

Regel giebt, wie eine Aufgabe in Gleichung anzusetzen sey. In jedem einzelnen Falle hängt der Gang davon ab, auf welche Art das gegenseitige Verhalten zwischen den gegebenen Größen und den Unbekannten ausgedrückt sey; und nur durch veränderte Beispiele kann man die Anfänger gewöhnen, dieses Verhalten aufzufassen und in Gleichungen niederzuschreiben. Eben so in der darstellenden Geometrie; nur durch zahlreiche Beispiele und durch den Gebrauch von Zirkel und Lineal kann man mit den Konstruktionen vertraut werden, und sich gewöhnen, in jedem einzelnen Falle die einfachste und zugleich zierlichste Methode zu wählen. Aber auch, eben so wie es in der Analysis, sobald eine Aufgabe in Gleichung angesetzt ist, Verfahrensarten giebt, wie diese Gleichungen behandelt, und wie daraus die Werthe einer jeden unbekanntem Größe abgeleitet werden können, eben so giebt es in der darstellenden Geometrie allgemeine Methoden, um sobald die Projektionen gemacht sind, alles das zu konstruiren, was aus der Gestalt und der gegenseitigen Stellung der Körper entspringt.

Nicht ohne Grund vergleichen wir hier die darstellende Geometrie mit der Algebra, denn diese zwey Wissenschaften stehen in der innigsten gegenseitigen Beziehung. Es giebt keine Konstruktion der darstellenden Geometrie, welche nicht in die Analysis übersetzt werden könnte, und jede analytische Operation kann, sobald nicht mehr als drey unbekanntem Größen in der Aufgabe vorkommen, als die Urkunde eines geometrischen Schauspiels betrachtet werden.

Es wäre zu wünschen, daß diese beyden Wissenschaften gemeinsam kultivirt würden: die darstellende Geometrie brächte in die verwickeltsten analytischen Operationen die Evidenz, die sie charakterisirt; die Analysis würde dagegen der Geometrie die ihr eigenthümliche Allgemeinheit mittheilen.

23. Es wäre nun hier der Ort, die Darstellungsart der durch krumme Flächen begränzten Körper vorzutragen; wir haben es aber für zweckdienlicher gehalten, diesen Gegenstand erst im nächstfolgenden Buche abzuhandeln.

Von der Ausführung der Zeichnungen.

24. Eine Zeichnung der darstellenden Geometrie ist das Bild der Linien und Flächen, welche man kombinirt hat, um zur Lösung einer Aufgabe zu gelangen.

Unter den Linien, welche diese verschiedenen Größen vorstellen, unterscheiden wir zwey Gattungen: 1tens diejenigen, welche die Projektionen der gegebenen und der gesuchten Größen der Aufgabe vorstellen, und 2tens jene Linien, welche die gemachten graphischen Operationen angeben, um die gesuchten Projektionen zu erhalten. Um den Projektionszeichnungen den möglichsten Grad von Verständlichkeit zu geben, ist es durchaus

erforderlich, daß man die genannten Gattungen von Linien, durch eine besondere Art dieselben zu ziehen, unter einander auszeichne. Die folgenden Erörterungen werden uns auf geeignete Annahmen, in dieser Beziehung, leiten.

25. Die Projektionsaxe theilt jede Projektionsebene in zwey Theile, nemlich: die Vertikalebene in einen obern und einen untern; und die Horizontalebene in einen vordern und einen hintern Theil; und über jeden von diesen Theilen können die Projektionen einer geometrischen Größe sich erstrecken. Durch die Umdrehung der Vertikalebene um die Projektionsaxe fallen aber die beyden Ebenen in eine zusammen und es wäre nun, ohne besondere Merkmale nicht mehr möglich zu erkennen, welcher Projektion irgend eine Linie angehöre.

Stellen wir uns nun die Projektionsebenen als wirkliche, physische Ebenen vor, zum Beispiel als äußerst dünne und unbiegsame Tafeln, so würde, nach der Umdrehung der Vertikalebene, der obere Theil derselben auf den hinteren Theil der Horizontalebene fallen und diesen bedecken, der untere Theil der Vertikalebene würde hingegen unter den vorderen Theil der Horizontalebene zu liegen kommen, und von diesem bedeckt werden. Wir hätten sodann auf jeder Projektionsebene einen Theil der Projektionen, welcher gesehen, und einen Theil, welcher bedeckt wäre; und wir werden sogleich den Nutzen einer solchen, übrigens ganz natürlichen Vorstellungsart einsehen.

Wenn man sich nun so die projektirten Größen, als wirklich im Raume vorhanden denkt, und von der nemlichen Beschaffenheit, wie wir so eben die Projektionsebenen angenommen haben, so kann man, nach dieser Vorstellungsart, jede Projektion als eine Abbildung der projektirten Gegenstände betrachten, wobey man sich nemlich das Auge unendlich weit von der Projektionsebene entfernt denken muß, und zwar in einer Senkrechten auf diese Ebene, so daß die projektirenden Linien als in unendlicher Entfernung zusammenlaufende Gesichtsstrahlen angesehen werden können. Die vorgestellten Gegenstände können sodann, entweder durch die Projektionsebenen, indem sie diese durchschneiden, oder durch sich selbst, wechselsweise bedeckt werden und bestünden daher ebenfalls aus gesehenen und bedeckten Theilen.

Nehmen wir dieses an, so folgt daraus: erstens, daß jede Projektion ihren besonderen Gesichtspunkt habe, und daß folglich gewisse Theile der vorgestellten Gegenstände in einer Projektion gesehen seyn können, während sie auf der Andern bedeckt erscheinen. Zweytens, daß der Gesichtspunkt für die Horizontalprojektion im Unendlichen über der Horizontalebene sey, und daß die entsprechenden Gesichtsstrahlen, für diesen Punkt, vertikal sind. Drittens, daß der Gesichtspunkt der Vertikalprojektion im Unendlichen vor der

Vertikalebene sey, und daß die von diesem Punkte ausgehenden Gesichtsstrahlen horizontal sind und senkrecht auf die Vertikalebene.

Setzen wir sofort fest: 1tens die gegebenen Größen einer Aufgabe und die Gesuchten, überhaupt die Wichtigsten sollen als wirklich im Raume vorhanden betrachtet, und auf jeder Projektion sollen die gesehenen und die bedeckten Theile derselben unterschieden werden. 2tens diejenigen Größen, welche nicht zu den genannten gehören, sondern bloß zur Konstruktion dienen, sollen als nicht wirklich vorhanden angenommen werden und an ihren Projektionen daher keine gesehenen oder nicht gesehenen Theile bemerkt werden.

26. Auf diese Annahmen haben wir folgende Regeln gegründet, welche in allen Zeichnungen beobachtet sind.

Erstens. Die Projektionen derjenigen Gegenstände, welche wirklich im Raume vorhanden angenommen sind, werden durch volle Linien (A B. Fig. 4. Taf. I.) angegeben.

Zweitens. Die Projektionen jener Theile der genannten Gegenstände, welche entweder durch eine Projektionsebene, oder durch andere Gegenstände der nemlichen Gattung bedeckt erscheinen, und welche folglich nicht gesehen werden können, außer wenn man diese letzteren durchsichtig annimmt, werden durch punktirte Linien bezeichnet. (A' B'. Fig. 4. Taf. I.)

Drittens. Alle bloß zur Konstruktion dienenden Gegenstände, werden mit gestrichelten Linien angegeben. (A'' B''. Fig. 4. Taf. I.)

Viertens. Solche Gegenstände, die zwar als zur Konstruktion dienend betrachtet sind, die aber irgend einer besondern Rücksicht wegen von den gewöhnlichen Konstruktionen ausgezeichnet werden sollen, werden wir mit gemischten Linien (A''' B''' Fig. 4. Taf. I.) bezeichnen.

27. Wenn eine Projektionszeichnung bloß die geometrische Darstellung eines Körpers zum Zweck hat, so pflegt man diesen Annahmen noch die folgende hinzuzufügen: Man stellt sich die projektirten Gegenstände durch Sonnenstrahlen beleuchtet vor, die unter einem Winkel von 45° geneigt, von der Linken gegen die Rechte einfallen, und man bezeichnet diejenigen Linien, welche die Konturen der im Schatten liegenden Seiten bilden, durch starke volle Striche und diejenigen Konturen, welche bloß beleuchtete Seiten von einander trennen durch feinere volle Striche.

Diese Unterscheidung, welche die Deutlichkeit der Darstellung sehr erhöht, kommt aber den Zeichnungen der reinen Geometrie nicht zu, und wir haben sie deshalb nirgends angewendet.

28. Als Beyspiel der Anwendung dieser Regeln, wollen wir einige Figuren examiniren, deren Gegenstand wir als bekannt annehmen dürfen.

Taf. II. Fig. 1. $L M$ stellt die Projektionsaxe vor, als eine wichtige Linie einer jeden Aufgabe haben wir sie hier, so wie in allen folgenden Blättern durch eine bemerkbare volle Linie angegeben. $A B$, $a b$ die Projektionen einer Geraden sind ebenfalls voll ausgezogen, und ebenso die Gerade $a' b$. (Art. 19.) Die projektirenden Geraden $A a$, $B b$, so wie alle übrigen Linien der Figur sind, als Konstruktionslinien mit gestrichelten Linien bezeichnet.

Fig. 2. Die Projektionsaxe $L M$; die Horizontalprojektion $A B$, und die Vertikalprojektion $a b$ einer Geraden sind voll ausgezogen. Das Stück $B D$ der Geraden $A B D$, welches auf den hintern Theil der Horizontalebene fällt erscheint durch die Vertikalebene bedeckt und ist deshalb punktirt. In der Vertikalprojektion ist b der Punkt, in welchem die projektirte Gerade die Vertikalebene durchschneidet, dieser Punkt b trennt daher das gesehene Stück der Geraden von dem bedeckten, die Projektion $b d$ dieses letztern ist deshalb punktirt. Alles übrige sind Konstruktionslinien.

Fig. 3. $A B$, $a b$; $E F$, $e f$ sind die Projektionen zweyer Geraden: die Figur zeigt übrigens nicht weiter Bemerkenswerthes.

Fig. 4. $A B$ ist der Horizontalriß und $C B$ der Vertikalriß einer Ebene. Das oberhalb der Projektionsaxe $L M$, gelegene Stück des Horizontalrisses $A B$ fällt auf den hintern Theil der Horizontalebene, und das unterhalb der $L M$ gelegene Stück des Vertikalrisses $B C$ liegt auf dem untern Theil der Vertikalebene; beyde sind deshalb punktirt. $D E$, $E F$ sind die Risse einer zweyten, mit der ersten parallelen Ebene. Die Stellung dieser Risse zeigt deutlich, daß die zweyte Ebene in jeder Projektion durch die erste bedeckt erscheine; daher sind die Risse derselben durchaus punktirt.

Taf. III. Fig. 3. $F G$, $G c$ sind die Risse einer Ebene, und $A B$, $a b$ die Projektionen einer Geraden; diese Gerade schneidet die Ebene in einem Punkte, dessen Projektionen A , a sind; sie kann daher in beyden Projektionen nur bis zu diesem Punkte gesehen seyn, und deshalb sind die Projektionen $A B$, $a b$ dieses Stückes voll ausgezogen, die Projektionen $A C$, $a f$ des nicht gesehenen Stückes dagegen punktirt.

29. Diese Beyspiele zeigen auf hinreichende Art, wie die (Art. 26.) aufgestellten Grundsätze in Rücksicht auf die Ebene und die gerade Linie anzuwenden seyen. Sobald man eine richtige Vorstellung hat von der Lage der Ebenen und Linien und von ihren gegenseitigen Durchschnitten, so kann die Bestimmung ihrer gesehenen und bedeckten Theile keine Schwierigkeit darbieten.

Nicht ganz so einfach ist diese Aufgabe in Bezug auf die krummen Flächen, und hier kann die Voraussetzung, daß eine Fläche wirklich im Raume existire, und die daraus fließende Nothwendigkeit ihre gesehenen und bedeckten Theile aufzusuchen, zu Erörterungen

veranlassen, die dem eigentlichen Gegenstande der Aufgabe zu fremd wären. Es bleibt in dem Falle der, durch Uebung in den Projektionszeichnungen zu erwerbenden Gewandtheit des Arbeitenden überlassen, diese Schwierigkeiten zu umgehen, ohne der erforderlichen Deutlichkeit der Darstellung Eintrag zu thun. Wir werden (Art. 116. 117.) nochmals auf diesen Gegenstand zurückkommen und einige einfache Regeln über die Ausführung der Zeichnungen hinsichtlich der krummen Flächen geben.

Zweytes Kapitel.

Lösung verschiedener Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene.

Erste Aufgabe.

Es ist eine Gerade gegeben, mittelst ihrer beyden Projektionen; man soll die Punkte konstruiren, in denen sie die Projektionsebenen durchschneidet?

30. Auflösung. Es sey $A B D$ (Taf. II. Fig. 2.) die Horizontalprojektion, und $a b d$ die Vertikalprojektion der gegebenen Geraden.

Der Punkt, in welchem diese Gerade die vertikale Projektionsebene durchschneidet, muß als Horizontalprojektion einen Punkt der Projektionsaxe $L M$ haben; (Art. 18.) er muß aber auch horizontal irgendwo in der Geraden $A B D$ projektirt seyn; der Punkt B , der einzige den die Geraden $L M$ und $A B D$ gemein haben, ist daher die Horizontalprojektion dieses Durchschnittspunktes. Da nun die beyden Projektionen eines Punktes im Raume in einer nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen, so muß die aus B auf $L M$ errichtete Senkrechte $B b$ den fraglichen Punkt enthalten; dieser Punkt muß aber außerdem auch in der Vertikalprojektion $a b d$ enthalten seyn; daher ist der Begegnungspunkt b der zwey Geraden $B b$ und $a b d$ derjenige, in welchem die gegebene Gerade die Vertikalebene durchschneidet.

Um den Punkt D zu bestimmen, in welchem dieselbe Gerade die horizontale Projektionsebene durchschneidet, wendet man aus leicht einzusehendem Grunde die ganz ähnliche Konstruktion an: man verlängert die Vertikalprojektion $a b d$ der gegebenen Geraden bis sie die $L M$ in einem Punkt d trifft; die aus diesem Punkt errichtete Senkrechte $d D$ auf $L M$ schneidet die Horizontalprojektion $A B D$ der gegebenen Geraden in dem gesuchten Punkt D .