Darstellende Geometrie.

Erstes Buch.

Von der geraden Linie und Ebene.

Erstes Kapitel.

Erklärungen und Grundbegriffe.

1. Die darstellende Geometrie besteht aus zwey Haupttheilen: einmal lehrt sie, wie auf einem Zeichnungsblatt, das nur zwey Dimensionen hat, nemlich Länge und Breite, alle natürlichen Körper vorgestellt werden können, welche drey Dimensionen haben: Länge, Breite und Höhe; vorausgesetzt, daß diese Körper streng bestimmt werden können.

Zweitens zeigt sie, wie nach einer genauen Beschreibung, die Formen der Körper erkannt werden können, und wie daraus alle Wahrheiten abzuleiten seyen, die aus der Gestalt und der gegenseitigen Stellung jener Körper entspringen.

Wir werden nach einander die, zum Theil auf dem Wege langer Erfahrung gefundenen Methoden entwickeln, um diese doppelte Aufgabe zu lösen.

2. Da die Oberflächen aller Naturkörper, als aus Punkten zusammengesetzt, betrachtet werden können, so ist das erste Erfoderniß, bey Erörterung dieses Gegenstandes, die Art anzugeben, wie man die Stellung eines Punktes im Raume ausdrückt.

Der Raum ist unbegränzt, alle seine Theile sind vollkommen ähnlich, sie haben nichts, was sie charakterisire, und keiner derselben kann als Vergleichungsausdruck dienen, um die Stellung eines andern Punktes zu bezeichnen.

Man muß demnach nothwendiger Weise, um die Stellung eines Punktes im Raume zu bestimmen, diese Stellung auf einige andere Gegenstände beziehen, die von den, sie einschließenden Theilen des Raumes ausgezeichnet, und die selbst, ihrer Stellung nach sowohl demjenigen bekannt sind, welche erklärt, als auch dem, welcher die Erklärung verstehen will, damit aber auch die Verfahrungsart eine leichte und tägliche Anwendbarkeit erlangen könne, so müssen diese Gegenstände so einfach seyn als möglich, und ihre Stellung, die am leichtesten denkbare.

3. Unter allen einfachen Gegenständen, wollen wir diejenigen aufsuchen, welche die meiste Bequemlichkeit zur Bestimmung der Stellung eines Punktes darbieten, und weil die Geometrie nichts Einfacheres aufweis't, als den Punkt, so wollen wir untersuchen, in welche Art von Betrachtungen man gezogen würde, wenn man, um die Stellung eines Punktes zu bestimmen, denselben auf eine gewisse Anzahl anderer Punkte bezöge, deren Stellung bekannt wäre, und damit diese Auseinandersetzuug mehr Klarheit erhalte, wollen wir diese bekannten Punkte mit den aufeinander folgenden Buchstaben A, B, C, rc. bezeichnen.

Nehmen wir zuerst an, es läge in der Definition der Stellung des Punktes, daß er einen Fuß von dem bekannten Punkt A entfernt sey.

Jedermann weiß, daß das Eigenthümliche der Kugelfläche darin besteht, daß alle ihre Punkte gleichweit vom Mittelpunkte abliegen. Demnach giebt dieser Theil der Definition an, daß der zu bestimmende Punkt die nemliche Eigenthümlichkeit habe, wie die sämmtlichen Punkte einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in A ist, und deren Halbmesser einen Fuß beträgt. Aber die Punkte der Kugelfläche sind die einzigen im ganzen Raume, die diese Eigenthümlichkeit haben, denn alle jene Punkte des Raumes, welche, in Bezug auf den Mittelpunkt, außerhalb dieser Fläche liegen, sind weiter als einen Fuß von dem Mittelpunkte entfernt, und alle jene, welche sich zwischen dem Mittelpunkte und der Fläche befinden, sind im Gegentheile, weniger als einen Fuß von diesem Mittelpunkt entfernt, daher besitzen nicht nur sämmtliche Punkte der Kugelfläche die in der Proposition angegebenen Eigenheiten, sondern sie sind auch die einzigen, welche dieselben besitzen, daher endlich drückt diese Proposition aus, daß der gesuchte Punkt einer von denen einer Kugelfläche sey, deren Mittelpunkt in A liegt und deren Halbmesser einen Fuß beträgt. Dadurch ist der Punkt wirklich von einer unendlichen Menge anderer, im Raume gelegener Punkte unterschieden, aber er ist noch mit allen Pnnkten der Kugelfläche vermengt, und es sind neue Bedingungen nöthig, um ihn unter denselben zu erkennen.

Nehmen wir sofort an, daß nach der Definition der Stellung des Punktes, derselbe zwey Fuß von einem zweyten bekannten Punkte B entfernt seyn soll: so ist einleuchtend, daß, indem man bey dieser zweyten Bedingung, wie bey der Ersten urtheilt, der Punkt auch einer von denen einer zweyten Kugelfläche seyn muß, deren Mittelpunkt in B ist, und deren Halbmesser zwey Fuß beträgt. Dieser Punkt, da er sich zu gleicher Zeit auf der ersten Kugelfläche und auf der Zweyten befinden muß, kann nur noch mit jenen verwechselt werden, welche beyden Flächen gemein sind, und die in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt liegen. Nun aber, wie wenig man auch mit geometrischen Betrachtungen vertraut seyn mag, ist bekannt, daß der Durchschnitt zweyer Kugelflächen der Umfang eines Kreises ist, dessen Mittelpunkt in der Geraden liegt, die die Mittelpunkte der zwey Kugeln verbindet, und dessen Ebene senkrecht auf dieselbe Gerade ist. Der gesuchte Punkt ist daher, vermöge der zwey vereinigten Bedingungen, wirklich von allen denen unterschieden, welche auf den Oberflächen der zwey Kugeln liegen, und er kann nur noch mit jenen des Umkreises vermengt werden, welche sämmtlich die beyden ausgesprochenen Bedingungen besitzen, und zwar sie allein besitzen. Es bedarf daher noch einer dritten Bedingung, um denselben auszuzeichnen.

Nehmen wir endlich an, daß der Punkt sich drey Fuß von einem dritten bekannten Punkte C entfernt befinden soll. Diese dritte Bedingung versetzt denselben unter sämmtliche Punkte einer dritten Kugelfläche, deren Mittelpunkt in C ist, und deren Halbmesser drey Fuß beträgt; und da wir gesehen haben, daß der Punkt im Umfange eines Kreises von bekannter Stellung liegen muß, so muß derselbe, um zu gleicher Zeit allen drey Bedingungen zu genügen, einer der Punkte seyn, die sowohl der dritten Kugel, als dem Umfange des Kreises gemein sind; aber es ist bekannt, daß der Umfang eines Kreises und eine Kugel sich nur in zwey Punkten schneiden können; daher findet sich der Punkt, vermöge der drey Bedingungen, von allen im Raume unterschieden, und er kann nur noch einer der zwey bestimmten Punkte seyn; so daß, wenn außerdem noch angegeben wird, auf welcher Seite, in Bezug auf die Ebene, welche durch die drey Mittelpunkte geht, der Punkt liegt, derselbe absolut bestimmt ist, und mit keinem andern mehr verwechselt werden kann.

Man sieht wohl, daß wenn man, um die Stellung eines Punktes im Raume zu bestimmen, dessen Entfernungen von andern bekannten Punkten anwendet, Betrachtungen entstehen, die nicht einfach genug sind, um als Grundlage einer Verfahrungsart, zum täglichen Gebrauche, zu dienen.

4. Wir wollen nun untersuchen, in welche Betrachtungen man geführt würde, wenn man, anstatt die Stellung eines Punkts auf drey andere bekannte Punkte zu beziehen, denselben auf gerade Linie von bekannter Stellung bezöge.

Wir bemerken zuvor, daß eine gerade Linie niemals als begrenzt zu betrachten sey, und daß dieselbe stets nach einer und der andern Seite unbestimmt verlängert werden könne.

Zur Vereinfachung, wollen wir die Geraden, welche wir anwenden werden müssen, nacheinander mit A, B, C, ꝛc. bezeichnen.

Wenn aus der Definition der Stellung des Punktes hervorgeht, daß derselbe, zum Beyspiel einen Fuß von der ersten bekannten Geraden A entfernt ist, so drückt man damit aus, daß derselbe einer von denen einer Cylinderfläche von kreisförmiger Grundlinie sey, deren Axe die Gerade A, und deren Halbmesser ein Fuß ist, und welche, nach den beyden Richtungen ihrer Länge unbestimmt verlängert ist; denn alle Punkte dieser Fläche besitzen die in der Definition ausgedrückte Eigenthümlichkeit, und sind die Einzigen, welche dieselbe besitzen. Der Punkt ist dadurch von allen Punkten des Raumes unterschieden, welche außerhalb der Cylinderfläche liegen, er ist ebenfalls von allen jenen unterschieden, welche im Innern des Cylinders liegen, und er kann nur noch mit denen der Cylinderfläche selbst verwechselt werden, unter welchen man ihn nur mittelst neuer Bedingungen auszeichnen kann.

Nehmen wir daher weiter an, der gesuchte Punkt solle zwey Fuß von einer zweyten geraden Linie B entfernt seyn, so ist eben so ersichtlich, daß derselbe dadurch auf eine zweyte Cylinderfläche von kreisförmiger Grundlinie versetzt wird, deren Axe die gerade Linie B ist und deren Halbmesser zwey Fuß sind; aber mit deren sämmtlichen Punkten derselbe vermengt ist, wenn man nur die zweyte Bedingung für sich allein betrachtet. Vereinigt man die zwey Bedingungen, so muß der Punkt sich sowohl auf der ersten, als auf der zweyten Cylinderfläche befinden, und er kann nur einer der Punkte seyn, welche beyde Flächen gemein haben, das heißt, einer ihrer beyderseitigen Durchschnittslinie. Diese Linie, auf welche der Punkt sich befinden muß, theilt sowohl die Krümmung der ersten Cylinderfläche als die Krümmung der zweyten, und ist, im Allgemeinen, von dem Geschlechte derjenigen, welche man **krumme Linien von doppelter Krümmung** nennt.

Um den Punkt von allen Uebrigen dieser Linie zu unterscheiden, bedarf es einer dritten Bedingung.

Nehmen wir endlich an, die Definition drücke noch weiter aus, daß der fragliche Punkt drey Fuß von einer dritten geraden Linie C abliege.

Aus dieser neuen Bedingung ergiebt sich, daß der Punkt einer von denen, einer dritten Cylinderfläche von kreisförmiger Grundlinie sey, deren Axe die Gerade C ist, und welche drey Fuß Halbmesser hat: nimmt man daher alle drey Bedingungen zusammen, so kann der Punkt nur noch einer von denen seyn, welche sowohl der dritten Cylinderfläche, als auch der, aus dem Durchschnitt der beyden Ersten entstandenen krummen Linie von doppelter Krümmung gemein sind; nun aber kann diese krumme Linie von der dritten Cylinderfläche im Allgemeinen in acht Punkten geschnitten werden. *) Daher bringen die drey vereinigten Bedingungen den gesuchten Punkt darauf zurück, daß er einer von den acht bestimmten Punkten ist, unter welchen man ihn nur mittelst einiger besonderer Bedingungen auszeichnen kann, die von der Art sind, wovon wir bey dem Falle der Punkte ein Beyspiel gegeben haben.

Man sieht wohl, daß die Betrachtungen, welche sich ergeben, um die Stellung eines Punktes im Raume, durch die Kenntniß seiner Entfernung von drey gegebenen Geraden, zu bestimmen, noch weit weniger einfach sind als die, zu welchem seine Entfernungen von drey Punkten veranlassen, und daß sie, auf diese Weise noch weniger zur Grundlage einer oft anzuwendenden Methode dienen könne.

5. Unter allen einfachen Gegenständen, welche die Geometrie betrachtet, sind hauptsächlich zu bemerken, 1tens der Punkt, welcher keine Dimension hat, 2tens die gerade Linie, die nur einen hat, 3tens die Ebene, die deren zwey hat. Untersuchen wir, ob es nicht einfacher sey, die Stellung eines Punkts durch die Kenntniß seiner Entfernung von bekannten Ebenen zu bestimmen, als hiezu seine Entfernungen von Punkten oder geraden Linien anzuwenden.

*) Um eine deutliche Vorstellung zu erhalten, wie dieses statt haben könnte, betrachten wir zuerst nur zwey der genannten Cylinderflächen, und nehmen wir an, die Eine habe einen merklich kleineren Durchmesser als die Andere, und sie durchdrängen sich dergestalt, daß die Axen sich begegnen, und unter sich einen Winkel bilden, der bedeutend kleiner als ein rechter sey. Es ist sodann einleuchtend, daß die Cylinderfläche von dem kleineren Durchmesser die Andere gänzlich durchschneide, so daß sie auf der vordern Seite dieses Letzteren und auf ihrer hinteren Seite zwey abgesonderte ähnliche und sehr länglichte Schnitte mache. Sofort nehmen wir an, die dritte Cylinderfläche habe einen Durchmesser, der ungefähr die Mitte zwischen den beyden andern hielte, sie durchdränge die Fläche vom größeren Durchmesser so, daß abermals die Axen sich begegneten aber unter einem vom rechten wenig abweichenden Winkel, und sie träfe die zwey in dieser Fläche gemachten Schnitte ungefähr in ihren Mitten. Es ist einleuchtend, daß die Schnitte, die sie auf den beyden Seiten des großen Cylinders hervorbringen werde, breiter seyn müssen. und nicht so lang, als die, durch den kleinen Cylinder gebildeten, und daß daher jeder von diesen neuen Schnitten die älteren in vier Punkten treffen werden. Sonach giebt es vier, den drey Cylindern gemeinschaftliche Punkte auf der äußeren Seite desjenigen, welche den größten Durchmesser hat, und noch einmal vier auf seiner hintern Seite, also achte.

In gewissen besondern Fällen kann diese Anzahl kleiner seyn, sie kann sich auf 6 auf 4 auf 2 und selbst auf null reduziren, je nach der Stellung und dem Durchmesser der Flächen. (Siehe IVtes Buch. IIItes Kap. Aufgb. IV.)

Nehmen wir in dieser Absicht an, es wären im Raume nicht parallele und, ihrer Stellung nach bekannte Ebenen vorhanden, welche wir nacheinander mit den Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. bezeichnen wollen.

Wenn der Punkt, nach der Erklärung seiner Stellung, einen Fuß zum Beyspiel, von der ersten Ebene A entfernt seyn soll, ohne daß ausgedrückt wäre, auf welcher Seite, in Bezug auf diese Ebene er liege; so ergiebt sich hieraus, daß er einer von den Punkten zweyer Ebenen sey, die, parallel zu der Ebene A, Eine diesseits, die Andere jenseits dieser Ebene gelegen sind und jede von ihnen in die Entfernung eines Fußes; denn alle Punkte dieser beyden parallelen Ebenen, leisten der ausgedrückten Bedingung Genüge und sind, von allen im Raum, die Einzigen, die dieses thun.

Um daher unter allen Punkten dieser zwey Ebenen, denjenigen auszuzeichnen, dessen Stellung man erklären will, muß man abermals zu weiteren Bedingungen seine Zuflucht nehmen.

Setzen wir also zweytens fest: der fragliche Punkt solle zwey Fuß weit von einer zweyten Ebene B gelegen seyn; so versetzt man denselben dadurch auf zwey, der Ebene B parallele Ebenen, beyde zwey Fuß von dieser Ebene entfernt, die Eine auf dieser Seite, die Andere auf der Andern. Es folgt daraus, daß, um beyden Bedingungen zu gleicher Zeit zu genügen, der Punkt in einer von den, zu der Ebene A parallelen Ebenen liegen muß, und in Einer der beyden, die der Ebene B parallel sind, und daß er folglich einer der Punkte des gemeinsamen Durchschnitts dieser vier Ebenen sey. Nun aber besteht der gemeinschaftliche Durchschnitt von vier, je zwey und zwey parallelen Ebenen, von bekannter Stellung, aus der Vereinigung von vier ebenfalls der Stellung nach bekannten geraden Linien. Daher ist der Punkt, in dem man beyde Bedingungen zu gleicher Zeit betrachtet, weder mit den übrigen allen im Raume, noch selbst mit jenen der vier Ebenen vermischt, sondern nur noch mit denen der vier geraden Linien. Soll endlich der Punkt noch in einer Entfernung von drey Fuß, von der dritten Ebene C liegen, so drückt man dadurch aus, daß er einer von denen zweyer anderer Ebenen seyn müsse, die, parallel zu der Ebene C und auf ihren beyden Seiten, in einer Entfernung von drey Fuß gelegen sind. Demnach muß er, vermöge der drey Bedingungen, sowohl in einer der zwey letzten Ebenen befindlich seyn, als auch in Einer von den vier geraden Linien, den Durchschnitten der vier ersten Ebenen; er kann daher nur einer der Punkte seyn, die sowohl Einer der zwey Ebenen, als Einer der vier Geraden gemeinschaftlich sind. Da nun aber jede der zwey Ebenen einen Punkt mit jeder der vier geraden Linien gemein hat, so giebt es acht Punkte im Raume, die gleichzeitig den drey Bedingungen genügen; daher kann der fragliche Punkt, vermöge der drey Bedingungen, kein Anderer seyn als Einer von den acht Bestimmten, unter welchen man ihn nicht anders, als mittelst einiger besonderen Bedingungen auszeichnen kann.

Wenn man zum Beyspiel, bey der Angabe des Abstandes von der ersten Ebene A, zugleich ausdrückt, auf welche Seite, in Bezug auf diese Ebene, der Abstand genommen werden müsse, so bleiben, statt zwey, zu der Ebene A parallelen Ebenen, nur Eine zu betrachten, jene nemlich, welche, in Bezug auf dieselbe Ebene, auf der nemlichen Seite liegt, auf welcher die Entfernung gemessen werden soll. Wenn man eben so angiebt, auf welcher Seite, in Betreff der zweyten Ebene, die Entfernung genommen werden soll, so schließt man die Betrachtung Einer der zwey Ebenen aus, die zu der Zweyten parallel sind, und es giebt nicht mehr als eine Ebene, deren Punkte der zweyten Bedingung entsprächen. Vereinigt man diese Bedingungen, so kann der Punkt nicht mehr in den vier geraden Durchschnittslinien der vier, je zwey und zwey parallelen Ebenen liegen, sondern nur in dem Durchschnitte zweyer Ebenen; das heißt in einer, der Stellung nach bekannten geraden Linie. Giebt man endlich noch an, auf welcher Seite der Punkt gelegen seyn muß, in Bezug auf die dritte Ebene, so bleibt von den zwey, zu der dritten parallelen Ebenen, nur eine, deren sämmtliche Punkte die letzte Bedingung erfüllen; und um zu gleicher Zeit allen Bedingungen Genüge zu thun, muß der Punkt sich in dem Durchnitt dieser dritten Ebene mit der einzigen Geraden, der Durchschnittslinie der zwey Ersten befinden; Er kann daher mit keinem Andern im Raume mehr verwechselt werden, und er ist folglich durchaus bestimmt.

6. Es ist sonach einleuchtend, daß die Ebene, obwohl sie in Rücksicht ihrer Abmessungen, kein so einfacher Gegenstand ist, als die gerade Linie, die nur eine Abmessung hat, und als der Punkt, der gar keine hat, dennoch mehr Bequemlichkeit zur Bestimmung eines Punkts im Raume darbiethe als der Punkt und die gerade Linie. Dieses Verfahren gebraucht man auch gemeinlich bei Anwendung der Algebra auf die Geometrie, wo man, um die Stellung eines Punktes zu finden, gewöhnlich dessen Entfernungen von drey Ebenen von bekannter Stellung sucht.

Aber in der darstellenden Geometrie, welche schon seit viel längerer Zeit, von weit mehr Menschen in Anwendung gebracht wurde, und von Menschen, deren Zeit kostbar war, haben sich die Verfahrungsarten noch mehr vereinfacht, und, statt der Betrachtung von drey Ebenen ist man, mittelst der Projektionen dahin gelangt, unumgänglich nicht mehr als zwey nöthig zu haben.

Methode der Projektionen.

7. Man nennt Projektion eines Punktes auf eine Ebene, den Fuß der Geraden, welche von dem Punkte senkrecht auf die Ebene gefällt ist.

Dieses angenommen, wenn man zwey Ebenen hat, von bekannter Stellung im Raume, und wenn man auf jeder von diesen Ebenen die Projektion des Punktes giebt, dessen Stellung man erklären will, so ist dieser Punkt vollkommen bestimmt.

In der That, wenn man sich durch die Projektion auf der ersten Ebene, eine Senkrechte auf diese Ebene denkt, so ist einleuchtend, daß dieselbe durch den zu bestimmenden Punkt gehen werde; eben so, wenn man sich durch seine Projektion auf der zweyten Ebene, eine Senkrechte auf diese Ebene denkt, so muß diese gleichfalls durch jenen Punkt gehen. Dieser Punkt liegt demnach zu gleicher Zeit in zwey geraden Linien, von bekannter Stellung im Raume, er kann daher kein anderer seyn, als der einzige Punkt ihres Durchschnitts, und er ist sonach vollkommen bestimmt.

8. Wir nennen die Ebenen, auf welche man die Punkte des Raumes projektirt, Projektionsebenen, den Senkrechten, mittelst welcher jene Punkte auf die Ebenen projektirt werden, geben wir die Benennung projektirende Linien.

9. Taf. I. Fig. 1. Es sey A B C D E . . . eine auf beliebige Art im Raume gelegene Linie; wenn man aus jedem Punkte dieser Linie eine Senkrechte auf eine Ebene M N P Q fällt, so bilden die Fußpunkte $a, b, c, d, e, \ldots$, der Senkrechten auf dieser Ebene, eine neue Linie $a\ b\ c\ d\ e$, welche man die Projektion der Linie A B C D E auf der Ebene M N P Q nennt.

10. Taf. I. Fig. 2. Ist die gegebene Linie eine Gerade A B, so liegen die Senkrechten, welche aus ihren sämmtlichen Punkten auf die Projektionsebene M N P Q gefällt sind, in der Ebene, welcher durch die A B senkrecht auf die Projektionsebene geführt ist, die Fußpunkte jener Senkrechten fallen daher in den gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser beyden Ebenen, welcher wie bekannt eine gerade Linie bildet; die Projektion einer Geraden ist folglich ebenfalls eine Gerade.

Wenn man daher nur die Projektionen a, b von zwey Punkten A, B, einer Geraden A B (Fig. 2.) hat, so ist die durch diese Punkte gezogene Gerade $a\ b$ die Projektion der Geraden A B.

Es folgt hieraus, daß, wenn die gegebene Gerade selbst senkrecht auf die Projektionsebene wäre, ihre Projektion sich auf einen einzigen Punkt reduzire, auf jenen nemlich, in welchem sie selbst die Projektionsebene trifft.

Die Ebene, welche von den projektirenden Geraden, sämmtlicher Punkte einer geraden Linie gebildet wird, werden wir die projektirende Ebene der Geraden nennen.

11. Taf. I. Fig. 3. Sobald auf zwey nicht parallelen Ebenen L M N O, M N P Q die Projektionen $a\ b$, $a'\ b'$ einer nemlichen unbegrenzten Geraden A B gegeben sind, so ist diese Gerade bestimmt; denn wenn man sich durch die Projektion

$a\ b$ eine Ebene senkrecht auf die Projektionsebene L M N O denkt, so muß diese Ebene, deren Stellung bekannt ist, nothwendigerweise durch die Gerade A B gehen; eben so, wenn man sich durch die andere Projektion $a'\ b'$ eine senkrechte Ebene auf die L M P Q denkt, so muß diese Ebene, deren Stellung bekannt ist, durch die Gerade A B gehen; die Stellung dieser Geraden, welche sich zu gleicher Zeit in zwey bekannten Ebenen befindet, und folglich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte, ist daher ganz bestimmt.

12. Aus welcher Anzahl von Seiten ein Polygon zusammengesetzt seyn mag, welche Seiten übrigens in der nemlichen, oder in verschiedenen Ebenen enthalten seyn können, so ist durch zwey Projektionen dieses Polygons auf zwey nicht parallelen Ebenen, jede Seite desselben bestimmt, und folglich ist es auch das Polygon selbst nach Gestalt und Stellung im Raume.

Um von dieser Gestalt und Stellung aus den beyden Projektionen eine deutliche Vorstellung abzuleiten, betrachte man jede dieser Projektionen als die Basis eines geraden Prismas, das im Raume an dem projektirten Polygon beendigt ist, so wird dieses den gegenseitigen Durchschnitt jener zwey Prismen bilden, die ihrerseits selbst nach Form und Stellung gänzlich bekannt sind.

13. Irgend eine krumme Linie (Kurve) besteht aus einer Reihe von Punkten des Raumes, die nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit aufeinander folgen. Nun aber ist die Stellung eines jeden Punktes bestimmt, wenn man die Projektionen desselben auf zwey verschiedenen Ebenen kennt. (Art. 7.); es folgt hieraus unmittelbar, daß die Form und Stellung einer jeden krummen Linie bestimmt ist, durch die Projektionen dieser Linie auf zwey nicht parallelen Ebenen

Betrachten wir (Fig. 1.) alle projektirenden Geraden A a, B b, C c, D d . . . ꝛc., die aus den sämmtlichen Punkten der krummen Linie A B C D auf die Ebene M N P Q gefällt sind; so bilden diese offenbar eine eigenthümliche krumme Fläche, welche durch die Krumme A B C D und durch ihre Projektion $a\ b\ c\ d$ auf der Ebene M N P Q geht. Man kann daher die Projektion einer krummen Linie ansehen, als den Durchschnitt der Projektionsebene mit einer Fläche, welche aus den projektirenden Geraden aller Punkte der vorgelegten Krummen gebildet wird, und die man aus diesem Grunde die projektirende Fläche jener Krummen nennt. *)

Hat man zwey verschiedene Projektionen einer krummen Linie, so sind mit diesen zugleich auch zwey projektirende Flächen der Krummen nach Gestalt und Stellung gegeben,

*) Wir werden im zweyten Buche (Art. 58.) sehen, daß diese projektirenden Flächen der krummen Linien, zu dem Geschlechte der Cylinder gehören.

auf denen beyden die projektirte Krumme zu gleicher Zeit gelegen ist, und deren gegenseitigen Durchschnitt sie folglich bildet.

Wenn zufolge des Gesetzes, welches die Punkte einer Linie unter sich verbindet, diese Punkte in einer Ebene liegen, so nennt man die Linie einer ebene Krumme, im andern Fall heißt sie eine krumme Linie von doppelter Krümmung.

14. Alle bisher aufgestellten Sätze, über die Projektionen des Punkts, der geraden und der krummen Linie, sind durchaus unabhängig von der Stellung der Projektionsebenen; und sie haben gleichwohl ihre Gültigkeit, welchen Winkel auch diese zwey Ebenen unter sich bilden mögen. Wäre jedoch der, von beyden Projektionsebenen gebildete Winkel sehr stumpf, so würden die Winkel, den die auf ihnen senkrechten Geraden und Ebenen bilden sehr spitz, und in der Ausübung könnten kleine Fehler sehr bedeutende Irrungen in der Stellung der Punkte und Linien herbey führen. Um diese Unrichtigkeiten zu vermeiden, fügt man es immer so, daß die beyden Projektionsebenen rechtwinklig unter sich sind, wenn man anders nicht, irgend einer größeren Bequemlichkeit wegen, sich zu einer Aenderung hierin bestimmen läßt. Da überdem der größte Theil der Künstler, welche die Projektionsmethode anwenden, sehr vertraut sind mit der Stellung einer Horizontalebene und mit der Richtung des Senkels, so haben sie die *eine* der beyden Projektionsebenen als horizontal angenommen und die andere als vertikal.

Wir werden der Kürze wegen, in Zukunft die horizontale Projektionsebene vorzugsweise die Horizontalebene nennen und die vertikale Projektionsebene, gleichfalls vorzugsweise die Vertikalebene.

15. Die Nothwendigkeit es so einzurichten, daß bey den Zeichnungen die beyden Projektionen auf einem und demselben Blatte seyen, und bey den Arbeiten im Großen, auf der nemlichen Grundfläche — z. B. wie bey dem Reißboden der Zimmerleute — hat die Künstler noch ferner veranlaßt anzunehmen, daß die Vertikalebene sich um ihren Durchschnitt mit der Horizontalebene, wie um ein Scharnier drehe, um sich auf die letztere niederzulegen, und mit ihr nur eine und dieselbe Ebene zu bilden, und in dieser Lage ihre Projektionen zu konstruiren.

Demnach ist die Vertikalprojektion eigentlich immer auf einer Horizontalebene verzeichnet, und man muß sie sich beständig, mittelst einer Viertels Umdrehung um den Durchschnitt der Vertikalebene mit der Horizontalebene, aufgerichtet und wieder an ihren Platz zurückgelegt denken.

Den Durchschnitt der beyden Projektionsebenen, welcher sehr deutlich auf den Zeichnungen angegeben seyn muß, nennen wir die Projektionsaxe.

Auf diese Art wird in der Figur 3 die Projektion $a' b'$ der Geraden A B nicht auf einer wirklich vertikalen Ebene gemacht; man stellt sich vor, diese Ebene habe sich um die Gerade L M gedreht, um sich auf die Horizontalebene aufzulegen und in dieser Stellung der Ebene wird die Vertikalprojektion $a' b'$ ausgeführt.

16. Außer der Bequemlichkeit in der Ausführung, welche diese Anordnung darbietet, gewährt sie noch den Vortheil, die Arbeit der Projektionen abzukürzen, denn in der That, nehmen wir an, die Punkte a, a' (Fig. 3.) seyen die horizontale und vertikale Projektion des Punktes A, so ist die, durch die Geraden A a, A a' geführte Ebene zu gleicher Zeit senkrecht auf beyde Projektionsebenen, weil sie durch zwey Gerade geht, welche senkrecht auf dieselben sind; sie ist daher auch senkrecht auf die Projektionsaxe L M, dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Projektionsebenen; und die Geraden a C, a' C, nach welchen sie diese beyden Ebenen schneidet, sind selbst senkrecht auf L M.

Nun aber, wenn sich die Vertikalebene um die Projektionsaxe, als Scharnier dreht, so hört die Gerade a' C während dieser Bewegung nicht auf senkrecht auf L M zu seyn, und sie ist noch senkrecht auf dieselbe, wenn sie, nachdem die Vertikalebene niedergelegt ist, die Stellung C a'' genommen hat. Die zwey Geraden a C, a'' C, da sie beyde durch den Punkt C gehen, und beyde senkrecht auf L M sind, liegen daher, Eine in der Verlängerung der Andern: eben so verhält es sich mit den Geraden b D, b'' D in Bezug auf jeden andern Punkt wie B. Es folgt hieraus, daß, wenn man die Horizontalprojektion eines Punktes hat, die Projektion dieses Punkts auf der umliegend gedachten Vertikalebene, in der Geraden liegen muß, welche durch die Horizontalprojektion senkrecht auf die Projektionsaxe gezogen ist und eben so umgekehrt. Für die Ausübung äußerst wichtiges Resultat.

17. Um nach diesen Annahmen ein Zeichnungsblatt als Projektionsebene anzuordnen, fange man damit an, die Mitten der beyden gegenüber stehenden schmalen Seiten des Blattes zu bezeichnen, und ziehe durch diese Mitten eine Gerade wie X Z, Taf. II (die Figuren der Tafel I. sind nicht nach der Projektionsmethode gezeichnet); auf die Gerade X Z errichte man mittelst des Zirkels und Lineals, ohne Beyhülfe des Winkelmaßes, die Senkrechte V W, so daß durch diese beyden Linien das Zeichnungsblatt in vier, ungefähr gleiche Theile getheilt werde.

Wenn mehrere Figuren auf ein Blatt kommen, so mache man für jede dasselbe Geviert, mehrere Figuren können eine Seite des Geviertes gemein haben und die andere parallel, wie aus der Tafel II ersichtlich ist. Die Seite L M des Geviertes der zweyten Figur nehme man als Projektionsaxe, und es sey A (Fig. 2.) die Horizontalprojektion irgend eines Punktes; wenn man durch diesen Punkt A auf die Projektionsaxe L M die Senkrechte A C a errichtet, so muß die Vertikalprojektion desselben Punkts irgend wo in dieser Senkrechten liegen: es sey *a* diese Projektion. Obgleich die zwey Theile A C und *a* C der Geraden A C *a* nur eine einzige Gerade bilden, welche die Projektionsaxe in einem Punkte C schneidet, so muß man sich diese Theile als Seiten eines rechten Winkels denken, dessen Scheitel in C ist, und dessen eine Seite A C in der Horizontalebene liegt, und die andere in der Vertikalebene; und da diese Seiten A C, *a* C wechselseitig parallel zu den projektirenden Geraden des Punktes im Raume sind, so messen sie die Abstände dieses Punkts von der Vertikalebene und von der Horizontalebene.

18. Aus der rechtwinkligen Stellung der Projektionsebenen unter sich folgt ferner noch, daß alle, in einer von ihnen enthaltenen Punkte und Linien zugleich auch ihre eigenen Projektionen auf dieser Ebene seyen, und daß sie sich auf die Andere nach der Projektionsaxe, als dem gemeinsamen Durchschnitte dieser Ebenen projektiren.

Wir müssen hier bemerken, daß die Projektionsaxe nie als die Gränze der Projektionsebenen betrachtet werden darf, sie ist nur ihr wechselseitiger Durchschnitt. Diese beyden Ebenen, unbestimmt verlängert gedacht, theilen den ganzen Raum in vier gleiche Regionen, und in jede von diesen können die zu projektirenden Gegenstände sich erstrecken; obschon man gewöhnlich annimmt, daß sie vorzugsweise den Raum einnehmen, welcher zwischen dem oberen Theile der Vertikalebene und dem vorderen Theile der Horizontalebene gefaßt ist. Diesem zufolge entsprechen immer zwey Punkte, die auf einer und derselben Senkrechten auf die Projektionsaxe genommen sind, einem bestimmten Punkte des Raumes als dessen Projektionen; und eben so können stets je zwey beliebig auf den Projektionsebenen gezogene Gerade A B, *a b* (Taf. II. Fig. 2.) als die Projektionen einer Geraden angenommen werden, deren Stellung im Raume durch sie bestimmt ist.

19. Bisher haben wir die gerade Linie als unbestimmt betrachtet und wir hatten uns deßhalb nur mit ihrer Richtung zu beschäftigen. Wenn aber eine Gerade als durch zwey Punkte begränzt angenommen werden muß, so kann noch außerdem verlangt werden, ihre Größe zu kennen. Wir werden sogleich sehen, wie diese aus der Kenntniß ihrer beyden Projektionen abzuleiten sey.

Wenn eine Gerade parallel ist zu einer der zwey Ebenen, auf welche sie projektirt wurde, so ist ihre Länge gleich ihrer Projektion auf dieser Ebene; denn die Gerade und ihre Projektion sind durch zwey Senkrechte auf die Projektionsebene begränzt, sie sind daher Parallele zwischen Parallelen und folglich von gleicher Größe. In diesem besondern Fall ist sonach mit der Projektion der Geraden auch zugleich ihre Länge gegeben.

Wenn aber eine Gerade parallel zu einer Projektionsebene seyn soll, so muß ihre Projektion auf der andern Ebene parallel zu der Projektionsaxe seyn.

Ist eine Gerade zu gleicher Zeit schief auf beyde Ebenen, so ist ihre Länge größer als die einer jeden ihrer Projektionen; aber sie kann durch eine sehr einfache Konstruktion daraus abgeleitet werden.

Fig. 1. Taf. II. Es sey L M Projektionsaxe und A B, *a b* seyen die Horizontal- und Vertikalprojektion einer geraden Linie, welche durch zwey Punkte begränzt seyn soll, deren Projektionen A und *a*, B und *b* seyen: man verlangt die Länge des Stückes der Geraden zwischen diesen beyden Punkten?

Um diese Länge zu erhalten, betrachte man die Gerade als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, dessen eine Seite horizontal ist und gleich der Projektion A B, und dessen zweyte Seite vertikal ist und gleich *e b*, das heißt, gleich dem Unterschied der Höhen beyder Endpunkte der in Rede stehenden Geraden. Man konstruirt dieses Dreyeck indem man durch den Punkt *a* eine unbestimmte Parallele *a e* mit der Projektionsaxe zieht, welche die Gerade B *b* in einem Punkte *e* schneidet, und sodann von *e* nach *a'* eine Länge *e a'* gleich A B oder A' B trägt. Durch die Vollendung des Dreyecks *a' e b* erhält man die Hypothenuse *a' b* desselben von einer Länge gleich der Gesuchten.

Da die beyden Projektionsebenen unter sich senkrecht sind, so hätte die so eben auf Einer von ihnen ausgeführte Operation auch auf der Andern gemacht werden können, und würde das gleiche Resultat geliefert haben. *)

20. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß, wenn man die zwey Projektionen eines Körpers hat, der durch ebene Flächen, geradlinige Kanten und die Scheitel körperlicher Winkel begränzt ist, lauter Projektionen die sich auf das System der geradlinigen Kanten reduziren, es leicht sey, hieraus die Länge jeder beliebigen Dimension, welche man wolle zu folgern; denn entweder ist diese Dimension parallel zu einer Projektionsebene, oder sie ist zu gleicher Zeit schief auf Beyde; im ersten Fall ist die gesuchte Länge der Dimension gleich ihrer Projektion, im zweyten kann man sie durch das eben beschriebene Verfahren aus ihren beyden Projektionen ableiten.

Von der Ebene.

21. Um eine Ebene mittelst der Projektionsmethode darzustellen, ist, wie leicht einzusehen, ein anderes Mittel erforderlich, als dasjenige, dessen wir uns zur Darstellung von Punkten und Linien bedient haben. Folgendes hat man im Gebrauche.

Die darzustellende Ebene, wenn sie anders nicht parallel zu einer von den Projek-

---

*) Für die Anfänger wird es sehr nützlich seyn, wenn sie nicht nur diese, sondern auch alle ähnlichen in der Folge dieses Buches vorgetragenen Konstruktionen, auf einer und der andern Projektionsebene ausführen.

tionsebenen ist, wird jede dieser beyden Ebenen nach einer geraden Linie durchschneiden; und diese zwey Durchschnittslinien werden sich selbst in einem Punkte kreuzen, welcher auf der Projektionsaxe liegt; denn da sie sich zu gleicher Zeit in der darzustellenden Ebene befinden, und jede von ihnen in einer Projektionsebene liegt, so können sie sich nur in dem Punkte schneiden, den diese drey Ebenen gemein haben, und dieser Punkt ist der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der Projektionsaxe.

Da man nun durch zwey sich schneidende oder parallele Gerade nur eine einzige Ebene führen kann, so folgt daraus, daß die Stellung einer Ebene bestimmt ist, wenn man die Durchschnittslinien derselben mit den beyden Projektionsebenen kennt.

Wir werden die Benennung Risse einer Ebene den Geraden geben, nach welchen dieselbe die Projektionsebenen durchschneidet und welche dazu dienen, um ihre Stellung anzugeben.

Taf. II. Fig. 4. Es sey die Gerade L M die Projektionsaxe; B sey ein Punkt dieser Axe, durch welchen man auf der Horizontalebene eine Gerade A B gezogen hat, und auf der Vertikalebene eine Gerade B C. Diese beyden Geraden, als die Risse einer Ebene angenommen, bestimmen die Stellung derselben vollkommen, der Punkt B ist der Durchschnitt dieser Ebene mit der Projektionsaxe.

Wenn eine Ebene parallel zu einer Projektionsebene seyn sollte, so würde sie nur einen Riß auf derjenigen Projektionsebene haben, zu welcher sie nicht parallel wäre, und in dem Fale würde dieser einzige Riß, welcher parallel zu der Projektionsaxe seyn müßte, hinreichen, um ihre Stellung anzugeben, weil er zugleich die unbestimmte Projektion der ganzen Ebene wäre.

Von den Projektionen der durch ebene Flächen begränzten Körper.

22. Ein Körper, welcher durch ebene Flächen begränzt wird, ist es auch durch geradlinige Kanten, als den wechselseitigen Durchschnitten dieser Flächen. Man stellt solche Körper dar, indem man die Projektionen einer jeden Kante angiebt; die Projektionen jedes Scheitels, welcher eine dieser Kanten begränzt, liegen in der nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe. Es giebt indessen durchaus keine allgemeine Regel, wie diese Projektionen zu konstruiren seyen: man fühlt in der That wohl, daß je nachdem die Stellung der Kanten und Winkel eines Körpers gegeben ist, die Konstruktion ihrer Projektionen mehr oder minder leicht seyn könne, und daß die Art und Weise des Verfahrens, von jener der Angabe abhängen müsse.

Es ist hier gerade so wie mit der Algebra, in welcher es auch keine allgemeine

Regel giebt, wie eine Aufgabe in Gleichung anzusetzen sey. In jedem einzelnen Falle hängt der Gang davon ab, auf welche Art das gegenseitige Verhalten zwischen den gegebenen Größen und den Unbekannten ausgedrückt sey; und nur durch veränderte Beyspiele kann man die Anfänger gewöhnen, dieses Verhalten aufzufassen und in Gleichungen niederzuschreiben. Eben so in der darstellenden Geometrie; nur durch zahlreiche Beyspiele und durch den Gebrauch von Zirkel und Lineal kann man mit den Konstruktionen vertraut werden, und sich gewöhnen, in jedem einzelnen Falle die einfachste und zugleich zierlichste Methode zu wählen. Aber auch, eben so wie es in der Analysis, sobald eine Aufgabe in Gleichung angesetzt ist, Verfahrungsarten giebt, wie diese Gleichungen behandelt, und wie daraus die Werthe einer jeden unbekannten Größe abgeleitet werden können, eben so giebt es in der darstellenden Geometrie allgemeine Methoden, um sobald die Projektionen gemacht sind, alles das zu konstruiren, was aus der Gestalt und der gegenseitigen Stellung der Körper entspringt.

Nicht ohne Grund vergleichen wir hier die darstellende Geometrie mit der Algebra, denn diese zwey Wissenschaften stehen in der innigsten gegenseitigen Beziehung. Es giebt keine Konstruktion der darstellenden Geometrie, welche nicht in die Analysis übersetzt werden könnte, und jede analytische Operation kann, sobald nicht mehr als drey unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen, als die Urkunde eines geometrischen Schauspiels betrachtet werden.

Es wäre zu wünschen, daß diese beyden Wissenschaften gemeinsam kultivirt würden: die darstellende Geometrie brächte in die verwickeltsten analytischen Operationen die Evidenz, die sie charakterisirt; die Analysis würde dagegen der Geometrie die ihr eigenthümliche Allgemeinheit mittheilen.

23. Es wäre nun hier der Ort, die Darstellungsart der durch krumme Flächen begränzten Körper vorzutragen; wir haben es aber für zweckdienlicher gehalten, diesen Gegenstand erst im nächstfolgenden Buche abzuhandeln.

Von der Ausführung der Zeichnungen.

24. Eine Zeichnung der darstellenden Geometrie ist das Bild der Linien und Flächen, welche man kombinirt hat, um zur Lösung einer Aufgabe zu gelangen.

Unter den Linien, welche diese verschiedenen Größen vorstellen, unterscheiden wir zwey Gattungen: 1tens diejenigen, welche die Projektionen der gegebenen und der gesuchten Größen der Aufgabe vorstellen, und 2tens jene Linien, welche die gemachten graphischen Operationen angeben, um die gesuchten Projektionen zu erhalten. Um den Projektionszeichnungen den möglichsten Grad von Verständlichkeit zu geben, ist es durchaus erforderlich, daß man die genannten Gattungen von Linien, durch eine besondere Art dieselben zu ziehen, unter einander auszeichne. Die folgenden Erörterungen werden uns auf geeignete Annahmen, in dieser Beziehung, leiten.

25. Die Projektionsaxe theilt jede Projektionsebene in zwey Theile, nemlich: die Vertikalebene in einen obern und einen untern; und die Horizontalebene in einen vordern und einen hintern Theil; und über jeden von diesen Theilen können die Projektionen einer geometrischen Größe sich erstrecken. Durch die Umdrehung der Vertikalebene um die Projektionsaxe fallen aber die beyden Ebenen in eine zusammen und es wäre nun, ohne besondere Merkmale nicht mehr möglich zu erkennen, welcher Projektion irgend eine Linie angehöre.

Stellen wir uns nun die Projektionsebenen als wirkliche, phisische Ebenen vor, zum Beyspiel als äußerst dünne und unbiegsame Tafeln, so würde, nach der Umdrehung der Vertikalebene, der obere Theil derselben auf den hinteren Theil der Horizontalebene fallen und diesen bedecken, der untere Theil der Vertikalebene würde hingegen unter den vorderen Theil der Horizontalebene zu liegen kommen, und von diesem bedeckt werden. Wir hätten sodann auf jeder Projektionsebene einen Theil der Projektionen, welcher gesehen, und einen Theil, welcher bedeckt wäre; und wir werden sogleich den Nutzen einer solchen, übrigens ganz natürlichen Vorstellungsart einsehen.

Wenn man sich nun so die projektirten Größen, als wirklich im Raume vorhanden denkt, und von der nemlichen Beschaffenheit, wie wir so eben die Projektionsebenen angenommen haben, so kann man, nach dieser Vorstellungsart, jede Projektion als eine Abbildung der projektirten Gegenstände betrachten, wobey man sich nemlich das Auge unendlich weit von der Projektionsebene entfernt denken muß, und zwar in einer Senkrechten auf diese Ebene, so daß die projektirenden Linien als in unendlicher Entfernung zusammenlaufende Gesichtsstrahlen angesehen werden können. Die vorgestellten Gegenstände können sodann, entweder durch die Projektionsebenen, indem sie diese durchschneiden, oder durch sich selbst, wechselsweise bedeckt werden und bestünden daher ebenfalls aus gesehenen und bedeckten Theilen.

Nehmen wir dieses an, so folgt daraus: erstens, daß jede Projektion ihren besonderen Gesichtspunkt habe, und daß folglich gewisse Theile der vorgestellten Gegenstände in einer Projektion gesehen seyn können, während sie auf der Andern bedeckt erscheinen. Zweytens, daß der Gesichtspunkt für die Horizontalprojektion im Unendlichen über der Horizontalebene sey, und daß die entsprechenden Gesichtsstrahlen, für diesen Punkt, vertikal sind. Drittens, daß der Gesichtspunkt der Vertikalprojektion im Unendlichen vor der

Vertikalebene sey, und daß die von diesem Punkte ausgehenden Gesichtsstrahlen horizontal sind und senkrecht auf die Vertikalebene.

Setzen wir sofort fest: 1tens die gegebenen Größen einer Aufgabe und die Gesuchten, überhaupt die Wichtigsten sollen als wirklich im Raume vorhanden betrachtet, und auf jeder Projektion sollen die gesehenen und die bedeckten Theile derselben unterschieden werden. 2tens diejenigen Größen, welche nicht zu den genannten gehören, sondern blos zur Konstruktion dienen, sollen als nicht wirklich vorhanden angenommen werden und an ihren Projektionen daher keine gesehenen oder nicht gesehenen Theile bemerkt werden.

26. Auf diese Annahmen haben wir folgende Regeln gegründet, welche in allen Zeichnungen beobachtet sind.

Erstens. Die Projektionen derjenigen Gegenstände, welche wirklich im Raume vorhanden angenommen sind, werden durch volle Linien (A B. Fig. 4. Taf. I.) angegeben.

Zweytens. Die Projektionen jener Theile der genannten Gegenstände, welche entweder durch eine Projektionsebene, oder durch andere Gegenstände der nemlichen Gattung bedeckt erscheinen, und welche folglich nicht gesehen werden können, außer wenn man diese letzteren durchsichtig annimmt, werden durch punktirte Linien bezeichnet. (A′ B′. Fig. 4. Taf. I.)

Drittens. Alle blos zur Konstruktion dienenden Gegenstände, werden mit gestrichelten Linien angegeben. (A″ B″. Fig. 4. Taf. I.)

Viertens. Solche Gegenstände, die zwar als zur Konstruktion dienend betrachtet sind, die aber irgend einer besondern Rücksicht wegen von den gewöhnlichen Konstruktionen ausgezeichnet werden sollen, werden wir mit gemischten Linien (A‴ B‴ Fig. 4. Taf. I.) bezeichnen.

27. Wenn eine Projektionszeichnung blos die geometrische Darstellung eines Körpers zum Zweck hat, so pflegt man diesen Annahmen noch die folgende hinzuzufügen: Man stellt sich die projektirten Gegenstände durch Sonnenstrahlen beleuchtet vor, die unter einem Winkel von 45° geneigt, von der Linken gegen die Rechte einfallen, und man bezeichnet diejenigen Linien, welche die Konturen der im Schatten liegenden Seiten bilden, durch starke volle Striche und diejenigen Konturen, welche blos beleuchtete Seiten von einander trennen durch feinere volle Striche.

Diese Unterscheidung, welche die Deutlichkeit der Darstellung sehr erhöht, kommt aber den Zeichnungen der reinen Geometrie nicht zu, und wir haben sie deßhalb nirgends angewendet.

28. Als Beyspiel der Anwendung dieser Regeln, wollen wir einige Figuren examiniren, deren Gegenstand wir als bekannt annehmen dürfen.

Taf. II. Fig. 1. L M stellt die Projektionsaxe vor, als eine wichtige Linie einer jeden Aufgabe haben wir sie hier, so wie in allen folgenden Blättern durch eine bemerkbare volle Linie angegeben. A B, *a b* die Projektionen einer Geraden sind ebenfalls voll ausgezogen, und ebenso die Gerade *a' b*. (Art. 19.) Die projektirenden Geraden A *a*, B *b*, so wie alle übrigen Linien der Figur sind, als Konstruktionslinien mit gestrichelten Linien bezeichnet.

Fig. 2. Die Projektionsaxe L M; die Horizontalprojektion A B, und die Vertikalprojektion *a b* einer Geraden sind voll ausgezogen. Das Stück B D der Geraden A B D, welches auf den hintern Theil der Horizontalebene fällt erscheint durch die Vertikalebene bedeckt und ist deßhalb punktirt. In der Vertikalprojektion ist *b* der Punkt, in welchem die projektirte Gerade die Vertikalebene durchschneidet, dieser Punkt *b* trennt daher das gesehene Stück der Geraden von dem bedeckten, die Projektion *b d* dieses letztern ist deßhalb punktirt. Alles übrige sind Konstruktionslinien.

Fig. 3. A B, *a b*; E F, *e f* sind die Projektionen zweyer Geraden: die Figur zeigt übrigens nicht weiter Bemerkenswerthes.

Fig. 4. A B. ist der Horizontalriß und C B der Vertikalriß einer Ebene. Das oberhalb der Projektionsaxe L M, gelegene Stück des Horizontalrisses A B fällt auf den hintern Theil der Horizontalebene, und das unterhalb der L M gelegene Stück des Vertikalrisses B C liegt auf dem untern Theil der Vertikalebene; beyde sind deßhalb punktirt. D E, E F sind die Risse einer zweyten, mit der ersten parallelen Ebene. Die Stellung dieser Risse zeigt deutlich, daß die zweyte Ebene in jeder Projektion durch die erste bedeckt erscheine; daher sind die Risse derselben durchaus punktirt.

Taf. III. Fig. 3. F G, G *c* sind die Risse einer Ebene, und A B, *a b* die Projektionen einer Geraden; diese Gerade schneidet die Ebene in einem Punkte, dessen Projektionen A, *a* sind; sie kann daher in beyden Projektionen nur bis zu diesem Punkte gesehen seyn, und deßhalb sind die Projektionen A B, *a b* dieses Stückes voll ausgezogen, die Projektionen A C, *a f* des nicht gesehenen Stückes dagegen punktirt.

29. Diese Beyspiele zeigen auf hinreichende Art, wie die (Art. 26.) aufgestellten Grundsätze in Rücksicht auf die Ebene und die gerade Linie anzuwenden seyen. Sobald man eine richtige Vorstellung hat von der Lage der Ebenen und Linien und von ihren gegenseitigen Durchschnitten, so kann die Bestimmung ihrer gesehenen und bedeckten Theile keine Schwierigkeit darbieten.

Nicht ganz so einfach ist diese Aufgabe in Bezug auf die krummen Flächen, und hier kann die Voraussetzung, daß eine Fläche wirklich im Raume existire, und die daraus fließende Nothwendigkeit ihre gesehenen und bedeckten Theile aufzusuchen, zu Erörterungen veranlassen, die dem eigentlichen Gegenstande der Aufgabe zu fremd wären. Es bleibt in dem Falle der, durch Uebung in den Projektionszeichnungen zu erwerbenden Gewandheit des Arbeitenden überlassen, diese Schwierigkeiten zu umgehen, ohne der erforderlichen Deutlichkeit der Darstellung Eintrag zu thun. Wir werden (Art. 116. 117.) nochmals auf diesen Gegenstand zurückkommen und einige einfache Regeln über die Ausführung der Zeichnungen hinsichtlich der krummen Flächen geben.

Zweytes Kapitel.

Lösung verschiedener Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene.

Erste Aufgabe.

Es ist eine Gerade gegeben, mittelst ihrer beyden Projektionen; man soll die Punkte konstruiren, in denen sie die Projektionsebenen durchschneidet?

30. Auflösung. Es sey A B D (Taf. II. Fig. 2.) die Horizontalprojektion, und *a b d* die Vertikalprojektion der gegebenen Geraden.

Der Punkt, in welchem diese Gerade die vertikale Projektionsebene durchschneidet, muß als Horizontalprojektion einen Punkt der Projektionsaxe L M haben; (Art. 18.) er muß aber auch horizontal irgendwo in der Geraden A B D projektirt seyn; der Punkt B, der einzige den die Geraden L M und A B D gemein haben, ist daher die Horizontalprojektion dieses Durchschnittspunktes. Da nun die beyden Projektionen eines Punkts im Raume in einer nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen, so muß die aus B auf L M errichtete Senkrechte B *b* den fraglichen Punkt enthalten; dieser Punkt muß aber außerdem auch in der Vertikalprojektion *a b d* enthalten seyn; daher ist der Begegnungspunkt *b* der zwey Geraden B *b* und *a b d* derjenige, in welchem die gegebene Gerade die Vertikalebene durchschneidet.

Um den Punkt D zu bestimmen, in welchem dieselbe Gerade die horizontale Projektionsebene durchschneidet, wendet man aus leicht einzusehendem Grunde die ganz ähnliche Konstruktion an: man verlängert die Vertikalprojektion *a b d* der gegebenen Geraden bis sie die L M in einem Punkt *d* trifft; die aus diesem Punkt errichtete Senkrechte *d* D auf L M schneidet die Horizontalprojektion A B D der gegebenen Geraden in dem gesuchten Punkt D.