

Die zugehörigen beiden singulären Strahlen und singulären Axen fallen in dieselbe gerade Linie zusammen: diejenige singuläre Linie, welche in dem Complexe dem Berührungspunct der Fläche Φ mit der geraden Linie d und der Tangential-Ebene in demselben zugeordnet ist. Diese Linie wird eine Doppellinie der Fläche, in dem Sinne, dass sie sowohl ein Doppelstrahl als eine Doppelsexe derselben ist. Die Complexfläche besitzt zwei sich schneidende Doppellinien. Die Beziehung der beiden Doppellinien zu der Fläche ist nicht dieselbe. Es wird die Fläche von einer jeden durch d hindurchgelegten Ebene in einer Curve der zweiten Classe geschnitten und ein jeder auf d angenommener Punct ist der Mittelpunct eines Umhüllungs-Kegels der zweiten Ordnung. Für die zweite Doppellinie vertauschen sich die Worte Ordnung und Classe.

Die Complexflächen, welche wir betrachten, sind, wie in dem allgemeinen Falle, von der vierten Ordnung und Classe. Die Zahl der willkürlichen Constanten, von welchen sie abhängen, hat sich auf sechszehn erniedrigt.

III.

Die gerade Linie d ist eine Doppeltangente der Fläche Φ .

Die vier singulären Ebenen und vier singulären Puncte der Complexfläche fallen paarweise zusammen. An Stelle der vier singulären Strahlen und vier singulären Axen der Fläche treten zwei Doppellinien derselben. Die Fläche enthält drei Doppellinien, von denen eine (d) die anderen beiden schneidet. Wenn wir durch eine der letzteren beiden eine Ebene hindurchlegen, so schneidet dieselbe die Complexfläche in einer Curve zweiter Ordnung, welche auf der anderen einen Doppelpunct hat, und die sich also in das System zweier geraden Linien aufgelöst hat. Die Complexfläche ist eine Linienfläche geworden. Ordnung und Classe derselben sind die vierte geblieben. Ihre Constanten-Anzahl beträgt fünfzehn.

IV.

Die gerade Linie d liegt in einer Doppelsebene der Fläche Φ .

Von den vier singulären Ebenen der Complexfläche fallen zwei in die Doppelsebene zusammen, während die anderen beiden eine beliebige Richtung haben. Die vier singulären Puncte fallen paarweise zusammen in die beiden Durchschnitts-Puncte der geraden Linie d mit demjenigen Kegelschnitt, nach

welchem die Fläche Φ von der gegebenen Doppelebene berührt wird. Die vier singulären Axen fallen in zwei gerade Linien zusammen, welche in der Doppelebene liegen. Dieselben sind, wie die Linie d , Doppellinien der Fläche. Indem die Complexfläche von der Doppelebene in drei Doppellinien geschnitten wird, gehört die Doppelebene nach ihrer ganzen Erstreckung der Fläche an. Von den vier singulären Strahlen der Complexfläche haben zwei eine beliebige Lage. Die beiden anderen sind in der Doppelebene enthalten und sind in derselben unbestimmt geworden. Sie können willkürlich unter den Complex-Linien angenommen werden, die in dieser Ebene liegen. Wir erhalten also das folgende Resultat. Wenn wir die Complexfläche als von Ebenen umhüllt ansehen, bleibt sie von der vierten Classe. Sie besitzt drei, in einer Ebene liegende Doppel-Axen. Wenn wir die Fläche als von Punkten gebildet betrachten, sondert sich von ihr eine selbstständige Ebene ab. Dadurch reducirt sich die Ordnung der Fläche auf die dritte. Die sich absondernde Ebene ist eine dreifach berührende, indem sie die Fläche nach drei einfachen Strahlen schneidet. Es hat die Fläche, nach Abtrennung dieser Ebene, jeden Doppelstrahl verloren.

Solche Complexflächen hängen von fünfzehn willkürlichen Constanten ab.

V.

Die gerade Linie d geht durch einen Doppelpunct der Fläche Φ .

Während man nach dem Princip der Reciprocität aus den drei ersten Arten von Complexflächen keine neuen Arten ableiten kann, sondern diese selbst wieder erhält, führt dieses Princip von der vorstehend genannten Art zu einer neuen, ihr coordinirten. Wir erhalten dieselbe, wenn wir die gerade Linie d nicht in einer der Doppelebenen der Fläche Φ annehmen, sondern durch einen ihrer Doppelpuncte hindurchlegen. Wir finden dann eine Fläche vierter Ordnung und dritter Classe, mit drei sich in einem Punkte schneidenden Doppelstrahlen, die einfache Axen der Fläche sind.*) Die Reduction der Classe von der vierten auf die dritte kommt dadurch zu Stande, dass sich von der Fläche ein Punct — der Durchschnittspunct der drei Doppelstrahlen — als selbstständiger Ort der ersten Classe absondert. Dadurch verliert die Complexfläche ihre Doppelaxen.

*) Wir sind einer solchen Fläche in der 251. Nummer begegnet. Sie war der geometrische Ort für die Mittelpuncte solcher Complex-Curven, deren Ebenen durch den Mittelpunct des Complexes hindurchgelegt waren.