seyn als Einer von den acht Bestimmten, unter welchen man ihn nicht anders, als mittelst einiger besonderen Bedingungen auszeichnen kann.

Wenn man zum Beyspiel, bey der Angabe des Abstandes von der ersten Ebene A, zugleich ausdrückt, auf welche Seite, in Bezug auf diese Ebene, der Abstand genommen werden müsse, so bleiben, statt zwey, zu der Ebene A parallelen Ebenen, nur Eine zu betrachten, jene nemlich, welche, in Bezug auf dieselbe Ebene, auf der nemlichen Seite liegt, auf welcher die Entfernung gemessen werden soll. Wenn man eben so angiebt, auf welcher Seite, in Betreff der zweyten Ebene, die Entfernung genommen werden soll, so schließt man die Betrachtung Einer der zwey Ebenen aus, die zu der Zweyten parallel sind, und es giebt nicht mehr als eine Ebene, deren Punkte der zweyten Bedingung entsprächen. Vereinigt man diese Bedingungen, so kann der Punkt nicht mehr in den vier geraden Durchschnittslinien der vier, je zwey und zwey parallelen Ebenen liegen, sondern nur in dem Durchschnitte zweyer Ebenen; das heißt in einer, der Stellung nach bekannten geraden Linie. Giebt man endlich noch an, auf welcher Seite der Punkt gelegen seyn muß, in Bezug auf die dritte Ebene, so bleibt von den zwey, zu der dritten parallelen Ebenen, nur eine, deren sämmtliche Punkte die letzte Bedingung erfüllen; und um zu gleicher Zeit allen Bedingungen Genüge zu thun, muß der Punkt sich in dem Durchnitt dieser dritten Ebene mit der einzigen Geraden, der Durchschnittslinie der zwey Ersten befinden; Er kann daher mit keinem Andern im Raume mehr verwechselt werden, und er ist folglich durchaus bestimmt.

6. Es ist sonach einleuchtend, daß die Ebene, obwohl sie in Rücksicht ihrer Abmessungen, kein so einfacher Gegenstand ist, als die gerade Linie, die nur eine Abmessung hat, und als der Punkt, der gar keine hat, dennoch mehr Bequemlichkeit zur Bestimmung eines Punkts im Raume darbiethe als der Punkt und die gerade *Linie*. Dieses Verfahren gebraucht man auch gemeinlich bei Anwendung der Algebra auf die Geometrie, wo man, um die Stellung eines Punktes zu finden, gewöhnlich dessen Entfernungen von drey Ebenen von bekannter Stellung sucht.

Aber in der darstellenden Geometrie, welche schon seit viel längerer Zeit, von weit mehr Menschen in Anwendung gebracht wurde, und von Menschen, deren Zeit kostbar war, haben sich die Verfahrungsarten noch mehr vereinfacht, und, statt der Betrachtung von drey Ebenen ist man, mittelst der Projektionen dahin gelangt, unumgänglich nicht mehr als zwey nöthig zu haben.

## Methode der Projektionen.

7. Man nennt Projektion eines Punktes auf eine Ebene, den Fuß der Geraden, welche von dem Punkte senkrecht auf die Ebene gefällt ist.

Dieses angenommen, wenn man zwey Ebenen hat, von bekannter Stellung im Raume, und wenn man auf jeder von diesen Ebenen die Projektion des Punktes giebt, dessen Stellung man erklären will, so ist dieser Punkt vollkommen bestimmt.

In der That, wenn man sich durch die Projektion auf der ersten Ebene, eine Senkrechte auf diese Ebene denkt, so ist einleuchtend, daß dieselbe durch den zu bestimmenden Punkt gehen werde; eben so, wenn man sich durch seine Projektion auf der zweyten Ebene, eine Senkrechte auf diese Ebene denkt, so muß diese gleichfalls durch jenen Punkt gehen. Dieser Punkt liegt demnach zu gleicher Zeit in zwey geraden Linien, von bekannter Stellung im Raume, er kann daher kein anderer seyn, als der einzige Punkt ihres Durchschnitts, und er ist sonach vollkommen bestimmt.

8. Wir nennen die Ebenen, auf welche man die Punkte des Raumes projektirt, Projektionsebenen, den Senkrechten, mittelst welcher jene Punkte auf die Ebenen projektirt werden, geben wir die Benennung projektirende Linien.

9. Taf. I. Fig. 1. Es sey A B C D E . . . eine auf beliebige Art im Raume gelegene Linie; wenn man aus jedem Punkte dieser Linie eine Senkrechte auf eine Ebene M N P Q fällt, so bilden die Fußpunkte $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, . . . , der Senkrechten auf dieser Ebene, eine neue Linie $a\ b\ c\ d\ e$, welche man die Projektion der Linie A B C D E auf der Ebene M N P Q nennt.

10. Taf. I. Fig. 2. Ist die gegebene Linie eine Gerade A B, so liegen die Senkrechten, welche aus ihren sämmtlichen Punkten auf die Projektionsebene M N P Q gefällt sind, in der Ebene, welcher durch die A B senkrecht auf die Projektionsebene geführt ist, die Fußpunkte jener Senkrechten fallen daher in den gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser beyden Ebenen, welcher wie bekannt eine gerade Linie bildet; die Projektion einer Geraden ist folglich ebenfalls eine Gerade.

Wenn man daher nur die Projektionen $a$, $b$ von zwey Punkten A, B, einer Geraden A B (Fig. 2.) hat, so ist die durch diese Punkte gezogene Gerade $a\ b$ die Projektion der Geraden A B.

Es folgt hieraus, daß, wenn die gegebene Gerade selbst senkrecht auf die Projektionsebene wäre, ihre Projektion sich auf einen einzigen Punkt reduzire, auf jenen nemlich, in welchem sie selbst die Projektionsebene trifft.

Die Ebene, welche von den projektirenden Geraden, sämmtlicher Punkte einer geraden Linie gebildet wird, werden wir die projektirende Ebene der Geraden nennen.

11. Taf. I. Fig. 3. Sobald auf zwey nicht parallelen Ebenen L M N O, M N P Q die Projektionen $a\ b$, $a'\ b'$ einer nemlichen unbegrenzten Geraden A B gegeben sind, so ist diese Gerade bestimmt; denn wenn man sich durch die Projektion

*a b* eine Ebene senkrecht auf die Projektionsebene L M N O denkt, so muß diese Ebene, deren Stellung bekannt ist, nothwendigerweise durch die Gerade A B gehen; eben so, wenn man sich durch die andere Projektion *a′ b′* eine senkrechte Ebene auf die L M P Q denkt, so muß diese Ebene, deren Stellung bekannt ist, durch die Gerade A B gehen; die Stellung dieser Geraden, welche sich zu gleicher Zeit in zwey bekannten Ebenen befindet, und folglich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte, ist daher ganz bestimmt.

12. Aus welcher Anzahl von Seiten ein Polygon zusammengesetzt seyn mag, welche Seiten übrigens in der nemlichen, oder in verschiedenen Ebenen enthalten seyn können, so ist durch zwey Projektionen dieses Polygons auf zwey nicht parallelen Ebenen, jede Seite desselben bestimmt, und folglich ist es auch das Polygon selbst nach Gestalt und Stellung im Raume.

Um von dieser Gestalt und Stellung aus den beyden Projektionen eine deutliche Vorstellung abzuleiten, betrachte man jede dieser Projektionen als die Basis eines geraden Prismas, das im Raume an dem projektirten Polygon beendigt ist, so wird dieses den gegenseitigen Durchschnitt jener zwey Prismen bilden, die ihrerseits selbst nach Form und Stellung gänzlich bekannt sind.

13. Irgend eine krumme Linie (Kurve) besteht aus einer Reihe von Punkten des Raumes, die nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit aufeinander folgen. Nun aber ist die Stellung eines jeden Punktes bestimmt, wenn man die Projektionen desselben auf zwey verschiedenen Ebenen kennt. (Art. 7.); es folgt hieraus unmittelbar, daß die Form und Stellung einer jeden krummen Linie bestimmt ist, durch die Projektionen dieser Linie auf zwey nicht parallelen Ebenen

Betrachten wir (Fig. 1.) alle projektirenden Geraden A *a*, B *b*, C *c*, D *d* . . . ꝛc., die aus den sämmtlichen Punkten der krummen Linie A B C D auf die Ebene M N P Q gefällt sind; so bilden diese offenbar eine eigenthümliche krumme Fläche, welche durch die Krumme A B C D und durch ihre Projektion *a b c d* auf der Ebene M N P Q geht. Man kann daher die Projektion einer krummen Linie ansehen, als den Durchschnitt der Projektionsebene mit einer Fläche, welche aus den projektirenden Geraden aller Punkte der vorgelegten Krummen gebildet wird, und die man aus diesem Grunde die projektirende Fläche jener Krummen nennt. *)

Hat man zwey verschiedene Projektionen einer krummen Linie, so sind mit diesen zugleich auch zwey projektirende Flächen der Krummen nach Gestalt und Stellung gegeben,

*) Wir werden im zweyten Buche (Art. 58.) sehen, daß diese projektirenden Flächen der krummen Linien, zu dem Geschlechte der Cylinder gehören.

auf denen beyden die projektirte Krumme zu gleicher Zeit gelegen ist, und deren gegenseitigen Durchschnitt sie folglich bildet.

Wenn zufolge des Gesetzes, welches die Punkte einer Linie unter sich verbindet, diese Punkte in einer Ebene liegen, so nennt man die Linie einer ebene Krumme, im andern Fall heißt sie eine krumme Linie von doppelter Krümmung.

14. Alle bisher aufgestellten Sätze, über die Projektionen des Punkts, der geraden und der krummen Linie, sind durchaus unabhängig von der Stellung der Projektionsebenen; und sie haben gleichwohl ihre Gültigkeit, welchen Winkel auch diese zwey Ebenen unter sich bilden mögen. Wäre jedoch der, von beyden Projektionsebenen gebildete Winkel sehr stumpf, so würden die Winkel, den die auf ihnen senkrechten Geraden und Ebenen bilden sehr spitz, und in der Ausübung könnten kleine Fehler sehr bedeutende Irrungen in der Stellung der Punkte und Linien herbey führen. Um diese Unrichtigkeiten zu vermeiden, fügt man es immer so, daß die beyden Projektionsebenen rechtwinklig unter sich sind, wenn man anders nicht, irgend einer größeren Bequemlichkeit wegen, sich zu einer Aenderung hierin bestimmen läßt. Da überdem der größte Theil der Künstler, welche die Projektionsmethode anwenden, sehr vertraut sind mit der Stellung einer Horizontalebene und mit der Richtung des Senkels, so haben sie die eine der beyden Projektionsebenen als horizontal angenommen und die andere als vertikal.

Wir werden der Kürze wegen, in Zukunft die horizontale Projektionsebene vorzugsweise die Horizontalebene nennen und die vertikale Projektionsebene, gleichfalls vorzugsweise die Vertikalebene.

15. Die Nothwendigkeit es so einzurichten, daß bey den Zeichnungen die beyden Projektionen auf einem und demselben Blatte seyen, und bey den Arbeiten im Großen, auf der nemlichen Grundfläche — z. B. wie bey dem Reißboden der Zimmerleute — hat die Künstler noch ferner veranlaßt anzunehmen, daß die Vertikalebene sich um ihren Durchschnitt mit der Horizontalebene, wie um ein Scharnier drehe, um sich auf die letztere niederzulegen, und mit ihr nur eine und dieselbe Ebene zu bilden, und in dieser Lage ihre Projektionen zu konstruiren.

Demnach ist die Vertikalprojektion eigentlich immer auf einer Horizontalebene verzeichnet, und man muß sie sich beständig, mittelst einer Viertels Umdrehung um den Durchschnitt der Vertikalebene mit der Horizontalebene, aufgerichtet und wieder an ihren Platz zurückgelegt denken.

Den Durchschnitt der beyden Projektionsebenen, welcher sehr deutlich auf den Zeichnungen angegeben seyn muß, nennen wir die Projektionsaxe.

Auf diese Art wird in der Figur 3 die Projektion $a' b'$ der Geraden A B nicht auf einer wirklich vertikalen Ebene gemacht; man stellt sich vor, diese Ebene habe sich um die Gerade L M gedreht, um sich auf die Horizontalebene aufzulegen und in dieser Stellung der Ebene wird die Vertikalprojektion $a' b'$ ausgeführt.

16. Außer der Bequemlichkeit in der Ausführung, welche diese Anordnung darbietet, gewährt sie noch den Vortheil, die Arbeit der Projektionen abzukürzen, denn in der That, nehmen wir an, die Punkte $a$, $a'$ (Fig. 3.) seyen die horizontale und vertikale Projektion des Punktes A, so ist die, durch die Geraden A $a$, A $a'$ geführte Ebene zu gleicher Zeit senkrecht auf beyde Projektionsebenen, weil sie durch zwey Gerade geht, welche senkrecht auf dieselben sind; sie ist daher auch senkrecht auf die Projektionsaxe L M, dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Projektionsebenen; und die Geraden $a$ C, $a'$ C, nach welchen sie diese beyden Ebenen schneidet, sind selbst senkrecht auf L M.

Nun aber, wenn sich die Vertikalebene um die Projektionsaxe, als Scharnier dreht, so hört die Gerade $a'$ C während dieser Bewegung nicht auf senkrecht auf L M zu seyn, und sie ist noch senkrecht auf dieselbe, wenn sie, nachdem die Vertikalebene niedergelegt ist, die Stellung C $a''$ genommen hat. Die zwey Geraden $a$ C, $a''$ C, da sie beyde durch den Punkt C gehen, und beyde senkrecht auf L M sind, liegen daher, Eine in der Verlängerung der Andern: eben so verhält es sich mit den Geraden $b$ D, $b''$ D in Bezug auf jeden andern Punkt wie B. Es folgt hieraus, daß, wenn man die Horizontalprojektion eines Punktes hat, die Projektion dieses Punkts auf der umliegend gedachten Vertikalebene, in der Geraden liegen muß, welche durch die Horizontalprojektion senkrecht auf die Projektionsaxe gezogen ist und eben so umgekehrt. Für die Ausübung äußerst wichtiges Resultat.

17. Um nach diesen Annahmen ein Zeichnungsblatt als Projektionsebene anzuordnen, fange man damit an, die Mitten der beyden gegenüber stehenden schmalen Seiten des Blattes zu bezeichnen, und ziehe durch diese Mitten eine Gerade wie X Z, Taf. II (die Figuren der Tafel I. sind nicht nach der Projektionsmethode gezeichnet); auf die Gerade X Z errichte man mittelst des Zirkels und Lineals, ohne Beyhülfe des Winkelmaßes, die Senkrechte V W, so daß durch diese beyden Linien das Zeichnungsblatt in vier, ungefähr gleiche Theile getheilt werde.

Wenn mehrere Figuren auf ein Blatt kommen, so mache man für jede dasselbe Geviert, mehrere Figuren können eine Seite des Geviertes gemein haben und die andere parallel, wie aus der Tafel II ersichtlich ist. Die Seite L M des Geviertes der zweyten Figur nehme man als Projektionsaxe, und es sey A (Fig. 2.) die Horizontalprojektion irgend eines Punktes; wenn man durch diesen Punkt A auf die Projektionsaxe L M die Senkrechte A C $a$ errichtet, so muß die Vertikalprojektion desselben Punkts irgend wo

2 *

in dieser Senkrechten liegen: es sey *a* diese Projektion. Obgleich die zwey Theile A C und *a* C der Geraden A C *a* nur eine einzige Gerade bilden, welche die Projektionsaxe in einem Punkte C schneidet, so muß man sich diese Theile als Seiten eines rechten Winkels denken, dessen Scheitel in C ist, und dessen eine Seite A C in der Horizontalebene liegt, und die andere in der Vertikalebene; und da diese Seiten A C, *a* C wechselseitig parallel zu den projektirenden Geraden des Punktes im Raume sind, so messen sie die Abstände dieses Punkts von der Vertikalebene und von der Horizontalebene.

18. Aus der rechtwinkligen Stellung der Projektionsebenen unter sich folgt ferner noch, daß alle, in einer von ihnen enthaltenen Punkte und Linien zugleich auch ihre eigenen Projektionen auf dieser Ebene seyen, und daß sie sich auf die Andere nach der Projektionsaxe, als dem gemeinsamen Durchschnitte dieser Ebenen projektiren.

Wir müssen hier bemerken, daß die Projektionsaxe nie als die Gränze der Projektionsebenen betrachtet werden darf, sie ist nur ihr wechselseitiger Durchschnitt. Diese beyden Ebenen, unbestimmt verlängert gedacht, theilen den ganzen Raum in vier gleiche Regionen, und in jede von diesen können die zu projektirenden Gegenstände sich erstrecken; obschon man gewöhnlich annimmt, daß sie vorzugsweise den Raum einnehmen, welcher zwischen dem oberen Theile der Vertikalebene und dem vorderen Theile der Horizontalebene gefaßt ist. Diesem zufolge entsprechen immer zwey Punkte, die auf einer und derselben Senkrechten auf die Projektionsaxe genommen sind, einem bestimmten Punkte des Raumes als dessen Projektionen; und eben so können stets je zwey beliebig auf den Projektionsebenen gezogene] Gerade A B, *a b* (Taf. II. Fig. 2.) als die Projektionen einer Geraden angenommen werden, deren Stellung im Raume durch sie bestimmt ist.

19. Bisher haben wir die gerade Linie als unbestimmt betrachtet und wir hatten uns deßhalb nur mit ihrer Richtung zu beschäftigen. Wenn aber eine Gerade als durch zwey Punkte begränzt angenommen werden muß, so kann noch außerdem verlangt werden, ihre Größe zu kennen. Wir werden sogleich sehen, wie diese aus der Kenntniß ihrer beyden Projektionen abzuleiten sey.

Wenn eine Gerade parallel ist zu einer der zwey Ebenen, auf welche sie projektirt wurde, so ist ihre Länge gleich ihrer Projektion auf dieser Ebene; denn die Gerade und ihre Projektion sind durch zwey Senkrechte auf die Projektionsebene begränzt, sie sind daher Parallele zwischen Parallelen und folglich von gleicher Größe. In diesem besondern Fall ist sonach mit der Projektion der Geraden auch zugleich ihre Länge gegeben.

Wenn aber eine Gerade parallel zu einer Projektionsebene seyn soll, so muß ihre Projektion auf der andern Ebene parallel zu der Projektionsaxe seyn.

Ist eine Gerade zu gleicher Zeit schief auf beyde Ebenen, so ist ihre Länge größer als die einer jeden ihrer Projektionen; aber sie kann durch eine sehr einfache Konstruktion daraus abgeleitet werden.

Fig. 1. Taf. II. Es sey L M Projektionsaxe und A B, *a b* seyen die Horizontal- und Vertikalprojektion einer geraden Linie, welche durch zwey Punkte begränzt seyn soll, deren Projektionen A und *a*, B und *b* seyen: man verlangt die Länge des Stückes der Geraden zwischen diesen beyden Punkten?

Um diese Länge zu erhalten, betrachte man die Gerade als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, dessen eine Seite horizontal ist und gleich der Projektion A B, und dessen zweyte Seite vertikal ist und gleich *e b*, das heißt, gleich dem Unterschied der Höhen beyder Endpunkte der in Rede stehenden Geraden. Man konstruirt dieses Dreyeck indem man durch den Punkt *a* eine unbestimmte Parallele *a e* mit der Projektionsaxe zieht, welche die Gerade B *b* in einem Punkte *e* schneidet, und sodann von *e* nach *a'* eine Länge *e a'* gleich A B oder A' B trägt. Durch die Vollendung des Dreyecks *a' e b* erhält man die Hypothenuse *a' b* desselben von einer Länge gleich der Gesuchten.

Da die beyden Projektionsebenen unter sich senkrecht sind, so hätte die so eben auf Einer von ihnen ausgeführte Operation auch auf der Andern gemacht werden können, und würde das gleiche Resultat geliefert haben. *)

20. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß, wenn man die zwey Projektionen eines Körpers hat, der durch ebene Flächen, geradlinige Kanten und die Scheitel körperlicher Winkel begränzt ist, lauter Projektionen die sich auf das System der geradlinigen Kanten reduziren, es leicht sey, hieraus die Länge jeder beliebigen Dimension, welche man wolle zu folgern; denn entweder ist diese Dimension parallel zu einer Projektionsebene, oder sie ist zu gleicher Zeit schief auf Beyde; im ersten Fall ist die gesuchte Länge der Dimension gleich ihrer Projektion, im zweyten kann man sie durch das eben beschriebene Verfahren aus ihren beyden Projektionen ableiten.

## Von der Ebene.

21. Um eine Ebene mittelst der Projektionsmethode darzustellen, ist, wie leicht einzusehen, ein anderes Mittel erforderlich, als dasjenige, dessen wir uns zur Darstellung von Punkten und Linien bedient haben. Folgendes hat man im Gebrauche.

Die darzustellende Ebene, wenn sie anders nicht parallel zu einer von den Projek-

*) Für die Anfänger wird es sehr nützlich seyn, wenn sie nicht nur diese, sondern auch alle ähnlichen in der Folge dieses Buches vorgetragenen Konstruktionen, auf einer und der andern Projektionsebene ausführen.