Der Mittelpunct eines Complexes zweiten Grades fällt mit dem Mittelpunct der Fläche seiner singulären Puncte und Ebenen zusammen.

Damit in Uebereinstimmung rückt der Mittelpunct des Complexes unendlich weit, wenn die unendlich entfernte Ebene insbesondere eine singuläre Ebene ist, und fällt in unendlicher Entfernung mit dem derselben zugeordneten singulären Puncte zusammen, demjenigen Puncte, in welchem dieselbe die Fläche der singulären Puncte und Ebenen berührt. (Vergl. n. 279.)

Wenn die unendlich weit liegende Ebene eine Doppelebene des Complexes ist, so wird der Mittelpunct desselben unbestimmt. Sein geometrischer Ort ist eine in der unendlich weit entfernten Ebene liegende Curve der zweiten Ordnung. Diese Curve ist die Berührungs-Curve der Doppelebene mit der Fläche der singulären Puncte und Ebenen. (Vergl. n. 289.)

Wenn endlich die Beziehung der unendlich weit liegenden Ebene zu dem Complexe sich so particularisirt, dass eine jede in ihr liegende Linie eine Linie des Complexes, und in Folge dessen ein jeder ihrer Puncte ein singulärer Punct desselben ist, so kann weder von einem bestimmten Mittelpuncte des Complexes noch von einem solchen der Fläche der singulären Puncte und Ebenen mehr die Rede sein.

§ 6.

Pol einer gegebenen Ebene, Polar-Ebene, einem gegebenen Puncte mit Bezug auf den Complex zugeordnet.

324. Wir kehren zu den Betrachtungen der drei ersten und insbesondere des dritten Paragraphen dieses Abschnitts zurück. Wir haben in denselben die Beziehung des gegebenen Complexes zweiten Grades zu der unendlich weit entfernten Ebene untersucht. Es beschäftigte uns zunächst die Gesammtheit der Durchmesser des Complexes — solcher gerader Linien, welche mit Bezug auf den Complex den in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden geraden Linien als Polaren zugeordnet sind —, dann die Gesammtheit der Cylinder des Complexes — solcher Complex-Kegel, deren Mittelpuncte in der unendlich weit entfernten Ebene liegen — und der Axen dieser Cylinder — der Polar-Linien derselben mit Bezug auf die durch ihre Mittelpuncte gehende unendlich weit entfernte Ebene —. Dann betrachteten wir die von Linien des Complexes in der unendlich weit entfernten Ebene

und in solchen Ebenen, welche derselben unendlich nahe liegen, umhüllten Curven und stellten dieselben durch einen Complex von ausgezeichneter Einfachheit und characteristischer Lage gegen das Coordinaten-System, durch den Asymptoten-Complex des gegebenen, dar.

Alle diese Betrachtungen und darum auch alle Resultate, die wir gefunden haben, können wir von der unendlich weit liegenden Ebene nach bekannten Regeln, die schon im Vorstehenden ihren Ausdruck finden, auf eine beliebige Ebene des Raums übertragen. Der Grund für diese Uebertragbarkeit liegt in der Identität der analytischen Operationen, welche in dem einen wie in dem anderen Falle der geometrischen Betrachtung entsprechen.

Wir wollen die beliebig angenommene Ebene insbesondere mit einer der drei Coordinaten-Ebenen zusammenfallen lassen. Der Vertauschung der unendlich weit liegenden Ebene mit einer der Coordinaten-Ebenen entsprechend erhalten wir eine Vertauschung der Linien-Coordinaten unter sich und damit eine gegenseitige Vertauschung der Constanten in der Gleichung des gegebenen Complexes. Wir stellen im Folgenden die Regeln für diese Vertauschungen auf, und sind dann, für eine beliebige Coordinaten-Ebene, jeder weiteren analytischen Entwicklung überhoben, indem es genügt, in allen früheren Formeln nach diesen Regeln sowohl die Veränderlichen als die Constanten zu wechseln.

Bei der Uebertragung der für die unendlich weit entfernte Ebene aufgestellten Sätze auf eine beliebige Ebene erweitern wir die früher gewonnenen Resultate, insofern es uns, nach den vorhergehenden beiden Paragraphen, gestattet ist, die singulären Elemente des Complexes — die singulären Puncte, Linien und Ebenen desselben — anschaulicher, als das früher möglich war, in die geometrische Betrachtung einzuführen.

325. Wir wollen in dem Folgenden die Gleichung (V) des Complexes zweiten Grades zu Grunde legen, welche wir durch Einführung einer sechsten Veränderlichen h homogen und durch Zufügung eines Gliedes $2Vh\eta$ symmetrisch gemacht haben. Diese Gleichung ist:

$$\begin{aligned}
&Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\
&+ 2Gsh + 2Hrh + 2Irs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\
&- 2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta \\
&+ 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2Th\sigma + 2Uh\varrho = 0. \qquad \text{(V)}
\end{aligned}$$

Wir haben in der 10. Nummer für die Strahlen-Coordinaten

$$r,\ s,\ h,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

die folgenden sechs proportionirten Ausdrücke erhalten:

$$(x\tau' - x'\tau),\ (y\tau' - y'\tau),\ (z\tau' - z'\tau),\ (yz' - y'z),\ (x'z - xz'),\ (xy' - x'z).$$

Es bezeichnen dabei

$$\frac{x}{\tau},\ \frac{y}{\tau},\ \frac{z}{\tau}\ \text{und}\ \frac{x'}{\tau'},\ \frac{y'}{\tau'},\ \frac{z'}{\tau'}$$

die Coordinaten zweier, beliebig auf der geraden Linie angenommener Puncte.

Der Vertauschung der unendlich weit liegenden Ebene mit der Coordinaten-Ebene YZ entspricht die Vertauschung von

$$x \text{ mit } \tau,\ \ x' \text{ mit } \tau'.$$

Dem entsprechend werden die sechs Linien-Coordinaten:

$$r,\ s,\ h,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

bezüglich durch die folgenden ersetzt:

$$-r,\ -\eta,\ \varrho,\ -\sigma,\ h,\ -s.$$

Von dieser Vertauschung werden nicht berührt die Coefficienten:

$$A,\ D,\ R,\ U,$$

während bezüglich

$$B,\ C,\ I,\ M$$

und

$$F,\ E,\ Q,\ T$$

ohne Zeichenänderung, mit gleichzeitigem Zeichenwechsel

$$G,\ H,\ L,\ O$$

und

$$K,\ P,\ S,\ V$$

sich gegenseitig vertauschen und N sein Zeichen ändert.

Von den Ebenen-Coordinaten:

$$t,\ u,\ v,\ w$$

vertauschen sich die beiden, t und w, gegenseitig.

Insbesondere ist die Gleichung der in der unendlich weit liegenden Ebene von Linien des Complexes umhüllten Curve:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu = 0,$$

und daraus erhalten wir, nach den vorstehenden Vertauschungsregeln, für die in YZ liegende Complex-Curve, in Uebereinstimmung mit der 166. Nummer, die folgende Gleichung:

$$Dw^2 + Cu^2 + Bv^2 - 2Guv - 2Svw + 2Tuw = 0.$$

Einer Vertauschung der unendlich weit liegenden Ebene mit einer der beiden anderen Coordinaten-Ebenen, XZ oder XY, entsprechend erhalten wir vollständig analoge Vertauschungsregeln. Wir schreiben dieselben nicht hin, indem wir auf die Vertauschungsregeln der 155. Nummer zurückweisen, welche einer Vertauschung der drei Ebenen YZ, XZ, XY unter sich entsprechen.

326. Es sei eine beliebige Ebene, P, gegeben. In derselben wird von Linien des Complexes eine Curve, K, umhüllt. Die Polare, welche einer willkürlich in P angenommenen geraden Linie, a, mit Bezug auf den Complex entspricht, und die wir mit b bezeichnen wollen, schneidet die Ebene P in dem Pole der Linie a mit Bezug auf die Curve K. Denn die Polare einer geraden Linie in Bezug auf den Complex ist der geometrische Ort für die Pole derselben in Bezug auf die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen von Linien des Complexes umhüllten Curven. Hiermit in Uebereinstimmung haben wir in der 236. Nummer die Richtung des einem gegebenen Systeme paralleler Ebenen zugeordneten Durchmessers des Complexes vermöge der in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden Complex-Curve construirt.

Es seien a, a', a'' drei gerade Linien der Ebene P, welche ein in Bezug auf die Curve K sich selbst conjugirtes Dreieck bilden. Die drei zugehörigen Polaren heissen b, b', b''. Dann gehen b, b', b'' bezüglich durch den Durchschnitt von a' und a'', von a'' und a, von a und a'. Wir wollen b, b', b'' drei in Bezug auf die Ebene P einander conjugirte Polaren, oder auch kurz, weil die Ebene P fest bleibt, d r e i e i n a n d e r c o n j u g i r t e P o l a r e n nennen. Das System dreier conjugirter Polaren vertritt in dem Falle einer beliebig angenommenen Ebene das System dreier conjugirter Durchmesser in dem Falle der unendlich weit gerückten Ebene.

Die Durchschnitts-Puncte $(a'a'')$, $(a''a)$ und (aa') sind die Mittelpuncte dreier Complex-Kegel, A, A', A''. Wir bezeichnen dieselben, indem wir, wie vorhin, die Ebene P als fest betrachten, als die drei bezüglich den geraden Linien a, a', a'' zugehörigen Complex-Kegel.

In Bezug auf einen jeden Complex-Kegel, dessen Mittelpunct in P angenommen ist, ist dieser Ebene eine gerade Linie zugeordnet. Diese Linie ist der Durchschnitt derjenigen beiden Tangential-Ebenen, welche den Complex-Kegel längs der beiden Kanten berühren, nach denen er von der Ebene P geschnitten wird. Wenn die Ebene P insbesondere unendlich weit rückt, wird aus dem Complex-Kegel ein Complex-Cylinder und aus der fraglichen geraden Linie die Cylinder-Axe. Wir wollen diese gerade Linie — zum Unterschied von der Bezeichnung Polare, mit der wir diejenige gerade Linie bezeichnet haben, die einer gegebenen mit Bezug auf den Complex zugeordnet ist — als die Polar-Linie des Complex-Kegels mit Bezug auf die Ebene P, oder kurz als dessen Polar-Linie bezeichnen.

Die Polar-Linien der drei Complex-Kegel A, A', A'' seien c, c', c''. Wir nennen diese drei Polar-Linien einander conjugirt und bezüglich den gegebenen geraden Linien a, a', a'', wie deren Polaren b, b', b'', zugehörig. Eine jede Polar-Linie schneidet die ihr zugehörige Polare in einem Puncte der Ebene P.

327. Die Polare einer beliebigen geraden Linie wird von den Polar-Ebenen derselben mit Bezug auf sämmtliche Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf ihr liegen, umhüllt. Es ist also, beispielsweise, b der Durchschnitt der beiden Polar-Ebenen der geraden Linie a mit Bezug auf die beiden Complex-Kegel A' und A''. In denselben beiden Ebenen liegen aber auch bezüglich die Polar-Linien der Kegel A' und A'', die wir vorhin mit c' und c'' bezeichnet haben. Es wird somit b von c' und c'' geschnitten.

Von drei einander conjugirten Polaren schneidet jede die zu den beiden anderen zugehörigen Polar-Linien.

Es schneidet also auch jede von drei conjugirten Polar-Linien die zu den beiden anderen zugehörigen Polaren.

Wenn die drei Polaren b, b', b'' gegeben sind, lassen sich die drei Polar-Linien c, c', c'' in linearer Weise construiren. Denn eine jede derselben geht durch den Schnittpunct einer der drei Polaren mit der Ebene P und schneidet die beiden anderen. Auf dieselbe Weise bestimmen sich b, b', b'', wenn c, c', c'' gegeben sind.

Drei beliebige gerade Linien, insbesondere die drei Polaren b, b', b'', bestimmen, als Linien einer Erzeugung, ein Hyperboloid. Demselben gehören als Linien zweiter Erzeugung alle diejenigen an, welche die gegebenen drei geraden Linien schneiden. Die Polar-Linien c, c', c'' sind also Linien zweiter Erzeugung des durch die Polaren b, b', b'', als Linien der ersten Erzeugung, bestimmten Hyperboloids. Die sechs geraden Linien b, b', b'', c, c', c'' bestimmen ein dem Hyperboloide aufgeschriebenes Sechseck $bc'b''cb'c''$ (vergl. n. 109). Dieses Sechseck vertritt bei beliebiger Annahme der Ebene P das durch drei conjugirte Durchmesser und den diesen parallelen Cylinder-Axen bestimmte Centralparallelepiped in dem Falle der unendlich weit gerückten Ebene.

Die drei Ebenen (b, c), (b', c'), (b'', c''), welche die Tangential-Ebenen des in Rede stehenden Hyperboloids in den drei in P liegenden Puncten (a', a''), (a'', a), (a, a') sind, schneiden sich in einem Puncte O, dem Pole der Ebene P in Bezug auf das Hyperboloid. Wir können diesen Punct noch auf andere Arten bestimmen. Die Ebene (b, c) schneidet die Ebene P in einer geraden Linie d. Die vierte Harmonicale zu b, c und d, die wir mit e bezeichnen wollen, geht durch den gesuchten Punct. In demselben Puncte schneiden sich die drei Diagonalen des Sechsecks $bc'b''cb'c''$.

Wenn die Ebene P unendlich weit rückt, wird aus dem Puncte O der Mittelpunct des Centralparallelepipeds. Wir können den Mittelpunct eines solchen Parallelepipeds entweder als den Durchschnitt derjenigen drei Ebenen definiren, welche durch je einen Durchmesser und die ihm parallele Cylinder-Axe hindurchgehen, oder als den gemeinsamen Durchschnitt der drei Mittellinien zwischen je einem Durchmesser und der parallelen Cylinderaxe, oder endlich als den gemeinsamen Durchschnitt der Diagonalen des Centralparallelepipeds.

328. Genau dieselben Rechnungen und Betrachtungen, durch welche wir in der 245. und 246. Nummer nachgewiesen haben, dass alle Centralparallelepipeda eines gegebenen Complexes denselben Mittelpunct haben, den wir als den Mittelpunct des Complexes bezeichneten, zeigen, dass der Pol O der Ebene P in Bezug auf das durch b, b', b'' bestimmte Hyperboloid unabhängig ist von der Auswahl dieser drei conjugirten Polaren.

Der Pol der Ebene P mit Bezug auf ein durch drei conjugirte Polaren bestimmtes Hyperboloid ist von der Auswahl dieser Polaren unabhängig.

Der Punct O ist also der Ebene P durch den gegebenen Complex zugeordnet. Wir wollen ihn den Pol der Ebene P mit Bezug auf den Complex nennen.

In einem Complexe zweiten Grades ist einer gegebenen Ebene, im Allgemeinen, ein Punct in eindeutiger Weise zugeordnet.

Wir haben in der 323. Nummer nachgewiesen, dass der Mittelpunct des Complexes zusammenfällt mit dem Mittelpuncte der durch seine singulären Puncte und Ebenen bestimmten Fläche. Wir haben also den Satz:

Der Pol einer gegebenen Ebene mit Bezug auf einen Complex zweiten Grades fällt mit dem Pole derselben Ebene mit

Bezug auf die von den singulären Puncten des Complexes gebildete und von den singulären Ebenen desselben umhüllte Fläche zusammen.

329. Es sei eine beliebige Linie *a* der Ebene *P* gegeben. Die ihr zugehörige Polare sei *b*, die Polarlinie *c*. Dann haben wir die gerade Linie *e*, welche den Pol der Ebene *P* mit dem Schnittpuncte der beiden geraden Linien *b* und *c* verbindet, in der Art construirt, dass wir durch *b* und *c* eine Ebene legten und die vierte Harmonicale zu *b, c* und der Schnittlinie *d* dieser Ebene mit der Ebene *P* bestimmten. Wir untersuchen zunächst, in wie weit diese Construction ihre Gültigkeit behält, wenn die angenommene gerade Linie *a* dem Complexe angehört, insbesondere, wenn dieselbe eine singuläre Linie desselben ist.

Es sei *a* eine Linie des gegebenen Complexes. Dann fällt die Polare *b* mit ihr zusammen. Aber auch die Polar-Linie *c* ist von *a* und *b* nicht verschieden. Denn der Pol der geraden Linie *a* in Bezug auf die in *P* liegende Complex-Curve ist der Berührungspunct derselben mit dieser Curve, und der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct dieser Punct ist, berührt die Ebene *P* nach der Tangente in diesem Puncte, das heisst, nach der angenommenen geraden Linie *a*. Es fallen sonach *b* und *c*, und damit auch *d*, mit der geraden Linie *a* zusammen. Die vierte Harmonicale zu *b, c* und *d* wird unbestimmt. Die geometrische Construction der Verbindungslinie des Pols der geraden Linie *a* in Bezug auf die in *P* liegende Complex-Curve mit dem Pole der Ebene *P* in Bezug auf den Complex wird illusorisch.

Wenn die gerade Linie *a* insbesondere mit einer der vier singulären Linien zusammenfällt, welche in *P* liegen, so wird zunächst ihre Polare, *b*, unbestimmt. Dieselbe kann beliebig unter denjenigen geraden Linien angenommen werden, welche in der zugeordneten singulären Ebene durch den zugeordneten singulären Punct gehen. Dieser Punct ist der Berührungspunct der singulären Linie *a* mit der in *P* liegenden Complex-Curve. Der Complex-Kegel, welcher denselben zum Mittelpuncte hat, zerfällt in zwei sich nach der singulären Linie *a* schneidende Ebenen. Die Polar-Linie *c* wird danach, wie die Polare *b*, unbestimmt und ist einzig der Bedingung unterworfen, in derjenigen Ebene, welche zu den genannten beiden und der Ebene *P* harmonisch ist, durch den auf *a* liegenden Berührungspunct hindurchzugehen. Die gesuchte Linie *e* ist in der vierten harmonischen Ebene zu der gegebenen

Ebene P und zu den beiden Ebenen, in welchen bezüglich b und c liegen, enthalten, wird aber innerhalb derselben durch die allgemeine Construction nicht vollständig bestimmt.

330. Wenn die gerade Linie a dem gegebenen Complexe nicht angehört, sind, im Allgemeinen, die zugehörige Polare, b, und die zugehörige Polar-Linie, c, verschieden. Dem entspricht, dass sich, im Allgemeinen, drei conjugirte Polaren nicht schneiden. Nach den Erörterungen der 251. Nummer gibt es ein System dreier zugeordneter Durchmesser, welche durch den Mittelpunct des Complexes hindurchgehen. Es fallen dieselben mit den ihnen parallelen Cylinder-Axen zusammen. Entsprechend gibt es für jede Ebene drei einander zugeordnete Polaren, welche durch den Pol der Ebene hindurchgehen, und also mit den ihnen zugehörigen Polar-Linien zusammenfallen.

Wenn wir, nach der 251. Nummer, den Complex auf diejenigen drei Durchmesser, welche sich in seinem Mittelpuncte schneiden, als Coordinaten-Axen beziehen, so wird seine Gleichung die folgende:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gsh + 2Hrh + 2Irs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta \equiv \Omega = 0. \end{aligned} \tag{184}$$

Dann erhalten wir für die von den Linien desselben in der unendlich weit entfernten Ebene umhüllte Curve:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 = 0. \tag{185}$$

Für die in derselben Ebene liegende Curve desjenigen Complexes, dessen Gleichung die folgende ist:

$$-\frac{\delta\Omega}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \frac{\delta\Omega}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho} + \frac{\delta\Omega}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\eta} = 0, \tag{186}$$

finden wir:

$$DNt^2 + EOu^2 + FVv^2 = 0. \tag{187}$$

In den beiden Gleichungen (185) und (187) kommen nur noch die Quadrate der Veränderlichen vor. Es sind also die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Curven zweiter Classe auf ein in Bezug auf beide sich selbst conjugirtes Coordinaten-System bezogen.

Wir haben durch die Gleichung (186) im Verein mit der Gleichung des gegebenen Complexes die singulären Linien des letzteren bestimmt. Es sind die in der unendlich weit liegenden Ebene enthaltenen vier singulären Linien die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden durch die Gleichungen (185) und (187) dargestellten Kegelschnitte. Die drei Puncte, in welchen die Coordinaten-Axen OX, OY, OZ die unendlich weit liegende Ebene schneiden, sind also diejenigen drei Puncte, in welchen sich die Diagonalen des von den vier in dieser Ebene liegenden singulären Linien gebildeten vollständigen Vierseits schneiden. Es sind die drei Diagonalen diejenigen in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden geraden Linien, deren zugehörige Polare und Polar-Linie zusammenfallen, ohne dass sie selbst dem Complexe angehören.

Die vorstehenden Betrachtungen übertragen sich unmittelbar von der unendlich weit liegenden Ebene auf eine beliebig angenommene.

331. Für eine gegebene Ebene gibt es im Allgemeinen nur ein System dreier zugeordneter Polaren, welche sich in dem Pole der Ebene schneiden: dasjenige, welches wir in der vorhergehenden Nummer construirt haben. Diese Construction wird unbestimmt, wenn die vier singulären Linien in der angenommenen Ebene P paarweise zusammenfallen, — was eine zweifache Particularisation der Beziehung des gegebenen Complexes zu derselben verlangt. Dann ist durch die beiden geraden Linien, in welche die vier singulären Linien zusammenfallen, ein Durchschnittspunct, o, und eine gerade Linie, p, die Polare von o in Bezug auf die in P liegende Complex-Curve, bestimmt. Die Polare von p in Bezug auf den Complex geht durch den Punct o und den Pol der Ebene P in Bezug auf den Complex hindurch. Und umgekehrt geht die Polare einer jeden geraden Linie, welche sich in P durch o legen lässt, durch einen Punct der geraden Linie p und den Pol der Ebene P in Bezug auf den Complex. Es gibt dann unendlich viele Polaren, welche sich in dem Pole der Ebene P schneiden. Eine derselben ist ausgezeichnet. Die übrigen sind alle der einen conjugirt und liegen in einer durch den Pol gehenden Ebene.

Wenn alle Polaren der in P liegenden geraden Linien durch den Pol von P hindurchgehen sollen, so müssen, nach der geometrischen Construction, die wir betrachten, alle in P liegenden Linien des Complexes singuläre Linien desselben sein. Es verlangt das, so lange die gegebene Ebene keine singuläre Ebene ist, eine fünffache Particularisation der Beziehung der gegebenen Ebene zu dem Complexe. Denn es ist dazu erforderlich, entweder dass die von Linien des Complexes (186) in der gegebenen Ebene P umhüllte Curve von der in derselben Ebene liegenden Curve des gegebenen Complexes nicht verschieden sei, oder, dass eine jede Linie der Ebene P dem Complexe (186) angehöre. Ob der eine oder der andere Fall eintritt, hängt von der Wahl des überzähligen Gliedes in der Gleichung des gegebenen Complexes ab.

Wenn der gegebene Complex zweiten Grades insbesondere von der Art ist, dass seine Linien eine Fläche des zweiten Grades umhüllen, so schneiden sich die Polaren aller solchen geraden Linien, welche in einer beliebigen Ebene liegen, in dem Pole dieser Ebenen in Bezug auf den Complex, der mit dem Pole derselben in Bezug auf die Fläche zusammenfällt. Und allerdings sind alle Linien eines solchen Complexes als singuläre Linien anzusehen. Die Fläche, die in dem allgemeinen Falle der Complexe zweiten Grades von den singulären Puncten desselben gebildet und von den singulären Ebenen desselben umhüllt wird, ist in dem Falle der besonderen Complexe, die eine Fläche des zweiten Grades darstellen, von dieser letzteren nicht verschieden.

332. Wenn die gegebene Ebene P eine singuläre Ebene ist, so fällt ihr Pol mit Bezug auf den Complex, nach den Auseinandersetzungen der 279. und 323. Nummer, mit dem ihr zugeordneten singulären Puncte zusammen. Dieser Punct ist der Berührungspunct der gegebenen singulären Ebene mit der Fläche der singulären Puncte und Ebenen.

Wir überzeugen uns leicht von der Richtigkeit dieses Resultates. Die Complex-Curve in der gegebenen Ebene P hat sich, der Voraussetzung entsprechend, in das System zweier Puncte, K_1 und K_2, aufgelöst. Die Verbindungslinie derselben $(K_1 K_2)$ ist die der gegebenen singulären Ebene zugeordnete singuläre Linie. Auf derselben liegt der zugehörige singuläre Punct O, welcher der Pol der Ebene P ist.

Es sei eine beliebige gerade Linie, a, der Ebene P gegeben. Ihre Polare b schneidet die Ebene P in einem Puncte der singulären Linie $(K_1 K_2)$. Der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct dieser Schnittpunct ist, berührt die gegebene Ebene P nach $(K_1 K_2)$. Es fällt also die zu der beliebig angenommenen geraden Linie a zugehörige Polar-Linie c mit $(K_1 K_2)$ zusammen. Damit ist ausgesprochen, dass der Pol der Ebene P auf der singulären Linie $(K_1 K_2)$ zu suchen ist. Denn die durch b und c hindurch gelegte Ebene schneidet die Ebene P wieder nach c, und die vierte Harmonicale zu b, c und dieser Schnittlinie muss, weil b und c nicht selbst zusammenfallen, mit c zusammenfallen.

Um den Pol auf der singulären Linie $(K_1 K_2)$ zu bestimmen, lassen wir die beliebig angenommene gerade Linie a mit $(K_1 K_2)$ zusammenfallen.

Dann entsprechen ihr unendlich viele gerade Linien als Polaren: alle diejenigen, welche in der gegebenen Ebene P durch den zugeordneten singulären Punct, O, hindurchgehen. Damit ist der Beweis geführt. Denn die vierte Harmonicale zu solch' einer Polaren, der Polar-Linie eines Complex-Kegels, dessen Mittelpunct beliebig auf derselben angenommen ist, und der Schnittlinie der durch die Polare und die Polarlinie bestimmten Ebene mit der gegebenen, P, fällt mit der angenommenen Polaren selbst zusammen.

333. Ist die gegebene Ebene P eine Doppelebene des Complexes, so wird die Lage ihres Pols unbestimmt. Der geometrische Ort für denselben ist diejenige Curve zweiter Ordnung, nach welcher die Doppelebene die Fläche der singulären Puncte und Ebenen berührt. Die Complex-Curve in der Doppelebene hat sich in das System zweier Puncte aufgelöst, welche in einen Punct der Berührungs-Curve zweiter Ordnung zusammenfallen. Die Richtung der Verbindungslinie der beiden Puncte ist unbestimmt geworden. Eine jede Linie, welche in P durch den Punct, in welchen die beiden zusammengefallen sind, hindurchgeht, ist eine singuläre Linie. Der einer jeden derselben entsprechende singuläre Punct kann als Pol der Ebene P in Bezug auf den Complex angesehen werden. Wenn sich die singuläre Linie in P um den festen Punct dreht, beschreibt der entsprechende singuläre Punct jene Curve der zweiten Ordnung, nach welcher die Doppelebene die Fläche der singulären Puncte und Ebenen berührt.

Wir haben noch den Fall zu erwähnen, dass alle in einer gegebenen Ebene P liegende Linien dem Complexe angehören. Es kann von einem bestimmten Pole einer solchen Ebene mit Bezug auf den Complex keine Rede mehr sein. Dem entspricht, dass sich die Ebene als isolirte Ebene von der Fläche der singulären Puncte absondert, wodurch diese auf die dritte Ordnung erniedrigt wird.

334. Die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes haben wir durch einen besonders einfachen Complex, dessen Gleichung noch dadurch übersichtlicher wurde, dass wir ihn in nahe Beziehung zu dem Coordinaten-System setzten, durch den Asymptoten-Complex des gegebenen, dargestellt. In dem allgemeinen Falle erhielten wir die Gleichung des Asymptoten-Complexes, wenn wir in der Gleichung des gegebenen die drei Veränderlichen r, s, h verschwinden liessen. Dann stellte derselbe eine Kegelfläche zweiter Classe dar, deren Mittelpunct in den Coordinaten-Anfangspunct fiel und welche aus der unendlich weit entfernten Ebene die in derselben

von Linien des Complexes umhüllte Curve herausschnitt. Wenn sich die Beziehung der unendlich weit liegenden Ebene zu dem gegebenen Complex particularisirte, so mussten noch weitere Glieder, als nur die zweiter Ordnung in ϱ, σ, η, aus der Gleichung des gegebenen Complexes für die Gleichung des Asymptoten-Complexes ausgewählt werden, damit dieser mit derselben Annäherung, wie in dem allgemeinen Falle, die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes darstelle. Der Grad der Annäherung des Asymptoten-Complexes an den gegebenen Complex ist in allen Fällen der erste; das heisst, die Beziehung des Asymptoten-Complexes zu dem gegebenen Complexe bleibt unverändert, wenn wir dieselben parallel mit sich selbst gegen einander um ein endliches Stück verschieben.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für eine beliebige Ebene, insbesondere für eine jede der drei Coordinaten-Ebenen, anstellen. Wir nennen Asymptoten-Complex des gegebenen Complexes mit Bezug auf eine Coordinaten-Ebene denjenigen Complex, welcher mit dem gegebenen Complexe alle in dieser Ebene und, bis auf Grössen erster Ordnung, alle in solchen Ebenen, die von der Coordinaten-Ebene unendlich wenig verschieden sind, liegenden Complex-Linien gemein hat, und welcher unter denjenigen Complexen, die mit ihm diese Eigenschaft theilen, sowohl an und für sich als in Beziehung auf das Coordinaten-System der einfachste ist.

335. Bei der Aufstellung der Gleichung des einer Coordinaten-Ebene zugehörigen Asymptoten-Complexes, verfahren wir wie früher in dem Falle der unendlich weit entfernten Ebene. Wenn wir insbesondere die Ebene YZ auswählen, so erhalten wir zunächst, indem wir in der Gleichung des gegebenen Complexes, für welche wir die Gleichung (V) nehmen wollen, r, ϱ, η verschwinden lassen:

$$Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + 2Gsh - 2Ss\sigma - 2Th\sigma = 0. \tag{188}$$

Diese Gleichung stellt einen Complex dar, dessen Linien eine Cylinderfläche zweiter Classe umhüllen, deren Seiten OX parallel sind, und durch welche aus YZ die in dieser Ebene liegende Complex-Curve ausgeschnitten wird.

Durch passende Wahl der Coordinaten-Axen OY und OZ in der festen YZ-Ebene können wir, im Allgemeinen, die vorstehende Gleichung auf die folgende Form bringen:

$$Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 = 0. \tag{189}$$

Wenn sich dann die Complex-Curve in YZ, indem YZ eine singuläre Ebene wird, in das System zweier Puncte auflöst, so verschwindet eine der drei Constanten B, C und D. Verschwindet D, so müssen wir zu der Gleichung (189), welche in dem allgemeinen Falle den Asymptoten-Complex darstellt, aus der Gleichung des gegebenen Complexes noch diejenigen Glieder hinzunehmen, welche die Veränderliche σ in der ersten Potenz enthalten. Auf diese Art wird die Gleichung des Asymptoten-Complexes:

$$Bs^2 + Ch^2 - 2(L\eta + M\varrho)\,\sigma = 0. \tag{190}$$

Ein Glied mit $r\sigma$ tritt nicht hinzu. Denn es ist:

$$-Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = (O - N)s\varrho + (V - N)h\eta.$$

Wenn die beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve in YZ aufgelöst hat, der Annahme entsprechend, dass YZ eine Doppelebene des gegebenen Complexes sei, in einen Punct zusammenfallen, so verschwinden in der Gleichung (189) zwei der drei Constanten B, C, D. Sind B und C die beiden verschwindenden Constanten, so wird die Gleichung des Asymptoten-Complexes, indem wir aus der des gegebenen die Glieder erster Ordnung in s und h zu der Gleichung (189) hinzunehmen:

$$\begin{aligned} D\sigma^2 + 2(Ir + R\eta)s + 2(Hr + U\varrho)\,h \\ + 2(O - N)\,s\varrho + 2(V - N)\,h\eta = 0. \end{aligned} \tag{191}$$

Wenn endlich, der Annahme entsprechend, dass eine jede gerade Linie der Ebene YZ dem gegebenen Complexe angehöre, in der Gleichung (189) die drei Constanten B, C, D zugleich verschwinden, so erhalten wir für die Gleichung des Asymptoten-Complexes, indem wir aus der Gleichung des gegebenen die Glieder erster Ordnung in s, h, σ auswählen:

$$\begin{aligned} (Ir + R\eta)s + (Hr + U\varrho)h - (L\eta + M\varrho)\sigma \\ - Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = 0. \end{aligned} \tag{192}$$

Wir verfolgen hier, indem wir auf die Entwickelungen des dritten Paragraphen verweisen, diese Betrachtungen nicht weiter und gehen insbesondere nicht auf eine nähere Discussion der durch die Gleichungen (190), 191), (192) dargestellten Complexe ein.

336. Ein Linien-Complex stellt ein sich selbst reciprokes Gebilde dar, der doppelten Anordnung entsprechend, welcher seine Gleichung fähig ist, je nachdem wir die gerade Linie als Strahl oder als Axe betrachten. Einer Vertauschung der beiden Auffassungen entspricht eine Vertauschung der Coordinaten der geraden Linie unter sich. Die Gestalt der Gleichung des Complexes bleibt dabei ungeändert. Darin liegt die Berechtigung, alle im Vorstehenden enthaltenen Betrachtungen und Resultate nach den Regeln des Princips der Reciprocität von einer beliebigen Ebene auf einen beliebigen Punct zu übertragen.

Wir wollen den beliebigen Punct insbesondere mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfallen lassen. Auf ihn übertragen sich dann alle analytischen Entwickelungen und Beziehungen, welche wir für die unendlich weit entfernte Ebene aufgestellt haben, wenn wir überall Punct- und Ebenen-Coordinaten, Strahlen- und Axen-Coordinaten und, dem entsprechend, nach den Regeln der 153. Nummer, die folgenden Constanten der Complex-Gleichunng:

$$A,\ B,\ C,\qquad G,\ H,\ I,\qquad P,\ Q,\ R$$

gegenseitig mit den Constanten:

$$D,\ E,\ F,\qquad K,\ L,\ M,\qquad S,\ T,\ U$$

vertauschen.

Insbesondere haben wir für die in der unendlich weit entfernten Ebene liegende Complex-Curve die Gleichung erhalten:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu = 0.$$

Diejenige Gleichung, welche sich aus derselben nach den vorstehenden Vertauschungs-Regeln ableitet:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gyz + 2Hxz + 2Ixy = 0,$$

stellt den Complex-Kegel dar, dessen Mittelpunct der Coordinaten-Anfangspunct ist.

Wenn der beliebig anzunehmende Punct, den wir mit dem Coordinaten-Anfangspuncte haben zusammenfallen lassen, unendlich weit rückt, können wir für ihn einen beliebigen derjenigen drei Puncte wählen, in welchen die unendlich weit entfernte Ebene bezüglich von den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ geschnitten wird. Die Vertauschungs-Regeln, welche einer derartigen Annahme entsprechen, leiten sich unmittelbar aus den vorstehenden ab, wenn wir zunächst, nach den Erörterungen der 325. Nummer, die unendlich weit entfernte Ebene bezüglich durch die Coordinaten-Ebenen XZ, YZ, XY ersetzen.

337. Wir beschränken uns im Folgenden darauf, die wesentlichen Ergebnisse, welche wir früher für eine beliebige Ebene abgeleitet haben, für einen beliebigen Punct ohne weiteren Beweis auszusprechen.

Sei O der angenommene Punct. a, a', a'' seien drei beliebige durch ihn hindurchgehende gerade Linien, welche einander in Bezug auf den Complex-Kegel K, dessen Mittelpunct in O fällt, conjugirt sind. Die Polaren dieser drei geraden Linien mit Bezug auf den Complex, die wir mit b, b', b'' bezeichnen wollen, liegen bezüglich in den drei Ebenen (a', a''), (a'', a), (a, a'). Wir nennen die drei Polaren einander conjugirt. Die Polar-Linien des Punctes O in Bezug auf die in den drei Ebenen (a', a''), (a'', a), (a, a') liegenden

Complex-Curven, die c, c', c'' genannt werden mögen, heissen den drei Polaren b, b', b'' und den drei gegebenen geraden Linien a, a', a'' zugehörig. Wir bezeichnen sie als drei einander conjugirte Polar-Linien. Dann gilt zunächst der folgende Satz:

Von je drei conjugirten Polaren schneidet jede die den anderen beiden zugehörigen Polar-Linien.

Von je drei Polar-Linien schneidet also auch jede die zu den anderen beiden zugehörigen Polaren. Wenn der Punct O und drei conjugirte Polaren oder Polar-Linien gegeben sind, so lassen sich, nach diesem Satze, die zugehörigen Polar-Linien, bezüglich Polaren, linear construiren.

Drei conjugirte Polaren als Linien einer Erzeugung und die zugehörigen Polar-Linien als Linien der anderen Erzeugung bestimmen ein Hyperboloid. Die Polar-Ebene des Punctes O in Bezug auf dieses Hyperboloid ist diejenige Ebene, P, welche die drei Schnittpuncte je einer der drei conjugirten Polaren mit der ihr zugehörigen Polar-Linie enthält. Diese Ebene ändert sich nicht, wenn wir an Stelle der angenommenen drei conjugirten Polaren irgend drei andere setzen.

Die Polar-Ebene des Punctes O in Bezug auf ein durch drei conjugirte Polaren bestimmtes Hyperboloid ist von der Auswahl dieser Polaren unabhängig.

Die Ebene P ist also dem Puncte O durch den gegebenen Complex zugeordnet. Wir wollen sie die Polar-Ebene des Punctes P mit Bezug auf den Complex nennen.

In einem Complexe zweiten Grades ist einem gegebenen Puncte, im Allgemeinen, eine Ebene in eindeutiger Weise zugeordnet.

Wir können dieselbe Ebene als die Polar-Ebene des gegebenen Punctes mit Bezug auf die von den singulären Puncten des Complexes gebildete und von den singulären Ebenen desselben umhüllte Fläche construiren.

338. Wenn die angenommenen drei geraden Linien a, a', a'' nicht selbst dem Complexe angehören, so schneiden sich, im Allgemeinen, ihre zugehörigen Polaren nicht. Solcher zugeordneter Polaren, welche sich schneiden, und die also mit ihren zugehörigen Polar-Linien in die Polar-Ebene des gegebenen Punctes zusammenfallen, gibt es, im Allgemeinen, nur ein System. Die entsprechenden drei geraden Linien a, a', a'' sind leicht zu construiren.

Durch den gegebenen Punct O gehen vier singuläre Linien des Complexes hindurch. Die drei Durchschnitts-Linien je zweier solcher Ebenen, welche zusammen die vier singulären Linien enthalten, sind die gesuchten.

Einer doppelten Particularisation der Beziehung des Complexes zweiten Grades zu dem gegebenen Puncte entsprechend, können die vier singulären Linien, welche durch denselben hindurchgehen, paarweise zusammenfallen. Dann schneiden sich innerhalb der Polar-Ebene P des Punctes O die Polaren aller solcher gerader Linien, welche in der Ebene, die die beiden singulären Linien enthält, durch O hindurchgehen, in einem Puncte, demjenigen Puncte, in welchem die Polar-Ebene P von der Polar-Linie der genannten Ebene in Bezug auf den Complex-Kegel, dessen Mittelpunct in O fällt, geschnitten wird. Und auch die Polare dieser letzteren Linie fällt in die Ebene P. Sie ist die Durchschnitts-Linie derselben mit der Ebene, welche durch die beiden singulären Linien hindurchgelegt worden ist.

Eine fünffache Particularisation ist erforderlich, wenn alle Polaren in der Polar-Ebene P enthalten sein sollen. Dann fällt eine jede Polare mit der ihr zugehörigen Polar-Linie zusammen. Es verlangt dies, dass alle durch den Punct O hindurchgehenden Complex-Linien singuläre Linien desselben seien. Diese Bedingung ist insbesondere in dem Falle derjenigen Complexe erfüllt, deren Linien eine Fläche des zweiten Grades umhüllen. Alle Linien eines derartigen Complexes sind als singuläre Linien desselben anzusehen. Die Polar-Ebene eines beliebigen Punctes in Bezug auf solch' einen Complex fällt mit der Polar-Ebene desselben in Bezug auf die von demselben umhüllte Fläche zusammen. Die letztere vertritt die Fläche vierter Ordnung und Classe, welche in dem allgemeinen Falle durch die singulären Puncte und Ebenen des Complexes bestimmt wird.

339. Wenn der gegebene Punct O insbesondere ein singulärer Punct ist, fällt seine Polar-Ebene mit der zugeordneten singulären Ebene zusammen. Es ist dieselbe die Tangential-Ebene der Fläche der singulären Puncte und Ebenen in dem gegebenen singulären Puncte.

Ist der gegebene Punct O ein Doppelpunct des Complexes, so wird seine Polar-Ebene unbestimmt. Sie kann beliebig unter den umhüllenden Ebenen eines Kegels zweiter Classe, der den angenommenen Punct zum Mittelpuncte hat, ausgewählt werden. Der Punct O ist dann ein Doppelpunct der Fläche der singulären Puncte und Ebenen. Die Kegelfläche zweiter Classe, die von seinen Polar-Ebenen umhüllt wird, ist der Tangential-Kegel der Fläche im Doppelpunct.

Es können endlich alle durch den Punct O hindurchgehenden geraden Linien dem Complexe angehören. Dann kann von einer bestimmten Polar-Ebene desselben in Bezug auf den Complex keine Rede mehr sein. Dem entspricht, dass sich der Punct als isolirter Punct von der Fläche der singulären Ebenen absondert, wodurch diese auf die dritte Classe reducirt wird.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass in dem allgemeinen Falle der Complexe zweiten Grades nicht, wie bei den Flächen zweiten Grades das Entsprechen der Polar-Ebene zu dem gegebenen Punct ein reciprokes ist. Wenn der Pol der Polar-Ebene mit Bezug auf den Complex wieder mit dem anfänglich gegebenen Puncte zusammenfallen soll, so ist eine dreifache Particularisation der Lage der Ebene zu dem Complexe nothwendig. Es gibt also, im Allgemeinen, in einem gegebenen Complexe nur eine endliche Anzahl von Puncten und Ebenen, welche sich gegenseitig in Bezug auf den Complex entsprechen.

340. Wir haben diejenigen Linien des Complexes, welche in einer gegebenen Ebene oder in deren Nähe liegen, durch den Asymptoten-Complex desselben in Bezug auf die gegebene Ebene dargestellt. Auf ähnliche Weise bestimmen wir diejenigen geraden Linien, welche in dem Complexe durch einen gegebenen Punct und alle ihm benachbarten hindurchgehen.

Sei der gegebene Punct der Anfangspunct der Coordinaten. Dann erhalten wir für den Asymptoten-Complex des gegebenen Complexes in Bezug auf denselben, indem wir in der Gleichung des letzteren die Veränderlichen ϱ, σ, η, sowie erste Potenzen von r, s, h gegen zweite Potenzen derselben vernachlässigen:

$$Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 + 2Gsh + 2Hrh + 2Irs = 0. \tag{193}$$

Diese Gleichung stellt eine in der unendlich weit liegenden Ebene enthaltene Curve der zweiten Ordnung dar. Diejenigen geraden Linien, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct gehen und diese Curve schneiden, gehören dem gegebenen Complex an.

Durch schickliche Wahl der Richtung der Coordinaten-Axen können wir die vorstehende Gleichung (193) auf die Form bringen:

$$Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 = 0. \tag{194}$$

Wenn dann der Coordinaten-Anfangspunct insbesondere ein singulärer Punct des Complexes wird, verschwindet eine der drei Constanten A, B, C. Sei A die verschwindende Constante. Dann müssen wir in der Gleichung des Asymptoten-Complexes, damit derselbe mit der gleichen Annäherung, wie früher, die Linien des gegebenen in der Nachbarschaft des Coordinaten-Anfangspunctes darstelle, neben den Gliedern zweiter Ordnung in s und h die erster Ordnung in r aus der Gleichung des gegebenen Complexes beibehalten. Wir finden so:

$$Bs^2 + Ch^2 + 2(P\varrho + Q\eta)r = 0. \tag{195}$$

Ein Glied in $r\sigma$ tritt nicht hinzu, weil:

$$-Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = (O-N)\,s\varrho + (V-N)h\eta.$$

Verschwinden gleichzeitig zwei der drei Constanten A, B, C, etwa B und C, dem Falle entsprechend, dass der Coordinaten-Anfangspunct ein Doppelpunct des Complexes wird, so erhalten wir, indem wir neben zweiten Potenzen von r erste Potenzen von s und h berücksichtigen müssen, die folgende Gleichung des Asymptoten-Complexes:

$$\begin{gathered} Ar^2 + 2(R\eta - S\sigma)s + 2(-T\sigma + U\varrho)h \\ + 2(O-N)s\varrho + 2(V-N)h\eta = 0. \end{gathered} \tag{196}$$

Wenn endlich alle durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien dem Complexe angehören, und, dementsprechend, A, B, C zugleich verschwinden, wird die Gleichung des Asymptoten-Complexes:

$$\begin{gathered} (P\varrho + Q\eta)r + (R\eta - S\sigma)s + (-T\sigma + U\varrho)\,h \\ -Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = 0. \end{gathered} \tag{197}$$

Es ist dies dieselbe Gleichung, welche wir in der 292. Nummer gefunden hatten, um die unendlich weit entfernten Linien des gegebenen Complexes in dem Falle darzustellen, dass in der Gleichung desselben die Glieder zweiter Ordnung in den Veränderlichen ϱ, σ, η fehlten.

Aehnliche Betrachtungen, wie für den Coordinaten-Anfangspunct, können wir für einen beliebigen derjenigen drei Puncte anstellen, die auf den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ unendlich weit gerückt sind.

341. Wir brechen hier die vorstehenden Entwickelungen ab, deren Zweck die Discussion der allgemeinen Gleichung der Complexe zweiten Grades gewesen ist, um uns wieder der Untersuchung der Complexflächen zuzuwenden. Wir heben insbesondere die grosse Analogie hervor, welche zwischen der Theorie dieser Complexe und der Theorie der Flächen zweiten Grades herrscht; eine Analogie, die darin ihre Erklärung findet, dass die letzteren als Complexe zweiten Grades von besonderer Art aufgefasst werden können. Die Gesammtheit der Bedingungen, welche erfüllt sein muss, damit ein gegebener Complex zweiten Grades eine Fläche dieses Grades darstelle, kann in der einen zusammengefasst werden, dass alle Linien eines derartigen Complexes singuläre Linien desselben sind.