welchem die Fläche Φ von der gegebenen Doppelebene berührt wird. Die vier singulären Axen fallen in zwei gerade Linien zusammen, welche in der Doppelebene liegen. Dieselben sind, wie die Linie d, Doppellinien der Fläche. Indem die Complexfläche von der Doppelebene in drei Doppellinien geschnitten wird, gehört die Doppelebene nach ihrer ganzen Erstreckung der Fläche an. Von den vier singulären Strahlen der Complexfläche haben zwei eine beliebige Lage. Die beiden anderen sind in der Doppelebene enthalten und sind in derselben unbestimmt geworden. Sie können willkürlich unter den Complex-Linien angenommen werden, die in dieser Ebene liegen. Wir erhalten also das folgende Resultat. Wenn wir die Complexfläche als von Ebenen umhüllt ansehen, bleibt sie von der vierten Classe. Sie besitzt drei, in einer Ebene liegende Doppel-Axen. Wenn wir die Fläche als von Puncten gebildet betrachten, sondert sich von ihr eine selbstständige Ebene ab. Dadurch reducirt sich die Ordnung der Fläche auf die dritte. Die sich absondernde Ebene ist eine dreifach berührende, indem sie die Fläche nach drei einfachen Strahlen schneidet. Es hat die Fläche, nach Abtrennung dieser Ebene, jeden Doppelstrahl verloren.

Solche Complexflächen hängen von fünfzehn willkürlichen Constanten ab.

V.

Die gerade Linie d geht durch einen Doppelpunct der Fläche Φ.

Während man nach dem Princip der Reciprocität aus den drei ersten Arten von Complexflächen keine neuen Arten ableiten kann, sondern diese selbst wieder erhält, führt dieses Princip von der vorstehend genannten Art zu einer neuen, ihr coordinirten. Wir erhalten dieselbe, wenn wir die gerade Linie d nicht in einer der Doppelebenen der Fläche Φ annehmen, sondern durch einen ihrer Doppelpuncte hindurchlegen. Wir finden dann eine Fläche vierter Ordnung und dritter Classe, mit drei sich in einem Puncte schneidenden Doppelstrahlen, die einfache Axen der Fläche sind.*) Die Reduction der Classe von der vierten auf die dritte kommt dadurch zu Stande, dass sich von der Fläche ein Punct — der Durchschnittspunct der drei Doppelstrahlen — als selbstständiger Ort der ersten Classe absondert. Dadurch verliert die Complexfläche ihre Doppelaxen.

*) Wir sind einer solchen Fläche in der 251. Nummer begegnet. Sie war der geometrische Ort für die Mittelpuncte solcher Complex-Curven, deren Ebenen durch den Mittelpunct des Complexes hindurchgelegt waren.

Die Fläche hängt, wie die vorhergehende, von fünfzehn willkürlichen Constanten ab.

VI.

Die gerade Linie *d* geht in einer Doppelebene der Fläche Φ durch einen Doppelpunct derselben.

Es setzt dies voraus, dass in jeder Doppelebene der Fläche Φ eine Anzahl Doppelpuncte derselben liegt, was leicht zu beweisen ist. In zwei beliebigen Doppelebenen der Fläche Φ liegen zwei Berührungs-Curven der zweiten Ordnung. Die Durchschnitts-Linie der beiden Doppelebenen wird von diesen Curven in denselben beiden Puncten geschnitten. Diese beiden Puncte sind Doppelpuncte der Fläche.

Der Annahme entsprechend, dass die gerade Linie *d* in einer Doppelebene der Fläche Φ durch einen Doppelpunct derselben hindurchgehe, erhalten wir eine Art von Complexflächen, die zu den beiden letzten aufgeführten Arten in gleicher Beziehung steht und wieder in sich selbst reciprok ist. Die Fläche ist von der dritten Ordnung und der dritten Classe. Sie besitzt einen die gerade Linie *d* schneidenden Doppelstrahl, welcher eine einfache Axe ist, und eine ebenfalls die gerade Linie *d* schneidende Doppelaxe, welche ein einfacher Strahl ist. Die gerade Linie *d* ist eine einfache Linie der Fläche. Als Fläche dritter Ordnung mit einem Doppelstrahl, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als Fläche dritter Classe mit einer Doppelaxe ist die Complexfläche eine Linienfläche geworden.*) Die Constanten-Anzahl hat sich auf vierzehn erniedrigt.

VII.

Die gerade Linie *d* ist die Durchschnittslinie zweier Doppelebenen der Fläche Φ und die Verbindungslinie zweier Doppelpuncte derselben.

Nach der vorhin gemachten Bemerkung ist die Durchschnittslinie zweier Doppelebenen auch immer die Verbindungslinie zweier Doppelpuncte. Die Complexfläche reducirt sich dadurch, dass sich von derselben, je nachdem

---

*) Solchen Flächen sind wir schon mehrfach, von ganz verschiedenen Gesichtspuncten aus, begegnet. Die Axen der Complexe einer linearen Congruenz bilden eine derartige Fläche, deren Doppelaxe unendlich weit gerückt ist und gegen den Doppelstrahl senkrecht steht (n. 86.). Eine ganz ähnliche Fläche fanden wir in der allgemeinen Theorie der Complexe zweiten Grades als den geometrischen Ort der Cylinder-Axen, welche einen Durchmesser, oder der Durchmesser, welche eine Cylinder-Axe schneiden. (n. 243, 246.)