachte sie als den Vertikalriß einer Ebene, welche senkrecht auf die vertikale Projektionsebene ist. Der Horizontalriß dieser Ebene wird daher die auf L M senkrechte Gerade R Q seyn. Diese Gerade schneidet den Horizontalriß A B in einen Punkt Q. Es folgt hieraus, daß die auf A b senkrechte Ebene die Gegebene nach einer Geraden schneide, welche mit den zwey Geraden P R, R Q ein in R rechtwinkliges Dreyeck einschließt, dessen Seite P R und R Q sind. Man konstruire mittelst dieser Seiten das Dreyeck P R q oder P′ R Q, und der Winkel bey P oder P′ ist der Gesuchte.

Auf gleiche Art würde man den Winkel der Horizontalebene und der gegebenen Ebene bestimmen.

Zwölfte Aufgabe.

Es ist eine Gerade und eine Ebene gegeben; man soll den Winkel konstruiren, unter welchem die Gerade auf die Ebene trifft?

47. Auflösung. Wenn man aus einem Punkt der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die Ebene fällt, so ist der Winkel, den die Senkrechte mit der Geraden bildet, das Complement des verlangten Winkels, und es ist zur Lösung der Aufgabe hinreichend diesen Winkel zu konstruiren.

Nun aber, wenn man auf jeder Projektion der Geraden einen Punkt nimmt, so daß diese beyden Punkte in einer nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen, und wenn man durch jeden derselben eine Senkrechte auf den entsprechenden Riß der Ebene fällt, so hat man beyde Projektionen der zweyten Geraden. Die Aufgabe ist also darauf zurück gebracht, den Winkel zu konstruiren, den zwey sich schneidende Geraden bilden: wir überlassen dem Leser die Konstruktion nach Art. 44.

48. Wenn man die Karte eines Landes aufzunehmen beabsichtigt, so nimmt man gewöhnlich die merkwürdigsten Punkte als durch gerade Linien unter sich verbunden an; diese Geraden bilden Dreyecke, und es handelt sich sodann darum, diese Dreyecke mittelst eines kleineren Maastabes auf die Karte überzutragen, und sie unter sich eben so zu ordnen, wie diejenigen, die sie vorstellen. Die auf dem Terrain vorzunehmenden Arbeiten bestehen hauptsächlich in der Messung der Winkel dieser Dreyecke; und damit diese Winkel unmmittelbar auf die Karte übergetragen werden können, so muß jeder von ihnen in einer Horizontalebene liegen, welche parallel zu jener der Karte ist. Hat aber die Ebene des Win-

kels eine Neigung gegen den Horizont, so wird nicht mehr der Winkel selbst übergetragen, sondern seine Horizontalprojektion; und man kann diese Projektion immer finden, wenn man außer dem Winkel selbst auch noch die Winkel gemessen hat, die seine beyden Schenkel mit dem Horizonte bilden, was Veranlassung zu folgender Operation giebt, die unter dem Namen der Reduktion eines Winkels auf dem Horizont bekannt ist.

Dreyzehnte Aufgabe.

Es ist der Winkel zweyer Geraden gegeben, nebst den Winkeln, welche jede von ihnen mit der Horizontalebene bildet; man soll die Horizontalprojektion des Ersten konstruiren?

49. Auflösung. Es sey A, (Fig. 3. Taf. V.) die Horizontalprojektion des Scheitels des gegebenen Winkels, und A B die Horizontalprojektion eines seiner Schenkel, so daß demnach die Andere zu konstruiren bleibt. Man denke sich die vertikale Projektionsebene, durch A B gehend, und nachdem man durch den Punkt A eine unbestimmte Vertikale A *a* gezogen; nehme man auf derselben einen beliebigen Punkt *d*, den man als Vertikalprojektion des Scheitels des beobachteten Winkels betrachte. Ist dies geschehen, so ziehe man durch den Punkt *d*, die Gerade *d* B, welche mit der Horizontalen einen Winkel *d* B A einschließt, gleich jenem, welchen der erste Schenkel mit dem Horizonte bildet, und man findet B als den Begegnungspunkt dieses Schenkels mit der Horizontalebene. Wenn man ebenso, durch den Punkt *d* die Gerade *d* C zieht, welche die Horizontale unter einem Winkel *d* C A trifft, gleich dem Winkel, den die zweyte Gerade mit dem Horizonte macht, und wenn man aus A als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser A C einen unbestimmten Kreisbogen C E F beschreibt, so kann die zweyte Gerade die Horizontalebene nur in einen Punkt dieses Boges C E F treffen. Es handelt sich daher nur noch die Entfernung dieses Punkts von irgend einem Andern, wie B zu finden.

Nun aber liegt diese letzte Entfernung in der Ebene des beobachteten Winkels; zieht man daher die Gerade *d* D so, daß der Winkel D *d* B gleich ist dem Beobachteten, und trägt *d* C von *d* nach D, so ist die Gerade D B gleich dieser Entfernung.

Wenn man daher aus B, als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser gleich B D einen Kreisbogen beschreibt, so ist der Punkt E, wo dieser den ersten Bogen C E F schneidet, der Begegnungspunkt des zweyten Schenkels mit der Horizontalebene; die Gerade A E ist daher die Horizontalprojektion dieses Schenkels, und der Winkel B A E ist die Horizontalprojektion des beobachteten Winkels.

Vierzehnte Aufgabe.

Es sind zwey Gerade im Raume gegeben; man soll diejenige Gerade konstruiren, welche auf beyden senkrecht ist, und welche ihre kürzeste Entfernung mißt?

50. Auflösung. Nachdem man durch einen beliebigen Punkt der ersten Geraden eine Parallele zu der Zweyten, und durch diese Beyden eine Ebene geführt hat, welche sonach parallel zu der zweyten Geraden ist, projektire man die zweyte Gerade auf diese Ebene. Diese Projektion der zweyten Geraden wird die erste Gerade in einen Punkt schneiden, durch welchen man eine Senkrechte auf die, zu der Zweyten parallele Ebene errichte. Diese Senkrechte ist die Gesuchte und auf ihr wird die kürzeste Entfernung der gegebenen Geraden gemessen; denn sie geht durch einen Punkt der ersten Geraden und ist senkrecht auf eine Ebene, in welcher diese Gerade liegt; sie ist ferner in der projektirenden Ebene der zweyten Geraden auf die Ebene, in welcher die Erste liegt, enthalten; sie schneidet daher die zweyte Gerade und ist senkrecht auf sie, weil sie senkrecht auf eine Ebene ist, welche eine Parallele zu dieser zweyten Geraden enthält.

Es seyen A B, *a b* (Taf. VI. Fig. 1.) die Projektionen der ersten Geraden; C D, *c d* die Projektionen der Zweyten.

Die erste Gerade trifft die Vertikalebene in einem Punkt *b*, dessen Horizontalprojektion B ist; wenn man durch *b*, eine Parallele *b e* zu *d c* zieht, und durch B eine Parallele B E zu D C, so hat man die Projektionen der Parallelen zu der zweyten Geraden; diese Parallele trifft die Horizontalebene in dem Punkt E, die erste Gerade trifft dieselbe Ebene in A; die Gerade A E, welche diese Punkte verbindet, ist daher der Horizonralriß der Ebene, welche durch die erste Gerade parallel zu der Zweyten geführt ist. Der Vertikalriß derselben Ebene ist F *b*; der Punkt F liegt auf der Projektionsaxe L M und in der Verlängerung der Geraden A E. Wir wollen diese Ebene mit *L* bezeichnen. Die zweyte Gerade schneidet die Horizontalebene in einem Punkt C, welcher sich in *c* auf die Vertikalebene projektirt. Die Projektion dieses Punkts auf der Ebene *L* liegt in der Senkrechten auf die Ebene *L*, deren Projektionen C G, *c* K wechselsweise senkrecht auf die Risse A F, F *b* der Ebene *L* sind. Nun aber schneidet die durch C G H geführte Vertikalebene, die Ebene *L* nach einer Geraden deren Vertikalprojektion *g h* ist, und folglich ist der Punkt *i*, der Durchschnitt der Geraden *g h*, c K, die Vertikalprojektion der Projektion des Punkts C auf der Ebene *L*, und der Punkt I ist die Horizontalprojektion desselben. Da nun die zweyte gegebene Gerade, welcher der Punkt C angehört, parallel zu der Ebene *L* ist, so projektirt sie sich auf diese Ebene nach einer Geraden, welche parallel zu ihr selbst ist; diese Gerade hat daher zu Projektionen die Geraden I N, *i n*, welche wechselsweise parallel zu C D und $c\,d$ sind, und sie begegnet der ersten Geraden in einem Punkt, der sich nach N und n projektirt.

Dieser Punkt, der Durchschnitt der ersten Geraden und der Ebene, welche die zweyte Gerade auf die Ebene L projektirt, gehört der gesuchten Senkrechten auf die zwey gegebenen Geraden an.

Nun aber ist diese Senkrechte auf die zwey Geraden auch senkrecht auf die Ebene L; sie hat daher zu Projektionen die senkrechten Geraden P Q N, $p\,n$ R, auf die Risse A F, F b der Ebene L. Das zwischen den zwey gegebenen Geraden gefaßte Stück dieser Senkrechten hat zu Projektionen die Geraden P N, $p\,n$; man konstruire dessen Länge, und man hat alsdann die kürzeste Entfernung der zwey gegebenen Geraden nach Größe und Richtung.

Wenn man blos die absolute Größe dieser Entfernung verlangte, so würde die Konstruktion weit einfacher. In der That, nachdem man die Risse A E F, F b der Ebene L, welche durch die erste Gerade, parallel zu der Zweyten geführt ist, bestimmt hat, hätte man durch den Punkt C, in welchen die zweyte Gerade die Horizontalebene trifft, eine Vertikalebene C G senkrecht auf den Riß A F der Ebene L führen können. Diese Vertikalebene würde die Ebene L nach einer Geraden schneiden, deren Länge die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks G H h' wäre, dessen Seite H h' gleich der Vertikalen H h ist. Fällt man nun aus dem Punkt C die Senkrechte C I′ auf diese Hypothenuse G h', so wäre C I′ die Länge der kürzesten Entfernung der zwey Geraden.

51. Die folgende Konstruktion, kann der Vorstehenden als Bewährungsmittel dienen: man ziehe die Senkrechte I′ I auf G C H, und die Senkrechte I i auf die Projektionsaxe L M. Diese Senkrechte I i schneidet die Gerade $h\,g$ in dem Punkt i, wodurch die zwey Projektionen des Punkts I, i bestimmt werden. Durch I und i ziehe man I N und $i\,n$ parallel zu C D und $c\,d$, und man hat die Projektionen der Parallelen zu der zweyten gegebenen Geraden; diese Parallele begegnet der ersten Geraden in einem Punkt, dessen Projektionen N und n sind, und welcher die Projektionen N P, $n\,p$ der Senkrechten auf die zwey gegebenen Geraden bestimmt. *)

*) Wir werden im zweyten Buche (Art. 95) noch eine Auflösung der vorstehenden Aufgabe vortragen, welche auf die Betrachtung der tangirenden Ebene zu einer Cylinderfläche gegründet ist.

Die vierzehn vorstehenden Beyspiele, ob sie gleich nicht alle Hülfsmittel der Projektionsmethode zeigen können, umfassen doch alle Grundsätze, auf denen die Lösung der Aufgaben über die Ebene und gerade Linie beruht; so daß jeder sich ergebende Fall nur die Wiederholung von einer oder mehreren der angeführten Konstruktionen erfodert.

Es ist unerläßlich, daß die Anfänger, um sich mit diesen Konstruktionen vollkommen vertraut zu machen, dieselben noch an manigfachen Beyspielen üben, weßhalb wir einige hieher setzen, wobey es ihrer Geschicklichkeit überlassen ist, durch eine passende Wahl der Projektionsebenen, die einfachsten und expeditivsten Mittel anzuwenden.

1) Man soll die Horizontal- und Vertikalprojektion eines regulären Dodekaeders konstruiren, und den Schnitt dieses Körpers, durch eine ihrer Stellung nach gegebene Ebene?

2) Es sind im Raume zwey Gerade gegeben, die sich nicht begegnen, man soll die Stellung einer dritten Geraden bestimmen, welche parallel zu einer gegebenen Richtung ist, und zu gleicher Zeit die beyden Ersten schneidet?

3) Auf einer Ebene ist die Projektion eines bekannten Winkels gegeben, nebst der Stellung eines Schenkels desselben in Bezug auf die nemliche Ebene; man soll die Stellung des zweyten Schenkels finden?

4) Es ist eine Gerade, und eine mit ihr nicht parallele Ebene gegeben, man soll durch die Gerade eine zweyte Ebene führen, welche mit der Gegebenen einen bestimmten Winkel bildet.

5) Man soll durch einen gegebenen Punkt des Raumes eine Gerade führen, welche jede der beyden Projektionsebenen unter bestimmten Winkeln schneidet.

6) Durch einen gegebenen Punkt des Raumes, soll eine Ebene gelegt werden, welche mit beyden Projektionsebenen bestimmte Winkel einschließt.