Die Fläche hängt, wie die vorhergehende, von fünfzehn willkürlichen Constanten ab.

VI.

Die gerade Linie d geht in einer Doppelebene der Fläche Φ durch einen Doppelpunct derselben.

Es setzt dies voraus, dass in jeder Doppelebene der Fläche Φ eine Anzahl Doppelpuncte derselben liegt, was leicht zu beweisen ist. In zwei beliebigen Doppelebenen der Fläche Φ liegen zwei Berührungs-Curven der zweiten Ordnung. Die Durchschnitts-Linie der beiden Doppelebenen wird von diesen Curven in denselben beiden Puncten geschnitten. Diese beiden Puncte sind Doppelpuncte der Fläche.

Der Annahme entsprechend, dass die gerade Linie d in einer Doppelebene der Fläche Φ durch einen Doppelpunct derselben hindurchgehe, erhalten wir eine Art von Complexflächen, die zu den beiden letzten aufgeführten Arten in gleicher Beziehung steht und wieder in sich selbst reciprok ist. Die Fläche ist von der dritten Ordnung und der dritten Classe. Sie besitzt einen die gerade Linie d schneidenden Doppelstrahl, welcher eine einfache Axe ist, und eine ebenfalls die gerade Linie d schneidende Doppelaxe, welche ein einfacher Strahl ist. Die gerade Linie d ist eine einfache Linie der Fläche. Als Fläche dritter Ordnung mit einem Doppelstrahl, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als Fläche dritter Classe mit einer Doppelaxe ist die Complexfläche eine Linienfläche geworden.*) Die Constanten-Anzahl hat sich auf vierzehn erniedrigt.

VII.

Die gerade Linie d ist die Durchschnittslinie zweier Doppelebenen der Fläche Φ und die Verbindungslinie zweier Doppelpuncte derselben.

Nach der vorhin gemachten Bemerkung ist die Durchschnittslinie zweier Doppelebenen auch immer die Verbindungslinie zweier Doppelpuncte. Die Complexfläche reducirt sich dadurch, dass sich von derselben, je nachdem

---

*) Solchen Flächen sind wir schon mehrfach, von ganz verschiedenen Gesichtspuncten aus, begegnet. Die Axen der Complexe einer linearen Congruenz bilden eine derartige Fläche, deren Doppelaxe unendlich weit gerückt ist und gegen den Doppelstrahl senkrecht steht (n. 86.). Eine ganz ähnliche Fläche fanden wir in der allgemeinen Theorie der Complexe zweiten Grades als den geometrischen Ort der Cylinder-Axen, welche einen Durchmesser, oder der Durchmesser, welche eine Cylinder-Axe schneiden. (n. 243, 246.)

wir sie durch Punct- oder Ebenen-Coordinaten bestimmt denken, zwei selbstständige Ebenen — die beiden Doppelebenen der Fläche Φ —, oder zwei selbstständige Puncte — die beiden Doppelpuncte derselben Fläche — absondern, auf die zweite Ordnung und die zweite Classe.*) Sie hat alle Singularitäten verloren. Insbesondere ist die Linie d eine nullfache Linie der Fläche geworden.

Indem es, im Allgemeinen, in einem gegebenen Complexe 16 Doppelebenen (16 Doppelpuncte) gibt, kann die Linie d $\frac{16.15}{2} = 120$ mal eine solche Lage annehmen, dass die ihr zugehörige Complexfläche von der zweiten Ordnung und Classe wird.

Für die Anzahl willkürlicher Constanten, von denen eine derartige Complexfläche abhängt, finden wir dreizehn. Neun derselben kommen auf die Fläche zweiten Grades und vier auf die durch die letztere noch keineswegs bestimmte gerade Linie d.

345. Eine Erniedrigung in der Ordnung oder Classe einer Complexfläche kommt dadurch zu Stande, dass sich von der Fläche, bei besondern Annahmen der geraden Linie d, einzelne Ebenen, bezüglich einzelne Puncte absondern. Wir bemerken hier beiläufig, dass auch noch auf anderem Wege eine derartige Erniedrigung der Ordnung oder Classe eintreten kann. Sei der gegebene Complex in der Art und Weise particularisirt, dass ihm alle geraden Linien angehören, welche durch einen festen auf der geraden Linie d angenommenen Punct hindurchgehen. Dann löst sich in einer beliebigen durch d hindurchgehenden Ebene die Complex-Curve in das System zweier Puncte auf, von denen einer mit dem gegebenen festen Puncte zusammenfällt und der andere eine beliebige Lage hat. Wenn wir diese Curve in Punct-Coordinaten bestimmen, tritt an die Stelle des Systems der beiden Puncte die doppelt zu zählende Verbindungslinie derselben. Es wird also die Complexfläche von einer durch die gerade Linie d gelegten Ebene, ausser in dieser selbst, in zwei zusammenfallenden geraden Linien geschnitten, welche durch einen festen, auf d gegebenen Punct hindurchgehen. Es ist die Complexfläche in einen Kegel der zweiten Ordnung ausgeartet.**) Die Erniedrigung der Ordnung von der vierten auf die zweite

*) Diese Art der Erniedrigung von Ordnung und Classe einer Complexfläche haben wir bereits in der 258. Nummer betrachtet.

**) Eine Complexfläche von dieser besonderen Art haben wir in der 292. Nummer in gemischten Coordinaten dargestellt.

erfolgt dadurch, dass sich die Fläche in das System zweier Flächen der zweiten Ordnung auflöst, die zusammenfallen.

346. Solche Complex-Flächen, die von Complex-Curven in parallelen Ebenen gebildet werden, haben wir Aequatorialflächen genannt. Wir gehen zu der Discussion dieser Aequatorialflächen und zunächst einer beschränkten Familie derselben über. Es leitet uns dabei die doppelte Absicht, einmal, an leicht und übersichtlich construirbaren Flächen eine Bestätigung der bisherigen Resultate zu finden; dann aber besonders, durch diese Flächen in etwa eine Anschauung von der Vielgestaltigkeit der Complexflächen überhaupt und dadurch von der Vertheilung der geraden Linie in einem Complexe des zweiten Grades zu gewinnen. Wir beachten im Folgenden also nicht nur, wie im Vorstehenden, die Anzahl und Lage der Singularitäten der Fläche, sondern ganz besonders die Form der Flächentheile, zwischen denen die Singularitäten den Uebergang bilden, und den gestaltlichen Character dieses Uebergangs. Wir lassen, bei diesen Untersuchungen, den Aequatorialflächen zunächst nicht ihre volle Allgemeinheit, sondern unterwerfen sie einer Anzahl vereinfachender Bedingungen. Die Möglichkeiten, welche wir dadurch ausschliessen, sind für unseren Zweck von geringerer Bedeutung, und ihre Berücksichtigung würde nur unnöthigerweise den Gang der Betrachtung compliciren. Auch lassen wir die Erzeugung der Aequatorialflächen durch umhüllende Cylinder bei Seite, und betrachten nur ihre Entstehung durch die in parallelen Ebenen fortrückende Complex-Curve. Es liegt diese Art der Bestimmung einer Fläche unserer Anschauung unvergleichlich näher als die andere durch umhüllende Cylinder.

347. Indem wir voraussetzten, dass die in den Breiten-Ebenen unendlich weit liegende gerade Linie nicht selbst dem Complexe angehöre, haben wir für die allgemeine Gleichung einer solchen Fläche in der 273. Nummer die folgende erhalten:

$$\begin{aligned} Dw^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)\,v^2 - 2(Ox + G)uv \\ + (Ex^2 + 2Ux + C)\,u^2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Es ist dabei die Coordinaten-Ebene YZ parallel zu den Breiten-Ebenen der Complexfläche genommen. Die Axe OX fällt mit dem Durchmesser des gegebenen Complexes zusammen, welcher dem Systeme der Breiten-Ebenen zugeordnet ist, und den wir als den Durchmesser der Aequatorialfläche bezeichnet haben. Endlich haben OY und OZ in YZ die Richtung zweier unter sich und zu OX conjugirter Durchmesser des Complexes.

Die Gleichung (1) enthält acht von einander unabhängige Constante, welche mit den sieben, durch welche das Coordinaten-System particularisirt ist, die fünfzehn Constanten geben, von denen eine Aequatorialfläche abhängt. Es ist der Coordinaten-Anfangspunct auf OX *) und der Winkel zwischen den Coordinaten-Axen OY und OZ noch willkürlich angenommen.

Wir wollen in dem Folgenden, der Einfachheit und Anschaulichkeit wegen, voraussetzen, dass das Coordinaten-System, welches der Gleichung (1) zu Grunde gelegt ist, ein rechtwinkliges sei, was eine zweifache Particularisation der Aequatorialfläche bedingt. Dann ist der Durchmesser der Fläche senkrecht auf der Richtung der ihm im Complexe zugeordneten parallelen Ebenen, und fällt also mit einer der drei Haupt-Axen des Complexes zusammen. (n. 236.)

348. Unsere weiteren Entwicklungen knüpfen wir zunächst an die Annahme, dass in der Gleichung (1) die beiden Constanten G und O verschwinden. Dann ist die Gleichung der Fläche, in welcher wir, unbeschadet der Allgemeinheit, $D = 1$ setzen wollen**), die folgende:

$$w^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)\,v^2 + (Ex^2 + 2Ux + C)\,u^2 = 0. \qquad (2)$$

Die in einer beliebigen Breiten-Ebene liegende Complex-Curve ist auf die beiden Coordinaten-Axen OY und OZ als auf ihre Axen bezogen. Dem Verschwinden von G und O entsprechend hat die Aequatorialfläche (2) sich dadurch particularisirt, dass die Axen ihrer Breiten-Curven gleich gerichtet sind. Dadurch nähern sich diese Aequatorialflächen dem Typus der Flächen zweiter Ordnung und werden unserer Anschauung näher gerückt. Von den vier singulären Strahlen der Fläche werden paarweise zwei parallel. Wir können sagen, dass die Flächen, welche wir betrachten, dadurch ausgezeichnet sind, dass sich ihre singulären Strahlen zu zwei auf ihrer Doppellinie schneiden.

Die Gleichung (2) enthält sechs von einander unabhängige Constante. Das rechtwinklige Coordinaten-System, auf welches dieselbe bezogen ist, ist bis auf die Lage des Anfangspunctes, der noch beliebig auf OX angenommen

*) In der angezogenen Nummer hatten wir den Anfangspunct auf OX durch die folgende Bedingung bestimmt:

$$ER = FU,$$

welche aussagt, dass die Ebene YZ durch den Mittelpunct des Complexes hindurchgeht. Wir lassen hier diese Bedingung, als für die folgenden Betrachtungen unwesentlich, fallen.

**) Die Annahme, $D = 0$, entspricht den parabolischen Aequatorialflächen, die hier ausgeschlossen bleiben.

werden kann, vollständig bestimmt. Aequatorialflächen also, die durch die Gleichung (2) dargestellt sind, hängen von elf Constanten ab, während diese Zahl im Allgemeinen fünfzehn beträgt.

Wir erhalten aus der Gleichung (1) unmittelbar die Gleichung der Fläche in Punct-Coordinaten:

$$\frac{y^2}{Ex^2+2Ux+C}+\frac{z^2}{Fx^2-2Rx+B}+1=0. \tag{3}$$

Die Fläche ist von der vierten Ordnung geblieben. Sie wird von den Coordinaten-Ebenen XY, XZ in zwei Curven zweiter Ordnung geschnitten, indem in diesen Ebenen ausser den Durchschnitts-Curven zweiter Ordnung noch je zwei singuläre Strahlen der Fläche liegen.

349. Wir wollen die Curven zweiter Ordnung, nach welchen die Aequatorialfläche von den beiden Coordinaten-Ebenen XY und XZ geschnitten wird, als die beiden Characteristiken derselben bezeichnen. Wir erhalten für dieselben, indem wir in der vorstehenden Gleichung nach einander z und y verschwinden lassen, die folgenden beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y^2+Ex^2+2Ux+C&=0,\\ z^2+Fx^2-2Rx+B&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Von den beiden Axen jedes dieser Kegelschnitte fällt die eine in die Coordinaten-Axe OX und ist die andere bezüglich OY und OZ parallel.

Wir haben in der 185. Nummer die folgenden beiden Gleichungen erhalten, um die Complex-Cylinder darzustellen, deren Seiten bezüglich den Coordinaten-Axen OZ und OY parallel sind:

$$\left.\begin{aligned} Fx^2-2Lxz+Dz^2+2Sz-2Rx+B&=0,\\ Ex^2-2Mxy+Dy^2+2Ux-2Ty+C&=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wenn wir in diesen beiden Gleichungen L, M, S und T verschwinden lassen und D der Einheit gleich setzen, so fallen sie mit den beiden Gleichungen (4) zusammen. Es wird also, wie dies auch geometrisch klar ist, die durch die Gleichung (4) dargestellte Aequatorialfläche von den beiden Complex-Cylindern, deren Seiten bezüglich OZ und OY parallel sind, nach den beiden in XY und XZ liegenden Characteristiken berührt.

Wenn die beiden Characteristiken gegeben sind, so ist die Aequatorialfläche eindeutig bestimmt und ihre geometrische Construction gegeben. Denn die beiden Gleichungen der Characteristiken enthalten zusammen genau dieselben unabhängigen Constanten, als die Gleichung der Fläche selbst. Das Princip der Eintheilung der Aequatorialflächen dieser Art ist also zu entlehnen aus der verschiedenen Natur und der gegenseitigen Lage der beiden Characteristiken.

350. Wir wollen die Ebene XZ mit der in derselben enthaltenen Characteristik so um OX drehen, dass sie mit XY zusammenfällt. Wenn wir dann durch einen beliebigen Punct der Axe OX eine Parallele zu OY ziehen, so geben die vier paarweise gleichen Stücke, welche auf dieser geraden Linie von den beiden Characteristiken abgeschnitten werden, die Grösse der beiden Halb-Axen derjenigen Complex-Curve, welche in der durch diese gerade Linie gehenden Breiten-Ebene liegt.

Wenn die Breiten-Curve eine Hyperbel oder eine imaginäre Ellipse ist und wir deren imaginäre Axen als reelle gerade Linien in derselben Weise construiren wollen, so müssen wir zu jeder Characteristik eine zweite Curve zweiter Ordnung hinzufügen, welche mit der Characteristik den Mittelpunct und die in OX fallende Axe gemein hat, während die zweite Axe an absoluter Grösse der zweiten Axe der Characteristik gleich aber imaginär oder reell ist, je nachdem die letztere reell oder imaginär ist. Nachdem die beiden Characteristiken in dieser Weise ergänzt worden sind, ist die Construction der Fläche in allen Fällen gegeben.

Wir haben die beiden Characteristiken durch Drehung um OX in dieselbe Ebene gebracht. Ihre vier Durchschnittspuncte in derselben bestimmen diejenigen beiden Breiten-Ebenen, von welchen die Aequatorialfläche in reellen Kreisen geschnitten wird. Imaginäre Kreise als Durchschnitts-Curven mit der Fläche liegen in denjenigen beiden Breiten-Ebenen, welche durch die vier Durchschnitts-Puncte der beiden Curven zweiter Ordnung gegeben sind, die wir den Characteristiken zugefügt haben. Endlich bestimmen die vier Durchschnittspuncte jedesmal einer Characteristik mit der der anderen zugehörigen Ergänzungs-Curve zwei Breiten-Ebenen, von welchen die Aequatorialfläche in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten wird.

351. Wenn wir insbesondere der Breiten-Ebene eine derjenigen vier Lagen geben, welche durch die vier Durchschnittspuncte der beiden Characteristiken mit der Axe OX bestimmt sind, so verschwindet die Grösse der einen Axe der Breiten-Curve, und in Folge dessen reducirt sich diese auf zwei in eine zusammenfallende gerade Linien. Diese geraden Linien sind die singulären Strahlen der Aequatorialfläche.

In Uebereinstimmung hiermit zerfällt die Gleichung (77) der 195. Nummer, durch welche, in dem allgemeinen Falle der Aequatorialflächen, die

Breiten-Ebenen der vier singulären Strahlen bestimmt werden, dadurch, dass K, G, O verschwinden, in die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Ex^2 + 2Ux + C &= 0, \\ Fx^2 - 2Rx + B &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und dieselben beiden Gleichungen bestimmen diejenigen Puncte des Durchmessers der Aequatorialfläche, in welchen derselbe von den beiden Characteristiken (4) geschnitten wird.

Durch den Durchschnitt der einen Characteristik mit dem Durchmesser gehen diejenigen beiden singulären Strahlen, welche, senkrecht gegen den Durchmesser, in der Ebene der anderen Characteristik liegen.

Wenn der Durchmesser der Fläche von keiner der beiden Characteristiken in reellen Puncten geschnitten wird, sind die vier singulären Strahlen sämmtlich imaginär und die Aequatorialfläche bildet ein ungetheiltes Ganzes.

Wenn der Durchmesser von einer Characteristik in reellen Puncten geschnitten wird, von der anderen nicht, so sind zwei der vier singulären Strahlen reell, zwei imaginär. Die Fläche zerfällt, indem wir die beiden äusseren Theile, welche im Unendlichen in der unendlich weit entfernten Complex-Curve zusammenstossen, als einen einzigen Flächentheil betrachten, in zwei Theile, von denen der eine endlich, der andere unendlich ist, und zwischen denen die beiden singulären Strahlen den Uebergang bezeichnen.

Wenn der Durchmesser von beiden Characteristiken in reellen Puncten geschnitten wird, so sind die vier singulären Strahlen sämmtlich reell, und die Fläche zerfällt, indem wir wieder die beiden äusseren Flächentheile als einen einzigen betrachten, in vier durch die singulären Strahlen getrennte Theile.

352. Wir können zwei Arten von singulären Strahlen unterscheiden (vergl. n. 188.). Singuläre Strahlen der ersten Art sind die Verbindungslinien zweier reeller Doppelpuncte der Fläche und bilden den Uebergang zwischen reellen Complex-Ellipsen und Complex-Hyperbeln; singuläre Strahlen der zweiten Art sind die Verbindungslinien zweier imaginärer Doppelpuncte der Fläche und bilden den Uebergang von Complex-Hyperbeln zu imaginären Complex-Ellipsen.

Die Flächentheile zwischen zwei aufeinander folgenden singulären Strahlen werden von Curven derselben Art gebildet. Denn es kann sich unter den

Breiten-Curven als Uebergang zwischen Curven verschiedener Art keine Parabel finden, weil sonst die in den Breiten-Ebenen unendlich weit liegende gerade Linie, der Annahme zuwider, dem Complexe angehörte. Je nachdem die Breiten-Curven zwischen zwei auf einander folgenden singulären Strahlen reelle Ellipsen, Hyperbeln oder imaginäre Ellipsen sind, wollen wir die Flächentheile als elliptische, hyperbolische, imaginäre hezeichnen.

Wenn ein elliptischer und ein hyperbolischer Flächentheil auf einander folgen, so stossen sie bloss in zwei Puncten des sie trennenden singulären Strahls zusammen. Diese beiden Puncte (diejenigen beiden, in welche die Complex-Curve für die bezügliche singuläre Ebene ausartet) theilen den Strahl in ein mittleres endliches und in zwei äussere, unendliche Segmente, die als eines zu betrachten sind. Das mittlere Segment gehört dem elliptischen Flächentheile an und ist als eine Ellipse anzusehen, deren eine Axe verschwunden ist. Die beiden äusseren Segmente gehören dem hyperbolischen Flächentheile an und sind als eine Hyperbel zu betrachten, deren Neben-Axe verschwunden, oder, was dasselbe heisst, deren Asymptoten-Winkel gleich Null geworden ist.

Wenn auf einen hyperbolischen Flächentheil ein imaginärer folgt, so endet der erstere nach Seiten des letzteren hin in eine unbegrenzte gerade Linie. Diese gerade Linie ist als eine Hyperbel anzusehen, deren Haupt-Axe verschwunden, oder, was dasselbe ist, deren Asymptoten-Winkel gleich π geworden ist.

353. Ein elliptischer Flächentheil wird von zwei singulären Strahlen der ersten Art begrenzt.*) Dieselben können parallel oder senkrecht zu einander sein.

In dem ersteren Falle erreicht das Verhältniss der beiden Axen der erzeugenden Ellipse, welches in den beiden Grenzlagen gleich Null ist, ein Maximum. Wenn dieses Maximum kleiner als Eins ist, nähert sich die erzeugende Ellipse, von einer der beiden Grenzlagen ausgehend, bis zu dem Maximum immer mehr einem Kreise, und entfernt sich dann, ohne ihn erreicht zu haben, von demselben immer weiter, bis sie, an der anderen Grenze, wieder in eine gerade Linie übergeht. Die grosse Axe der Ellipse bleibt immer gleich-gerichtet. Wenn das Maximum grösser als Eins ist, geht die erzeugende Ellipse zwischen den beiden Grenzlagen durch zwei Kreise hindurch. Bei diesem Durchgange vertauschen sich die Richtungen

*) Wir schliessen im Texte die Annahme aus, dass die Aequatorialfläche aus einem ungetrennten Ganzen besteht.

ihrer grossen und ihrer kleinen Axe. Die grosse Axe ist senkrecht gegen die beiden begrenzenden singulären Strahlen gerichtet. Wenn endlich das Maximum gleich Eins ist, gibt es unter den erzeugenden Ellipsen einen Kreis, der als zwei zusammenfallende anzusehen ist. Es gibt dann immer zwei Ellipsen, welche einer gegebenen ähnlich sind.

In dem zweiten Falle geht die erzeugende Ellipse auf ihrem Wege von der einen Grenzlage zur anderen durch einen einzigen Kreis hindurch. Beim Durchgange durch den Kreis vertauschen die grosse und die kleine Axe der erzeugenden Ellipse gegenseitig ihre Richtungen. Es gibt zwei Ellipsen, welche, bei gekreuzter Richtung ihrer grossen Axe, einer gegebenen Ellipse ähnlich sind.

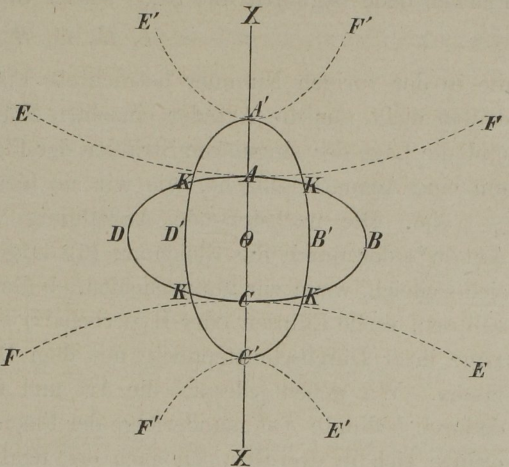
Eine gleiche Eintheilung in zwei unterschiedene Arten erhalten wir für die imaginären Flächentheile. Dieselben sind entweder durch zwei parallele oder durch zwei gegeneinander senkrechte Strahlen der zweiten Art begrenzt.

Auch bei hyperbolischen Flächentheilen müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die beiden begrenzenden singulären Strahlen parallel oder gekreuzt sind. Im ersteren Falle sind die beiden Strahlen von derselben, im zweiten Falle von verschiedener Art. Wenn die beiden Strahlen parallel sind, so ist bei allen Complex-Hyperbeln des Flächenstücks entweder die Haupt-Axe oder die Neben-Axe von endlicher Grösse. Es hängt dies davon ab, ob die beiden Strahlen von der ersten oder zweiten Art sind. Unter beiden Annahmen gibt es zwei reelle oder imaginäre oder zusammenfallende Breiten-Ebenen, von welchen der Flächentheil in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten wird. Sind dagegen die beiden das hyperbolische Flächenstück begrenzenden singulären Strahlen gekreuzt, so findet sich unter den erzeugenden Complex-Hyperbeln immer eine, aber auch nur eine, gleichseitige Hyperbel. Während in dem ersten Falle der Asymptoten-Winkel der Complex-Hyperbeln von 0, bezüglich von π, ausgehend wieder zu seinem Anfangs-Werthe zurückkehrt, wächst er in dem zweiten Falle continuirlich von dem einen dieser Werthe bis zu dem anderen.

354. Wir wollen das Vorstehende an einem Beispiele erörtern. Es seien in der Figur die beiden Ellipsen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ die beiden Characteristiken, welche wir durch Drehung um OX in eine Ebene gebracht haben. Wir ergänzen die beiden Ellipsen, in dem oben (n. 350) festgestellten Sinne, durch zwei Hyperbeln. Die beiden Hyperbeln sind $AECF$ und $A'E'C'F'$. Um anzudeuten, dass durch sie imaginäre Axen der Breiten-

Curven ihrer Grösse nach bestimmt werden, haben wir dieselben nicht ausgezogen, sondern punctirt.

Wenn wir nun, einem beliebigen x entsprechend, in der Zeichnung eine Senkrechte gegen OX ziehen, so stellen die beiden Abschnitte auf derselben, welche durch die beiden Characteristiken und ihre Ergänzungs-Curven bestimmt werden, die Axen der Complex-Curve in der durch x gegebenen Breiten-Ebene dar.



Den Scheiteltangenten in A', A, C, C' entsprechend erhalten wir die vier singulären Strahlen der Aequatorialfläche. Die Strahlen, welche durch A, bezüglich durch C gehen, sind von der ersten, die beiden anderen von der zweiten Art.

Zwischen A und C werden die Breiten-Curven Ellipsen. Unter ihnen befinden sich, den Durchschnittspuncten K entsprechend, zwei Kreise. Das elliptische Flächenstück ist von der ersten Art. An dasselbe schliessen sich, von A bis A', bezüglich von C bis C' reichend, zwei hyperbolische Flächenstücke der zweiten Art. Die beiden Breiten-Ebenen, welche gleichseitige Hyperbeln enthalten, sind diejenigen, welche durch den Durchschnitt der Ellipse $A'\ B'\ C'\ D'$ mit der Hyperbel $AECF$ bestimmt werden. Von A', bezüglich von C' ab, folgen imaginäre Breiten-Curven. Die Aequatorialfläche ist ganz zwischen die durch A' und C' gegebenen Breiten-Ebenen eingeschlossen.

355. Wir wollen im Folgenden einen elliptischen Flächentheil mit E, einen hyperbolischen mit H, einen imaginären mit I bezeichnen und durch die angehängten Marken 1, 2 unterscheiden, ob die Flächentheile durch parallele oder gegeneinander senkrechte singuläre Strahlen begrenzt sind. Die hyperbolischen Flächentheile erster Art, H_1, können entweder durch singuläre Strahlen der ersten oder durch singuläre Strahlen der zweiten Art begrenzt sein. Wir bezeichnen sie dem entsprechend bezüglich mit H_1' und H_1''. In allen solchen Fällen, wo Flächentheile nicht mehr durch sin-

guläre Strahlen von bestimmter Richtung beiderseitig begrenzt werden, gebrauchen wir einfach die Zeichen E, H, I.

Wir erhalten für jede Aequatorialfläche ein Symbol, indem wir die für die einzelnen Flächentheile derselben eingeführten Zeichen zusammenstellen, in der Art, dass wir mit dem sich in's Unendliche erstreckenden Flächentheile beginnen und auch wieder mit demselben schliessen. So stellt:

$$I_1\ H_2\ E_1\ H_2\ I_1$$

die in der vorigen Nummer betrachtete Fläche dar. Ein derartiges Symbol deutet nicht nur die Art der einzelnen Flächentheile, sondern auch die Art und die Lage der singulären Strahlen der Fläche an, so dass dasselbe hinreicht, um eine Aequatorialfläche, wie wir sie hier betrachten, zu characterisiren.

356. Die nachstehende Aufzählung von siebenzehn coordinirten Arten*) der durch die Gleichung (3) dargestellten Aequatorialflächen ergibt sich sogleich, wenn wir unterscheiden, ob die beiden Characteristiken imaginäre Ellipsen, reelle Ellipsen oder Hyperbeln**) sind, und zugleich die gegenseitige Lage ihrer Durchschnittspuncte mit dem Durchmesser der Fläche in's Auge fassen. Wir geben jedesmal die Art und Lage der Characteristiken und die dadurch bedingte Aufeinanderfolge der Flächentheile an. Die siebenzehn Arten ordnen sich in drei Gruppen nach der Realität ihrer singulären Strahlen***).

Erste Gruppe. Die singulären Strahlen sind sämmtlich imaginär.

1. Zwei imaginäre Ellipsen. I.

2. Eine imaginäre Ellipse und eine Hyperbel, deren Neben-Axe in den Durchmesser fällt. H.

3. Zwei Hyperbeln, deren Neben-Axen in den Durchmesser fallen. E.

Zweite Gruppe. Von den vier singulären Strahlen sind zwei reell, zwei imaginär.

4. Eine imaginäre Ellipse und eine reelle Ellipse. $I_1\ H_1''\ I_1$.

---

*) Von den meisten der im Folgenden genannten Flächen hat Plücker Modelle anfertigen lassen, welche die Anschauung derselben bedeutend erleichtern. F. K.

**) Wir mögen hier beiläufig hervorheben, dass der die Aequatorialfläche bestimmende Complex nothwendig ein hyperboloidischer ist, sobald sich unter den Characteristiken der Fläche eine Hyperbel befindet.

***) Ausgezeichnet durch ihre Symmetrie unter den nachstehend aufgezählten Flächen sind diejenigen, deren Characteristiken denselben Mittelpunct besitzen. Solche Flächen entsprechen der Annahme, dass alle der Axe OX in dem die Aequatorialfläche bestimmenden Complexe zugeordneten Durchmesser sich im Mittelpuncte des Complexes schneiden (vergl. n. 252.).

5. Eine imaginäre Ellipse und eine Hyperbel, deren Haupt-Axe in den Durchmesser fällt. $H_1'' \; I_1 \; H_1''$.

6. Eine reelle Ellipse und eine Hyperbel, deren Neben-Axe in den Durchmesser fällt. $H_1' \; E_1 \; H_1'$.

7. Eine Hyperbel, deren Haupt-Axe, und eine Hyperbel, deren Neben-Axe in den Durchmesser fällt. $E_1 \; H_1' \; E_1$.

Dritte Gruppe. Die singulären Strahlen sind sämmtlich reell.

A. Zwei reelle Ellipsen.

8. Die beiden Durchschnitte des Durchmessers mit der einen Ellipse folgen auf die beiden Durchschnitte desselben mit der anderen. $I_2 \, H_1'' \, I_2 \, H_1'' \, I_2$.

9. Auf dem Durchmesser der Fläche liegen die Durchschnitte mit der einen Ellipse zwischen den beiden Durchschnitten mit der anderen Ellipse.*) $I_1 H_2 E_1 H_2 I_1$.

10. Auf dem Durchmesser der Fläche folgen alternirend die Durchschnittspuncte mit der einen und die Durchschnittspuncte mit der anderen Ellipse. $I_2 \, H_2 \, E_2 \, H_2 \, I_2$.

B. Eine reelle Ellipse und eine Hyperbel, deren Haupt-Axe in den Durchmesser der Fläche fällt.

11. Der Durchmesser der Fläche wird von der Ellipse in zwei Puncten geschnitten, welche zwischen den beiden Durchschnitten mit der Hyperbel liegen. $H_1'' \; I_2 \; H_1'' \; I_2 \; H_1''$.

12. Auf dem Durchmesser der Fläche liegen die Durchschnitte mit der Ellipse innerhalb desselben Zweiges der Hyperbel. $H_2 \; I_1 \; H_2 \; E_1 \; H_2$.

13. Die Scheitel der Hyperbel liegen zwischen den Durchschnitten der Ellipse mit dem Durchmesser der Fläche. $H_1' \; E_2 \; H_1' \; E_2 \; H_1'$.

14. Von den beiden Scheiteln der Hyperbel liegt der eine ausserhalb der Ellipse, der andere innerhalb. $H_2 \; I_2 \; H_2 \; E_2 \; H_2$.

C. Zwei Hyperbeln, deren Haupt-Axen in den Durchmesser der Fläche fallen.

15. Auf dem Durchmesser liegen die beiden Scheitel der einen Hyperbel zwischen den beiden Scheiteln der anderen. $E_1 \; H_2 \; I_1 \; H_2 \; E_1$.

16. Auf dem Durchmesser folgen die Scheitel der einen Hyperbel auf die der anderen. $E_2 \; H_1' \; E_2 \; H_1' \; E_2$.

17. Auf dem Durchmesser liegt ein Scheitel jeder der beiden Hyperbeln zwischen den beiden Scheiteln der anderen. $E_2 \; H_2 \; I_2 \; H_2 \; E_2$.

---

*) Die in der 354. Nummer betrachtete Fläche.

357. Wir wollen in den nächsten Erörterungen diejenigen Fälle insbesondere hervorheben, in welchen zwei der singulären Strahlen der Aequatorialfläche in dieselbe Breiten-Ebene fallen. Es sind die entsprechenden Flächen anzusehen als Uebergangsformen zwischen jedesmal zwei der vorstehend aufgezählten siebenzehn Arten. Sie hängen von einer Constanten weniger, als die bisher betrachteten Flächen, also von zehn Constanten ab. Dadurch, dass zwei singuläre Strahlen der Fläche in dieselbe Breiten-Ebene fallen, verschwindet der zwischen denselben eingeschlossene Flächentheil. Die Breiten-Ebene bezeichnet nicht mehr, wie früher, den Uebergang zwischen einem hyperbolischen und einem elliptischen oder imaginären Flächentheil.

Die singulären Strahlen können paarweise in dieselbe Breiten-Ebene fallen; es können drei von ihnen in derselben Ebene liegen, u. s. f. Alle solche Flächen finden sich unter den verschiedenen Arten von Complexflächen wieder, die wir, in der 344. Nummer, bei der allgemeinen Classification erhielten, wenn wir annahmen, dass sich die Beziehung der geraden Linie d, welche mit dem gegebenen Complexe die Complexfläche bestimmt, zu der Fläche Φ der singulären Puncte und Ebenen des Complexes irgendwie particularisire.

Wir erhalten zunächst zwei Particularisationen der fraglichen Art, indem wir entweder annehmen können, dass zwei parallele oder dass zwei gekreuzte singuläre Strahlen in dieselbe Breiten-Ebene fallen, dass also die Aequatorialfläche einen Flächentheil der ersten oder zweiten Art verliert.

358. Es fallen zwei parallele singuläre Strahlen der Aequatorialfläche zusammen, wenn wir annehmen, dass sich eine der beiden Characteristiken in das System zweier gerader Linien aufgelöst habe. Die beiden zusammenfallenden singulären Strahlen erscheinen dann als ein Doppelstrahl der Aequatorialfläche. Durch den Doppelstrahl getrennt, schliessen sich zwei elliptische oder zwei imaginäre oder zwei in demselben Sinne geöffnete hyperbolische Flächentheile an einander an. Der Doppelstrahl liegt, im Allgemeinen, nicht seiner ganzen Erstreckung nach auf reellen Theilen der Fläche, sondern setzt sich, über diese hinaus, als isolirte gerade Linie fort. Wenn die beiden in denselben zusammenfallenden singulären Strahlen von der ersten Art sind, so bildet ein begrenztes Stück des Doppelstrahl's den Uebergang zwischen zwei elliptischen oder zwei hyperbolischen Flächentheilen. Sind sie von der zweiten Art, so bildet der immer reelle Doppelstrahl den Uebergang zwischen zwei auf einander folgenden hyperbolischen

oder imaginären Flächentheilen. Im letzteren Falle ist der Doppelstrahl eine isolirte gerade Linie.

Die Flächen, welche wir hier betrachten, sind anzusehen als Uebergangsglieder zwischen solchen, die der ersten und zweiten, oder zwischen solchen, die der zweiten und dritten Gruppe der in der 356. Nummer aufgezählten Aequatorialflächen angehören. Sie finden sich bei der allgemeinen Classification der Complexflächen, wie wir sie in der 344. Nummer gegeben haben, unter der dort mit II bezeichneten Art.

Wenn wir unterscheiden, ob das Linienpaar, in welches die eine Characteristik zerfällt, reell oder imaginär ist, ferner, ob die zweite Characteristik eine imaginäre Ellipse, oder eine Hyperbel, oder eine reelle Ellipse ist, und wenn wir ausserdem die Lage des immer reellen Durchschnitts der beiden geraden Linien, in welche die eine Characteristik sich aufgelöst hat, gegen die zweite Characteristik in's Auge fassen, erhalten wir die nachfolgende Eintheilung solcher Flächen in zwölf Arten. Wir bezeichnen dieselben der Reihe nach mit den Zahlen 18 — 29, und geben bei jeder die Aufeinanderfolge der Flächentheile und diejenigen beiden der bis jetzt aufgezählten siebenzehn Arten an, zwischen welchen dieselbe den Uebergang bildet. Den Doppelstrahl, in welchen zwei parallele singuläre Strahlen zusammengefallen sind, bezeichnen wir durch einen oder zwei verticale Striche, je nachdem er von der ersten oder zweiten Art ist. So erhalten wir das folgende Schema:

18. $I_1 \parallel I_1$. 1, 4.
19. $H_1'' \parallel H_1''$. 2, 5.
20. $H_1' \mid H_1'$. 2, 6.
21. $E_1 \mid E_1$. 3, 7.
22. $I_2 \parallel I_2\ H_1''\ I_2$. 4, 8.
23. $I_1\ H_2 H_2 \mid\ I_1$. 4, 9.
24. $H_1''\ I_2 \parallel I_2\ H_1''$. 5, 11.
25. $H_2\ I_1\ H_2 \mid H_2$. 5, 12.
26. $H_2 \parallel H_2\ E_1\ H_2$. 6, 12.
27. $H_1'\ E_2 \mid E_2\ H_1'$. 6, 13.
28. $E_1\ H_2 \parallel H_2\ E_1$. 7, 15.
29. $E_2\ H_1'\ E_2 \mid E_2$. 7, 16.

359. Es können beide Characteristiken in Systeme von zwei, reellen oder imaginären, geraden Linien ausarten. Dann erhält die Fläche, indem die parallelen singulären Strahlen zusammenfallen, zwei gekreuzte Doppelstrahlen

und wird eine Linienfläche. Sie hängt nur noch von neun Constanten ab. Derartige Flächen gehören zu der dritten bei der allgemeinen Classification der Complexflächen aufgestellten Art. Sie sind als Uebergangsfälle zwischen den zwölf vorstehend aufgezählten Fällen anzusehen. Wir unterscheiden bei ihnen drei Arten, nach der Realität der beiden Linienpaare, in welche die Characteristiken zerfallen:

30. $I_2 \parallel I_1 \parallel I_1$. 18, 22.

31. $H_2 \parallel H_2 \mid H_2$. 19, 25; 20, 26.

32. $E_2 \mid E_2 \mid E_2$. 21, 29.

360. Zwei senkrecht auf einander stehende singuläre Strahlen der Aequatorialfläche fallen in dieselbe Breitenebene, wenn wir annehmen, dass sich die beiden Characteristiken der Fläche schneiden. Es kommt dies darauf hinaus, dass sich die beiden Characteristiken, nachdem man sie durch Drehung um den Durchmesser in dieselbe Ebene gebracht hat, in einem Puncte des Durchmessers berühren. In der durch diesen Berührungspunct bestimmten Breiten-Ebene wird von den Linien des Complexes ein System zweier, auf dem Durchmesser der Fläche zusammenfallender Puncte umhüllt. Die Breiten-Ebene ist eine Doppelebene des Complexes. Die Aequatorialflächen, welche wir hier betrachten, gehören zu der vierten in der 344. Nummer aufgestellten Art von Complexflächen. Sie hängen nur noch von zehn Constanten ab. Indem sich die Doppelebene als selbstständige Ebene von der Aequatorialfläche absondert, wird diese von der dritten Ordnung und verliert ihren unendlich weit liegenden Doppelstrahl. Die Doppelebene schneidet die Fläche nach drei einfachen Strahlen, von denen der eine unendlich weit liegt und die anderen beiden sich auf dem Durchmesser schneiden.

Wir erhalten die analytische Bestätigung dieser Resultate unmittelbar aus den Gleichungen (6), durch welche wir diejenigen vier Puncte des Durchmessers der Aequatorialfläche bestimmt haben, in welchen derselbe von den vier singulären Strahlen der Fläche geschnitten wird. Wenn dieselbe eine gemeinschaftliche Wurzel, x', besitzen, können wir sie unter der folgenden Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} E\,(x-x')\,(x-x_1) &= 0, \\ F\,(x-x')\,(x-x_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Dann geht die Gleichung (3), durch welche wir die Aequatorialfläche in Punct-Coordinaten dargestellt haben, in die folgende über:

$$(x-x')\left(\frac{y^2}{E\,(x-x_1)} + \frac{z^2}{F\,(x-x_2)} + (x-x')\right) = 0. \qquad (8)$$

Der lineare Factor:

$$x - x' = 0 \tag{9}$$

entspricht der Ebene, welche sich von der Aequatorialfläche absondert, und die Gleichung:

$$\frac{y^2}{E(x-x_1)} + \frac{z^2}{F(x-x_2)} + (x-x') = 0, \tag{10}$$

welche die Fläche selbst darstellt, wird von der dritten Ordnung.

Setzen wir insbesondere x gleich x', so geht die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$\frac{y^2}{E(x'-x_1)} + \frac{z^2}{F(x'-x_2)} = 0, \tag{11}$$

eine Gleichung, welche das reelle oder imaginäre Linienpaar darstellt, nach welchem die Fläche von der durch die Gleichung (9) bestimmten Ebene, ausser in der unendlich weit liegenden Linie derselben, geschnitten wird. Es berührt die Ebene (9) die Fläche (10) in den drei Durchschnittspuncten dieser drei geraden Linien.

Die Aequatorialfläche hat zwei ihrer singulären Strahlen mit der Absonderung einer selbstständigen Ebene verloren. Es bildet diese Ebene die Grenze zwischen aufeinander folgenden elliptischen und imaginären Flächentheilen oder zwischen solchen hyperbolischen Flächentheilen, deren Hyperbeln in verschiedenem Sinne geöffnet sind. Für beide Uebergangsarten geben die Flächen zweiter Ordnung, wenn wir uns dieselben durch Curven in parallel mit sich selbst fortrückenden Ebenen erzeugt denken, ein anschauliches Beispiel.

Die beiden Characteristiken einer Aequatorialfläche, wie wir sie hier betrachten, können nur reelle Ellipsen oder solche Hyperbeln sein, deren Haupt-Axe in den Durchmesser fällt. Danach erhalten wir die folgende Aufzählung von sieben coordinirten Arten, die wir, in früherer Weise, durch Angabe ihrer Flächentheile und derjenigen unter den siebenzehn ersten Flächen, zwischen welchen sie den Uebergang bilden, characterisiren. Wir haben dabei die sich absondernde Breiten-Ebene durch ein Kreuz bezeichnet.

33. $I_2 \; H \times H \, I_2$. 8, 10.
34. $I \times E \; H_2 \, I$. 9, 10.
35. $H \, I_2 \; H \times H$. 11, 14.
36. $H_2 \; I \times E \, H_2$. 12, 14.

37. $H \times H\, E_2\, H$. 13, 14.
38. $E\, H_2\, I \times E$. 15, 17.
39. $E_2\, H \times H\, E_2$. 16, 17.

361. Wenn die Characteristiken der Fläche sich in zwei Puncten schneiden, so geht die Fläche, indem sie alle Singularitäten verliert, in eine Fläche der zweiten Ordnung über. Dann gibt es unter den Breiten-Ebenen zwei, welche Doppelebenen des die Fläche bestimmenden Complexes sind, diejenigen beiden, welche die Fläche zweiter Ordnung berühren. Diese Ebenen sind durch die Fläche zweiter Ordnung selbst gegeben, insofern sie, der Vorraussetzung nach, auf einer der drei Haupt-Axen dieser Fläche senkrecht stehn. Die Aequatorialfläche hängt also von eben so viel Constanten ab, als eine allgemeine Fläche des zweiten Grades. Und in der That finden wir für diese Constanten-Anzahl neun, eine weniger, als in dem in der vorigen Nummer behandelten Falle. Wenn wir, bei der allgemeinen Classification der Complexflächen, dreizehn Constanten für eine Complexfläche gefunden haben, welche in eine Fläche des zweiten Grades ausartet, so kamen vier der dreizehn Constanten auf die gerade Linie d, welche in keinerlei ausgezeichneter Beziehung zu der Fläche stand.

Wir gehen hier und im Folgenden nicht weiter auf diejenigen Aequatorialflächen ein, welche in Flächen der zweiten Ordnung ausarten.

362. Wir erhalten weitere Arten der hier zu betrachtenden Aequatorialflächen, wenn wir annehmen, dass eine von den zwei sich schneidenden Characteristiken sich in ein System zweier gerader Linien aufgelöst hat. Solche Aequatorialflächen hängen von neun Constanten ab. Es entspricht ihnen in der allgemeinen Classification der Complexflächen, wo wir in kein grösseres Detail eingegangen sind, keine besonders angeführte Art. Wir erhalten eine solche, wenn wir annehmen, dass die gerade Linie d, welche mit dem gegebenen Complexe die Complexfläche bestimmt, in einer Doppelebene des Complexes enthalten ist und in derselben denjenigen Kegelschnitt berührt, welchen diese Ebene mit der Fläche Φ der singulären Puncte und Ebenen des Complexes gemein hat.

Wir heben insbesondere die Singularität hervor, welche derartige Aequatorialflächen in der Breiten-Ebene besitzen, die durch den Durchschnittspunct der beiden Characteristiken hindurchgeht. In diese Breiten-Ebene fallen drei singuläre Strahlen. Es sondert sich zunächst die Breiten-Ebene von der Fläche als selbstständige Ebene ab, wodurch die Ordnung der Fläche die dritte wird und die Fläche zwei ihrer singulären Strahlen verliert. Die Aequatorialfläche hat dadurch, dass drei ihrer singulären Strahlen in dieselbe Breiten-Ebene rückten, zwei ihrer Flächentheile verloren. Der eine der beiden übrigen ist nothwendigerweise ein hyperbolischer, der andere, je nachdem das Linienpaar, in welches sich die eine Characteristik aufgelöst hat, reell oder imaginär ist, ein elliptischer oder imaginärer. In beiden Fällen wird der hyperbolische Theil nach der ganzen Erstreckung des übrig gebliebenen dritten singulären Strahls von der sich absondernden Breiten-Ebene berührt. Derjenige Punct, in welchem dieser singuläre Strahl den Durchmesser der Fläche schneidet, ist ein Doppelpunct derselben. Die Tangenten der Fläche in demselben liegen in zwei gesonderten, reellen oder imaginären Ebenen, denjenigen Ebenen, welche sich durch den singulären Strahl und die beiden geraden Linien, in welche sich die eine Characteristik aufgelöst hat, hindurchlegen lassen. Nach der Erstreckung dieser beiden geraden Linien wird die Fläche von den beiden Ebenen berührt. Als Tangential-Ebene der Aequatorialfläche im Doppelpuncte kann jede Ebene angesehen werden, welche den hindurchgehenden singulären Strahl enthält. Während sich der Kegel zweiter Ordnung, der, im Allgemeinen, von den Tangenten einer Fläche in einem Doppelpuncte gebildet wird, in unserem Falle in das System zweier Ebenen aufgelöst hat, artet der Kegel zweiter Classe, welcher, im Allgemeinen, von den Tangential-Ebenen einer Fläche in einem Doppelpuncte umhüllt wird, in unserem Falle in das System zweier umhüllter Axen aus, welche in den singulären Strahl zusammenfallen.

Sei zunächst das Linienpaar, in welches sich die eine Characteristik aufgelöst hat, reell. Dann folgt auf einen hyperbolischen Theil der Fläche ein elliptischer. Indem sich die fortrückende Breiten-Ebene von der Seite des hyperbolischen Theils her der ausgezeichneten Lage nähert, nimmt sowohl die reelle als die imaginäre Axe der in derselben enthaltenen Hyperbel immer mehr ab, doch so, dass der Asymptotenwinkel immer grösser wird und an der Grenze den Werth π erreicht. Nachdem die fortrückende Breiten-Ebene die ausgezeichnete Lage überschritten hat, enthält sie eine unendlich kleine Ellipse, deren Axen als unendlich verschieden anzusehen sind. Es ist diejenige Axe die grössere, welche in ihrer Richtung mit der Richtung des singulären Strahls übereinstimmt.

Ist das Linienpaar, in welches sich die eine Characteristik aufgelöst hat, imaginär, so folgt auf einen hyperbolischen Flächentheil ein imaginärer.

Den Uebergang hat man sich so zu denken, dass Haupt- und Neben-Axe der gegen die Grenze hin fortrückenden Hyperbel beide abnehmen, jedoch die erstere unendlich viel schneller, als die letztere. So endet der hyperbolische Theil gegen den imaginären in einer Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel gleich Null geworden ist.

Wenn wir berücksichtigen, ob das Linienpaar, in welches sich die eine Characteristik auflöst, imaginär oder reell ist, und ob die zweite Characteristik eine reelle Ellipse oder eine Hyperbel ist, deren Haupt-Axe in den Durchmesser der Fläche fällt, erhalten wir die nachstehende Aufzählung von vier Arten. Wir bezeichnen dabei die ausgezeichnete Breiten-Ebene durch einen horizontalen Strich. Die Aequatorialflächen, welche wir hier betrachten, lassen sich sowohl als Uebergangsformen zwischen solchen Flächen ansehen, deren eine Characteristik ein Linienpaar ist, welches die zweite Characteristik nicht schneidet, als auch zwischen solchen, deren Characteristiken sich schneiden, ohne dass sich eine derselben in ein Linienpaar auflöst. Sonach erhalten wir die folgende Tabelle:

40. $I_2 - H_2\, I_2$. 22, 23; 33, 34.
41. $H_2 - I_2\, H_2$, 24, 25; 35, 36.
42. $H_2 - E_2\, H_2$. 26, 27; 36, 37.
43. $E_2 - H_2\, E_2$. 28, 29; 38, 39.

Es mag schliesslich noch bemerkt werden, dass, wenn beide sich schneidende Characteristiken Linienpaare werden, die Aequatorialfläche sich auf die zweite Ordnung reducirt, indem sie eine Kegelfläche wird.

363. Es bleiben noch diejenigen Fälle zu discutiren, wo einer oder mehrere der singulären Strahlen der Fläche unendlich weit rücken.*)

Es rückt einer der singulären Strahlen unendlich weit, wenn wir annehmen, dass eine der beiden Characteristiken eine Parabel sei. Indem ein singulärer Strahl in unendliche Entfernung rückt, wird die Fläche durch die unendlich weit entfernte Ebene in zwei Theile getheilt. So lange nicht weitere Singularitäten hinzutreten, ist einer dieser Theile ein hyperbolischer, der andere ein elliptischer oder imaginärer. Eine derartige Fläche ist aufzufassen als Uebergangsform zwischen zwei der bisher aufgezählten

*) Derartige Flächen geben eine Anschauung von der Vertheilung der Linien in solchen Complexen, für welche die unendlich weit entfernte Ebene eine singuläre Ebene oder eine Doppelebene ist, d. h. in den hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Complexen.

Arten, welche eine Characteristik gemein haben, während die andere bezüglich eine reelle Ellipse und eine Hyperbel ist, deren Haupt-Axe in den Durchmesser fällt. Sie hängt von einer Constante weniger ab, als jede der beiden Flächen, zwischen welchen sie den Uebergang bildet. Wir erhalten unmittelbar die folgende Aufzählung der hier möglichen Fälle, auf deren nähere Discussion wir nicht eingehen.

44. $I_1\ H_1''$. 4, 5.
45. $H_1'\ E_1$. 6, 7.
46. $I_2\ H_1''\ I_2\ H_1''$. 8, 11.
47. $I_1\ H_2\ E_1\ H_2$. 9, 12.
48. $I_2\ H_2\ E_2\ H_2$. 10, 14.
49. $H_2\ I_1\ H_2\ E_1$. 12, 15.
50. $H_1'\ E_2\ H_1'\ E_2$. 13, 16.
51. $H_2\ I_2\ H_2\ E_2$. 14, 17.

52. $I_2 \parallel I_2\ H_1''$. 22, 24.
53. $I_1\ H_2 \mid H_2$. 23, 25.
54. $H_2 \parallel H_2\ E_1$. 26, 28.
55. $H_1'\ E_2 \mid E_2$. 27, 29.

56. $I_2\ H \times H$. 33, 35.
57. $I \times E\ H_2$. 34, 36.
58. $H_2\ I \times E$. 36, 38.
59. $H \times H\ E_2$. 37, 39.

60. $I_2 - H_2$. 40, 41.
61. $H_2 - E_2$. 42, 43.

In dem Vorstehenden kann die parabolische Characteristik überall durch das System *zweier paralleler, reeller oder imaginärer, gerader Linien* ersetzt werden. Dann erhält die Fläche einen zweiten unendlich weit liegenden Doppelstrahl. Solche Flächen können als Grenzfälle der früher bereits aufgezählten Flächen gelten, deren eine Characteristik ein Linienpaar war. Sie hängen bezüglich von einer Constante weniger ab. Wir vereinigen die verschiedenen Arten, welchen wir hier begegnen, in der folgenden Tabelle, in welcher wir den Doppelstrahl der Fläche, auch nachdem er unendlich weit gerückt ist, in früherer Weise bezeichnen, und in der wir jedesmal diejenige früher bereits genannte Art von Aequatorialflächen anführen, aus welcher sich die neue ableitet.

62. $\| I \|$. 18.
63. $\| H_1'' \|$. 19.
64. $| H_1' |$. 20.
65. $| E_1 |$. 21.
66. $\| I_2\ H_1''\ I_2 \|$. 22.
67. $| H_2\ I_1\ H_2 |$. 25.
68. $\| H_2\ E_1\ H_2 \|$. 26.
69. $| E_2\ H_1'\ E_2 |$. 29.
70. $\| I_2 \| I_2 \|$. 30.
71. $\| H_2 \| H_2 \|$. 31.
72. $| H_2 | H_2 |$. 31.
73. $| E_2 | E_2 |$. 32.

Es können beide Characteristiken der Aequatorialfläche Parabeln sein. Dann wird die unendlich weit liegende Ebene eine Doppelebene des die Aequatorialfläche bestimmenden Complexes. Sie sondert sich als selbstständige Ebene von der Fläche ab, und dadurch wird diese von der dritten Ordnung. Wir erhalten die folgende, ohne Weiteres verständliche Aufzählung:

74. $\asymp I\ H_2\ E \asymp$. 34, 38; 47, 48, 49, 51.
75. $\asymp H\ I_2\ H \asymp$. 35; 46, 51.
76. $\asymp H\ E_2\ H \asymp$. 37; 48, 50.

Endlich kann von den beiden Characteristiken die eine eine Parabel und die andere ein reelles oder imaginäres Paar paralleler gerader Linien sein. Dann erhalten wir die folgenden beiden Flächen:

77. $- I_2\ H_2 -$ 40, 41; 66, 67; 74, 75.
78. $- H_2\ E_2 -$ 42, 43; 68, 69; 74, 76.

Der Annahme entsprechend, dass beide Characteristiken in Paare reeller oder imaginärer, paralleler gerader Linien zerfallen, wird die Aequatorialfläche von der zweiten Ordnung und artet in eine Cylinderfläche aus.

364. Mit dieser Eintheilung in 78 Arten sind die verschiedenen Fälle von Aequatorialflächen, welche durch die Gleichung (3) dargestellt werden, wofern die Ordnung derselben nicht bis auf die zweite hinabsinkt, erschöpft. Alle diese Aequatorialflächen gehören den vier ersten der bei der allgemeinen Classification der Complexflächen in der 344. Nummer aufgestellten Arten an. Indem sich dieselben vor den allgemeinen zu diesen Arten gehörigen Flächen durch gestaltliche Einfachheit und Uebersichtlichkeit auszeichnen, können sie gewissermassen als Vertreter derselben gelten. Für solche

Aequatorialflächen, welche der fünften oder sechsten der in der 344. Nummer aufgestellten Arten angehören, werden wir noch einen Nachtrag zu liefern haben.

Hier ist es zunächst unsere Aufgabe, zu untersuchen, welchen Werth die Aufzählung der 78 Arten, wie wir sie gegeben haben, für die allgemeine Discussion der Aequatorialflächen hat. Die einzige particularisirende Bedingung, welcher wir im Vorstehenden die Aequatorialfläche unterworfen hatten, war die, dass wir annahmen, die Axen ihrer Breiten-Curven seien gleich gerichtet. In dem allgemeinen Falle bleibt die Aufeinanderfolge der Flächentheile, die Art der singulären Strahlen u. s. f. ganz dieselbe, wie sie unter dieser besonderen Annahme gewesen ist. Wir erhalten eine Anschauung von einer allgemeinen Aequatorialfläche, wenn wir uns die Breiten-Curven einer der bisher betrachteten Flächen in ihren Ebenen gegen einander gedreht denken.

Wir können den Aequatorialflächen, deren Breiten-Curven eine feste Axen-Richtung besitzen, die allgemeinen als gedrehte, als tordirte gegenüber stellen.

Diese Bestimmung einer allgemeinen Aequatorialfläche ist selbstverständlich nur eine annähernde. Bei der Drehung der Breiten-Curven in ihren Ebenen müssen sich deren Dimensionen entsprechend ändern, wenn die entstehende Fläche eine Aequatorialfläche sein soll. Indessen sind diese Aenderungen nur von der zweiten Ordnung, wenn die Grösse der Drehung von der ersten ist. Wir wollen die Gleichung (2) zu Grunde legen:

$$w^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)\,v^2 + (Ex^2 + 2Ux + C)\,u^2 = 0.$$

Wenn wir die Breiten-Curven in ihrer durch x bestimmten Ebene von XZ zu XY durch einen Winkel α drehen, so wird die Gleichung der von denselben gebildeten Fläche:

$$\begin{aligned} w^2 &+ (Fx^2 - 2Rx + B)\,(u \sin\alpha + v\cos\alpha)^2 \\ &+ (Ex^2 + 2Ux + C)\,(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Wir wollen den Winkel α durch die Gleichung bestimmen:

$$\sin\alpha = \frac{(ax+b)}{\sqrt{(Fx^2 - 2Rx + B) - (Ex^2 + 2Ux + C)}}\,. \tag{13}$$

Dann geht die Gleichung (12) in die folgende über:

$$\begin{aligned} w^2 &+ \bigl(Fx^2 - 2Rx + B - (ax+b)^2\bigr)\,v^2 \\ &+ 2(ax+b)\cdot\sqrt{1-(ax+b)^2}\cdot uv \\ &+ \bigl(Ex^2 + 2Ux + C - (ax+b)^2\bigr)\,u^2 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Bis auf Grössen, die in $(ax+b)$ von der zweiten Ordnung sind, können wir die in derselben vorkommende Quadratwurzel der Einheit gleich setzen. Dann wird die Gleichung der Fläche:

$$\begin{aligned} w^2 + \big(Fx^2 - 2Rx + B - (ax+b)^2\big)v^2 \\ + 2(ax+b)\,uv \\ + \big(Ex^2 + 2Ux + C - (ax+b)^2\big)u^2 = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

und stimmt mit der allgemeinen Gleichung der Aequatorialflächen, (1), der Form nach vollständig überein. Wir müssen bei dieser Gleichung selbstverständlich entweder annehmen, dass die beiden neu eingeführten Constanten a, b unendlich klein seien, oder die Betrachtung einzig an diejenigen Breiten-Curven der Aequatorialfläche anknüpfen, deren Ebenen der durch die Gleichung:

$$ax + b = 0$$

bestimmten Ebene benachbart sind.

365. Im Allgemeinen wird eine Aequatorialfläche, deren Gleichung in gemischten Coordinaten wiederum die folgende sei:

$$\begin{aligned} w^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 - 2(Ox+G)\,uv \\ + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

von den beiden Coordinaten-Ebenen XZ, XY in zwei Curven vierter Ordnung geschnitten. Diese Curven bestimmen durch ihren Durchschnitt mit dem Durchmesser der Fläche diejenigen vier Breiten-Ebenen, in welchen die singulären Strahlen liegen.

Aber die beiden Cylinder, welche die Fläche bezüglich nach OY und OZ projiciren, bleiben, nach wie vor, vom zweiten Grade. Wir denken uns dieselben durch ihre Basen bezüglich in XZ und XY gegeben. Wenn wir die Art derselben und ihre gegenseitige Lage in's Auge fassen, erhalten wir genau dieselbe Aufzählung von 78 verschiedenen Fällen, wie in der bisher behandelten Annahme, dass die Basen der beiden Cylinder die Characteristiken der Fläche seien. Nur stehen die beiden Projections-Cylinder nicht mehr in derselben ausschliesslichen Beziehung zur Fläche, wie früher. Durch ihre Durchschnitte mit dem Durchmesser der Aequatorialfläche sind nicht die Ebenen der singulären Strahlen, sondern solche Breiten-Ebenen bestimmt, in welchen von den Linien des Complexes Hyperbeln umhüllt werden, die eine bezüglich zu OY oder OZ parallele Asymptote besitzen. Für eine beliebige Breiten-Curve geben die beiden Cylinder nur vier, paarweise parallele, Tangenten.*) Es muss eine neue Bedingung hinzukommen, um die Breiten-Curve vollständig zu bestimmen.

Als solche können wir die Richtung ihrer Axen oder das Grössenverhältniss derselben nehmen.

366. Wenn wir den Winkel, den eine der beiden Axen der durch den Werth von x bestimmten Breiten-Curve mit der Coordinaten-Axe OZ bildet, durch φ bezeichnen, so hat man bekanntlich**):

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{-2(Ox + G)}{(Fx^2 - 2Rx + B) - (Ex^2 + 2Ux + C)}. \tag{16}$$

Für irgend einen Punct einer der beiden Axen ergibt sich:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{z}, \ \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{-2yz}{y^2 - z^2}.$$

Mithin kommt:

$$\frac{yz}{y^2 - z^2} = \frac{Ox + G}{(Fx^2 - 2Rx + B) - (Ex^2 + 2Ux + C)}. \tag{17}$$

Die Fläche vierter Ordnung, welche durch diese Gleichung dargestellt wird, ist der geometrische Ort für die Axen der Breiten-Curven der durch die Gleichung (1) bestimmten Aequatorialfläche. Es ist eine Linienfläche mit zwei gegeneinander senkrechten Doppellinien, von denen die eine mit dem Durchmesser der Aequatorialfläche zusammenfällt, die andere in den Breiten-Ebenen derselben unendlich weit liegt.

Wir müssen hier zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem die Constante O in der Gleichung (16) verschwindet oder nicht.

In dem ersten Falle erreicht die Drehung der Axen ein Maximum oder Minimum, welches unmittelbar dem Minimum oder Maximum des Nenners entspricht. Von $x = -\infty$ ausgehend, wo, im Allgmeinen, die Axen der Breiten-Curve den Coordinaten-Axen OY, OZ parallel sind, dreht sich das System der beiden Axen bis zu einer gewissen Grenzlage, um, von dieser aus, bei $x = +\infty$, wieder die anfängliche Lage anzunehmen. Ob das Maximum der Drehung grösser oder kleiner als 45^0 Grad sei, hängt von der Realität der Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichung ab:

$$(Fx^2 - 2Rx + B) - (Ex^2 + 2Ux + C) = 0. \tag{18}$$

---

*) Besonders hervorzuheben ist der Fall, in welchem die Basen der beiden Projections-Cylinder die beiden Durchschnittspuncte mit dem Durchmesser der Fläche gemein haben. Dann bestimmen sich die vier Ebenen, in welchen die singulären Strahlen liegen, aus Gleichungen des zweiten Grades. Wenn wir wiederum G und O verschwinden lassen, artet die Aequatorialfläche in eine Fläche des zweiten Grades aus.

**) Analytisch geometrische Entwicklungen II, n. 501.

Für gleichen Abstand einer Breiten-Ebene von derjenigen, welche der Maximal-Drehung der Axen entspricht, ist die Richtung der Axen dieselbe.

In dem zweiten Falle gibt es zwei Breiten-Ebenen, für welche die Drehung der Axen ein Maximum oder Minimum wird. Diese Breiten-Ebenen können imaginär oder reell sein. In dem letzteren Falle liegen sie in gleichem Abstande auf beiden Seiten der durch die Gleichung:

$$Ox + G = 0 \tag{19}$$

dargestellten Ebene.

Wenn die beiden Maximalwerthe imaginär sind, drehen sich die Axen der Breiten-Curve, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, um 180^0. In der durch die Gleichung (19) gegebenen Ebene beträgt die Drehung 90^0.

Wenn die beiden Maximalwerthe reell sind, drehen sich die Axen der Breiten-Curve, während x von $-\infty$ an wächst, bis zu einer gewissen Grenzlage, kehren auf ihrem Wege zurück, bis sie in der Ebene (19) ihre anfängliche Lage wieder erreichen, setzen ihre Drehung bis zu einer neuen Grenzlage fort, von der zurückkehrend sie, für $x = +\infty$, ihre ursprüngliche Richtung wieder annehmen. Die Grösse der Drehung ist für solche zwei Werthe von x dieselbe, welche Breiten-Ebenen entsprechen, die zu den beiden Grenzlagen harmonisch liegen. Wenn die Gleichung (18) in dem Falle, den wir betrachten, reelle Wurzeln hat, bestimmt dieselbe zwei zu den Grenzlagen harmonische Breiten-Ebenen, welche Complex-Curven enthalten, deren Axen gegen OY, OZ um 45^0 gedreht sind. Dann überschreitet das eine Drehungs-Maximum 45^0, das andere nicht.

Die Construction einer Breiten-Curve, deren Axen der Lage nach gegeben sind und die dem durch die beiden nach OY und OZ projicirenden Cylinder bestimmten Rechteck eingeschrieben ist, bedarf hier keiner weiteren Ausführung. Wir bemerken bloss, dass wir, in dem Falle die Seiten des Rechtecks sämmtlich reell sind, sogleich ein zweites Viereck erhalten, welches die Breiten-Curve berührt, wenn wir um das gegebene Rechteck einen Kreis beschreiben und die vier Puncte, in welchen die beiden Axen den Kreis schneiden, durch vier neue gerade Linien verbinden. Sind von den Seiten des umschriebenen Rechtecks zwei oder vier imaginär, so können wir die entsprechenden Projections-Cylinder in ähnlicher Weise ergänzen, wie wir dies in der 350. Nummer mit den beiden Characteristiken gethan haben.

367. Zur Bestimmung der beiden Asymptoten einer durch x gegebenen Breiten-Curve erhalten wir aus der Gleichung (1), indem wir w verschwinden lassen:

$$(Fx^2 - 2Rx + B)v^2 - 2(Ox + G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0.$$

Setzen wir:

$$-\frac{v}{u} = \frac{y}{z},$$

so kommt:

$$(Fx^2 - 2Rx + B)y^2 + 2(Ox + G)yz + (Ex^2 + 2Ux + C)z^2 = 0. \quad (19)_b$$

Diese Gleichung stellt eine Linienfläche der vierten Ordnung dar, welche der geometrische Ort für die Asymptoten der Breiten-Curven ist.

Bezeichnen wir die Asymptoten-Winkel durch ψ und $\pi - \psi$, die von den gleichen zugeordneten Durchmessern gebildeten Winkel durch ω und $\pi - \omega$, so ist, wenn wir eine gegebene (reelle oder imaginäre) Ellipse als eine Hyperbel oder eine gegebene Hyperbel als eine Ellipse betrachten:

$$\operatorname{tang}^2 \psi = -\sin^2 \omega \text{ *)}.$$

Wir finden für die Breiten-Curve in einer beliebigen durch x bestimmten Ebene **):

$$\operatorname{tang}^2 \psi = -\sin^2 \omega =$$
$$= \frac{4[(Ox+G)^2 - (Fx^2 - 2Rx + B)(Ex^2 + 2Ux + C)]}{(Fx^2 - 2Rx + B) - (Ex^2 + 2Ux + C)}. \quad (20)$$

Diese Gleichung zeigt, dass es, im Allgemeinen, unter den Breiten-Curven einer Aequatorialfläche vier gibt, die einem gegebenen Kegelschnitte ähnlich sind.

Zur vollständigen Bestimmung der Breiten-Curve erhalten wir für das Quadrat der Halb-Axen derselben***):

$$r^2 = -\tfrac{1}{2}[(Fx^2 - 2Rx + B) + (Ex^2 + 2Ux + C)]$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[(Fx^2 - 2Rx + B) - (Ex^2 + 2Ux + C)]^2 + 4(Ox + G)^2}. \quad (21)$$

Die vorstehenden Ausdrücke dienen bei der Berechnung der Modelle gedrehter Aequatorialflächen.

368. Wir wenden uns zu der Betrachtung derjenigen Aequatorialflächen, deren Breiten-Ebenen einen unendlich weit liegenden Doppelpunct des Complexes enthalten, das heisst, derjenigen Aequatorialflächen, welche der fünften und sechsten der in der 344. Nummer aufgestellten Arten von Complexflächen angehören.

---

*) System der analyt. Geometrie. n. 33.

**) Analytisch geometrische Entwickelungen, II, n. 490.

***) Ebenda, n. 512.

Wenn die Aequatorialfläche, wie wir zunächst annehmen wollen, der fünften Art angehört, besitzt sie drei sich in einem Puncte schneidende Doppelstrahlen, die einfache Axen sind. Einer derselben ist unendlich weit gerückt. Die beiden anderen sind unter sich und mit den Breiten-Ebenen parallel. Die Ordnung der Fläche ist die vierte, die Classe die dritte. Die Anzahl der unabhängigen Constanten, welche in die Gleichung der Fläche eingehen, ist dreizehn.

Was derartige Aequatorialflächen auszeichnet, ist, dass ihre Breiten-Curven sämmtlich Hyperbeln sind, deren eine Asymptote eine feste Richtung hat. Es ist dies zugleich die Richtung der beiden unter sich parallelen Doppelstrahlen der Fläche. Diese Richtung bezeichnet den in den Breiten-Ebenen unendlich weit liegenden Doppelpunct des Complexes.

Durch die vorstehende Bemerkung ist die allgemeine lineare Construction solcher Aequatorialflächen gegeben. Die beiden Projections-Cylinder nach OY und OZ bestimmen hier, wie in dem allgemeinen Falle, vier Tangenten einer jeden Breiten-Curve. Eine fünfte Tangente ist durch die feste Richtung der einen Asymptote gegeben. Von den dreizehn Constanten, von welchen die Fläche abhängt, kommen bei dieser Construction sechs auf die Bestimmung der Breiten-Ebenen und des Durchmessers, sechs weitere auf die beiden zu OY, OZ parallelen Projections-Cylinder, und endlich eine auf die feste Richtung der einen Asymptote.

Wir können die Gleichung solcher Flächen in eine vereinfachte Form bringen, indem wir die Ebene XZ mit derjenigen Ebene zusammenfallen lassen, welche die feste Richtung der einen Asymptote bezeichnet. Dann verschwindet in der Gleichung der Aequatorialfläche das Glied mit u^2. Nur ist es dann, im Allgemeinen, nicht gestattet, anzunehmen, dass OY und OZ die Richtung zweier zugeordneter Durchmesser des Complexes haben, also, dass die Constante K der Gleichung (3) der 163. Nummer verschwindet. Wir erhalten sonach für die Gleichung der Fläche die folgende:

$$\begin{aligned} w^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)\,v^2 \\ + 2(Kx^2 - Ox - G)\,uv = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Die beiden Puncte, in welchen der Durchmesser von den beiden zu OZ parallelen Doppelstrahlen geschnitten wird, sind durch die Gleichung bestimmt:

$$Kx^2 - Ox - G = 0. \tag{23}$$

369. In dem allgemeinen Falle der Aequatorialflächen bilden die Asymptoten der Breiten-Curven eine Linienfläche der vierten Ordnung und Classe,

für welche der Durchmesser der Fläche und die in den Breiten-Ebenen derselben unendlich weit liegende gerade Linie Doppellinien sind. Indem eine der beiden Asymptoten jeder Breiten-Curve eine feste Richtung erhält, sondert sich von dieser Linienfläche eine durch den Durchmesser hindurchgehende Ebene und ein auf der unendlich weit entfernten geraden Linie liegender Punct ab. Die Linienfläche ist, wenn wir von diesen Elementen absehen, von der dritten Ordnung und der dritten Classe geworden. Dabei bleibt der Durchmesser eine Doppelaxe der Fläche, während er ein einfacher Strahl derselben geworden ist. Ein jeder Punct desselben wird von einer reellen Erzeugenden der Linienfläche geschnitten. In jeder durch ihn hindurchgelegten Ebene sind zwei Erzeugende der Fläche enthalten, welche reell und imaginär sein und auch zusammenfallen können. Im Allgemeinen gibt es zwei Ebenen, in welchen die beiden Erzeugenden zusammenfallen. Dieselben können reell oder imaginär sein.*) Dementsprechend gibt es für die zweite Asymptote der Breiten-Curven zwei Maxima der Drehung oder nicht.

Diejenigen beiden Erzeugenden, nach welchen die Linienfläche von der durch die Gesammtheit der gleichgerichteten Asymptoten bestimmten Ebenen geschnitten wird, sind die beiden Doppelstrahlen der Aequatorialfläche. In dem Falle es für die Drehung der zweiten Asymptote ein Maximum gibt, können dieselben reell oder imaginär sein oder zusammenfallen. Gibt es für die zweite Asymptote kein Maximum, so sind die Doppelstrahlen immer reell.

Danach haben wir, indem wir vorab die besondere Annahme ausschliessen, dass die beiden Doppelstrahlen zusammenfallen, drei wesentlich verschiedene Formen bei den hieher gehörigen Aequatorialflächen zu unterscheiden.

Wenn die beiden Doppelstrahlen imaginär sind, besteht die Aequatorialfläche aus einem ungetheilten Ganzen. Es gibt unter den Breiten-Curven eine Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel ein Maximum, und eine andere, deren Asymptoten-Winkel ein Minimum ist.

Wenn die beiden Doppelstrahlen reell sind, zerfällt die Aequatorialfläche in zwei Theile, deren einer sich nach beiden Seiten hin in's Unendliche erstreckt. Wir müssen hier, wie in der 358. Nummer, zunächst zwischen Doppelstrahlen erster und zweiter Art unterscheiden. Doppelstrahlen der ersten Art sind anzusehen als Hyperbeln, deren imaginäre Axe gleich Null geworden ist. Sie sind in zwei Segmente getheilt, ein inneres, endliches

*) Ein Zusammenfallen beider setzt entweder ein Zerfallen der Linienfläche voraus oder verlangt, dass der Durchmesser der Fläche unendlich weit rücke. Beide Möglichkeiten bleiben hier ausgeschlossen.

und ein äusseres, unendliches. Nur das letztere liegt auf reellen Schalen der Fläche. Ein Doppelstrahl der zweiten Art ist anzusehen als eine Hyperbel, deren Haupt-Axe gleich Null geworden ist. Er liegt nach seiner ganzen Erstreckung auf reellen Theilen der Fläche. Beim Durchgange der Breiten-Ebene durch die Ebene eines Doppelstrahls tritt die zweite Asymptote der in ihr enthaltenen Hyperbel auf die andere Seite der ersten, festen Asymptote hinüber. Dabei erreicht der Asymptoten-Winkel, je nachdem der Doppelstrahl von der ersten oder zweiten Art ist, den Werth Null oder 180°.

Die beiden parallelen Doppelstrahlen der Fläche können von gleicher oder von verschiedener Art sein. In dem ersten Falle gibt es ein Maximum und ein Minimum der Drehung der zweiten Asymptote, in dem zweiten nicht. Die von der zweiten Asymptote gebildete Linienfläche bestimmt noch nicht, in dem ersten Falle, ob die beiden Doppelstrahlen von der ersten oder zweiten Art sind, und in dem zweiten Falle, welcher von den beiden Doppelstrahlen der ersten und welcher der zweiten Art angehört. Es bleibt das einer willkürlichen Annahme überlassen.

Ein Flächentheil, der von zwei Doppelstrahlen der ersten Art begrenzt wird, besteht aus Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel von Null an bis zu einem gewissen Maximum wächst, um dann wieder bis zum Verschwinden abzunehmen.

Ist der Flächentheil von zwei Doppelstrahlen der zweiten Art begrenzt, so besteht er aus Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel von π an bis zu einem gewissen Minimum abnimmt, um dann wieder bis π zu wachsen.

Wird endlich ein Flächentheil von zwei Doppelstrahlen verschiedener Art begrenzt, so wächst der Asymptoten-Winkel von Null an continuirlich bis zu dem anderen Grenzwerthe π.

In allen Fällen kann einer der beiden Doppelstrahlen unendlich weit rücken. Dann zerfällt die Fläche in zwei Theile, welche einmal im Endlichen und ein zweites Mal im Unendlichen zusammenstossen.

Die analytische Bestätigung der vorstehenden geometrischen Erörterungen entnehmen wir unmittelbar der Gleichung (22). Insbesondere ist der Fall, dass einer der beiden parallelen Doppelstrahlen unendlich weit rückt, durch das Verschwinden von K characterisirt.

370. Wir wenden uns zu der Betrachtung desjenigen Falles, in welchem die beiden parallelen Doppelstrahlen der Fläche zusammenfallen. Eine derartige Fläche ist der in der 362. Nummer behandelten

Art von Aequatorialflächen reciprok coordinirt. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass die in ihren Breiten-Ebenen unendlich weit liegende gerade Linie durch einen Doppelpunct des Complexes hindurchgeht und denjenigen Kegel zweiter Classe berührt, der von den dem Doppelpuncte im Complexe zugehörigen singulären Ebenen gebildet wird.

Indem die beiden Doppelstrahlen in eine gerade Linie zusammenfallen, berühren sich zwei Schalen der Fläche nach deren Erstreckung. Gemeinschaftliche Tangential-Ebene in allen ihren Puncten ist diejenige Ebene, welche durch sie und den Durchmesser hindurchgelegt werden kann. Die Tangenten in dieser Ebene umhüllen zwei auf der geraden Linie gelegenen Puncte, welche reell oder imaginär sind, je nachdem die beiden zusammenfallenden Strahlen von der ersten oder zweiten Art sind. Die beiden Puncte sind Berührungspuncte aller Ebenen, welche durch solche zwei gerade Linien hindurchgelegt werden können, welche die Scheitel der in den benachbarten Breiten-Ebenen enthaltenen Hyperbeln verbinden. Eine beliebige Ebene, die durch die gerade Linie hindurchgeht, in welche die beiden Doppelstrahlen zusammengefallen sind, berührt die Aequatorialfläche in dem auf derselben unendlich weit liegenden Doppelpuncte des Complexes.

371. Es bleibt noch der letzte Fall zu erörtern, dass die Aequatorialfläche in eine Linienfläche der dritten Ordnung und Classe ausartet. Es scheint unnöthig, auf eine nähere Discussion dieser Fläche, die im Vorstehenden bereits vielfach besprochen wurde (n. 344, 369), nochmals einzugehen. Es sei hier nur hervorgehoben, dass in diesem Falle die von den Asymptoten der Breiten-Curven gebildete Fläche ein hyperbolisches Paraboloid ist. Es leitet sich dasselbe von der in der 369. Nummer betrachteten Fläche der Asymptoten dadurch ab, dass sich von letzterer eine mit den Breiten-Ebenen parallele Ebene als selbstständige Ebene trennt. Entsprechend sind die fraglichen Aequatorialflächen dadurch characterisirt, dass, wenn wir dieselben durch eine Gleichung von der Form (22) darstellen, die beiden Ausdrücke zweiten Grades:

$$Fx^2 - 2Rx + B, \qquad Kx^2 - Ox - G$$

einen gemeinschaftlichen Factor besitzen.

Ausgezeichnet unter diesen Flächen sind diejenigen, für welche

$$Kx^2 - Ox - G$$

das Quadrat eines linearen Ausdrucks wird, und demnach der Doppelstrahl, den eine solche Fläche besitzt, mit ihrer Doppel-Axe zusammenfällt. Die in den Breiten-Ebenen einer solchen Aequatorialfläche unendlich weit liegende gerade Linie, welche in einer Doppelebene des Complexes durch einen Doppelpunct hindurchgeht, wird dann von der Curve zweiter Ordnung berührt, welche von den der Doppelebene zugeordneten singulären Puncten gebildet wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie ist eine Seite des Kegels zweiter Classe, welcher von den dem Doppelpuncte zugehörigen singulären Ebenen umhüllt wird. Es sind sonach die Linienflächen dritter Ordnung und Classe, deren Doppelstrahl und Doppelaxe zusammenfallen, als Uebergangsformen zwischen den in der 362. und der 370. Nummer angeführten Arten von Aequatorialflächen anzusehen.

372. Wir haben hiermit die verschiedenen Fälle von Aequatorialflächen, deren Breiten-Curven einen Mittelpunct besitzen, erschöpft. Es bleiben diejenigen zu discutiren, deren Breiten-Curven Parabeln sind, und die wir, entsprechend, als parabolische bezeichnet haben. Wir müssen uns hier kurz fassen und mit wenigen Andeutungen begnügen. Die allgemeine Eintheilung der Complexflächen, wie wir sie in der 344. Nummer gegeben haben, behält auch hier ihre Geltung. Der besondere Character der Fläche, also die Gruppirung ihrer Singularitäten, ist, indem wir die Erzeugung der Fläche an einen gegebenen Complex des zweiten Grades knüpfen, in allen Fällen dadurch bestimmt, dass die in den Breiten-Ebenen unendlich weit liegende gerade Linie eine Linie des Complexes ist.

Wir heben nur zwei Formen hervor, denen wir bereits im Vorhergehenden begegnet sind.

Wie sich in dem allgemeinen Falle der parabolischen Aequatorialflächen die Singularitäten gegen einander anordnen, haben wir in dem sechsten und siebenten Paragraphen des ersten Abschnitts erörtert (n. 198, 199; n. 231.). Je nachdem die vier singulären Strahlen, welche eine solche Fläche besitzt, alle imaginär sind oder nicht, bildet die Fläche ein ungetheiltes Ganzes oder zerfällt in mehrere Theile. Es bilden die singulären Strahlen den Uebergang zwischen Parabeln, welche in verschiedenem Sinne geöffnet sind.

Es kann die in den Breiten-Ebenen unendlich weit liegende gerade Linie insbesondere eine singuläre Linie des Complexes sein. Dann ist die Aequatorialfläche dadurch ausgezeichnet, dass die Axen ihrer Breiten-Curven gleich gerichtet sind.*) Von ihren vier singulären Strahlen fallen zwei mit

*) Eine derartige Aequatorialfläche haben wir in der 281. Nummer betrachtet.

der in den Breiten-Ebenen unendlich weit liegenden geraden Linien zusammen.

Wir stellen zum Schlusse die Formeln zusammen, welche bei der Bestimmung einer Parabel aus ihrer Gleichung in Linien-Coordinaten dienen*). Wir legen dabei die allgemeine Gleichung der parabolischen Aequatorialflächen zu Grunde, wie sie sich aus der Gleichung (3) der 163. Nummer ergibt, wenn wir in derselben die Constante D verschwinden lassen. Es ist dies die folgende:

$$\begin{aligned}2(Lx-S)vw+(Fx^2-2Rx+B)v^2\\+2(Mx+T)uw+2(Kx^2-Ox-G)uv\\+(Ex^2+2Ux+C)u^2=0,\end{aligned}\tag{24}$$

die wir, der Kürze wegen, unter der nachstehenden Form schreiben wollen:

$$2bvw+cv^2+2duw+2euv+fu^2=0.\tag{25}$$

Für die Richtung der Axe der Parabel erhalten wir, wenn wir den Winkel, den dieselbe mit der Coordinaten-Axe OZ bildet, durch α bezeichnen:

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{d}{b}\cdot\tag{26}$$

Die Coordinaten des Brennpunctes sind:

$$\left.\begin{aligned}y&=\frac{2be-d(c-f)}{2(b^2+d^2)},\\z&=\frac{2de+b(c-f)}{2(b^2+d^2)},\ {}^{**})\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

und der Parameter wird:

$$\Pi=\pm\frac{d^2c-2bde+b^2f}{(b^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}.\tag{28}$$

373. Die vorstehenden Nummern sind der Betrachtung der Aequatorialflächen gewidmet. Auf ganz gleiche Weise können wir die verschiedenartigen Meridianflächen discutiren. Es sei hier nur ein Punct hervorgehoben. Unter den Complex-Curven, welche eine solche Fläche erzeugen, finden sich im Allgemeinen (n. 251) zwei Parabeln, deren Ebenen reell und imaginär sein und auch zusammenfallen können. Diese Parabeln bilden den Uebergang zwischen reellen Ellipsen und Hyperbeln. Von der Art eines solchen Ueberganges erhalten wir eine Anschauung, wenn wir die Aufeinanderfolge

---

*) Analytisch geometrische Entwickelungen. II, n. 480, 506.

**) Insbesondere können wir annehmen:

$$e=0,\qquad c=f.$$

Dann rückt der Brennpunct der Parabel auf der Axe OX fort.

der Durchschnitts-Curven eines gegebenen einschaligen Hyperboloids mit einer Ebene betrachten, welche sich um eine feste, das Hyperboloid in zwei reellen Puncten schneidende gerade Linie dreht. Während also bei Aequatorialflächen ein durch zwei singuläre Strahlen begränzter Flächentheil nothwendig von Complex-Curven derselben Art gebildet wird, kann es unter den Theilen, in welche eine Meridianfläche durch ihre singulären Strahlen zerlegt wird, zwei geben, die durch verschiedenartige Complex-Curven erzeugt sind. Es begründet das eine grössere Mannigfaltigkeit in den Formen einer Meridianfläche gegenüber denjenigen, welche bei Aequatorialflächen auftreten. Von der Discussion der Aequatorialflächen steigen wir zu einer solchen der Meridianflächen auf, indem wir die beiden Ebenen, welche die Parabeln enthalten, willkürlich zwischen die Breiten-Ebenen der Aequatorialfläche einschalten. Wir können den hiermit angedeuteten Gesichtspunct nicht weiter verfolgen. Es hat uns genügt, an dem Beispiele der Aequatorialflächen gezeigt zu haben, wie leicht es im Anschlusse an die Theorie der Complexe zweiten Grades gelingt, die so vielgestaltigen Flächen dieser Complexe der geometrischen Anschauung zu unterwerfen.