bestimmten Complexe an. Das Hyperboloid ist nicht selbst particularisirt, sondern nur seine Lage zu dem Polar-System.

Nehmen wir insbesondere für die drei sich schneidenden geraden Linien die drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ oder die drei in den Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY unendlich weit liegenden geraden Linien, so erhalten wir zur Bestimmung desjenigen Hyperboloids, welches bezüglich dem Coordinaten-Anfangspuncte oder der unendlich weit liegenden Ebene zugeordnet ist, die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta r} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta s} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta h} = 0, \tag{165}$$

oder:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \sigma} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta \varrho} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta \eta} = 0. \tag{166}$$

Unter beiden Annahmen wird die Gleichung (162):

$$\Phi \equiv -\frac{\delta \Omega}{\delta r} \cdot \frac{\delta \Omega}{\delta \sigma} + \frac{\delta \Omega}{\delta s} \cdot \frac{\delta \Omega}{\delta \varrho} + \frac{\delta \Omega}{\delta h} \cdot \frac{\delta \Omega}{\delta \eta} = 0$$

erfüllt, welche diejenigen geraden Linien darstellt, denen in dem gegebenen Polar-System ($\lambda = 0$) solche Polar-Complexe entsprechen, deren sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden.

§ 5.

Fläche vierter Ordnung und Classe, von den singulären Puncten des Complexes gebildet, von den singulären Ebenen desselben umhüllt.

311. Wir haben einen Punct, dessen Complex-Kegel sich in das System zweier Ebenen auflöst, einen singulären Punct, und eine Ebene, deren Complex-Curve in das System zweier Puncte ausartet, eine singuläre Ebene des Complexes genannt.

Die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, in welche sich der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct ein singulärer Punct ist, aufgelöst hat, so wie die Verbindungslinie der beiden Puncte, in welche die Complex-Curve, deren Ebene eine singuläre Ebene ist, zerfällt, sind singuläre Linien des Complexes. In diesem Sinne entspricht einer jeden singulären Linie ein singulärer Punct und eine singuläre Ebene. Alle Complex-Curven, welche in Ebenen liegen, die durch eine singuläre Linie hindurchgelegt sind, berühren dieselbe in dem entsprechenden singulären Puncte, und alle Complex-Kegel, deren

Mittelpuncte auf einer singulären Linie angenommen sind, berühren nach derselben die entsprechende singuläre Ebene. Wir wollen den einer singulären Linie entsprechenden singulären Punct und die derselben entsprechende singuläre Ebene als einander zugeordnet bezeichnen.

Die singulären Linien eines gegebenen Complexes bilden eine Congruenz vom vierten Grade. Dieselbe ist durch die zweigliedrige Gruppe zweier Complexe des zweiten Grades bestimmt, von denen der eine der gegebene ist und der andere erhalten wird, wenn man in die Bedingungs-Gleichung des zweiten Grades, welcher die Linien-Coordinaten genügen müssen, an Stelle der Coordinaten die nach denselben genommenen partiellen Differentialquotienten der Gleichung des gegebenen Complexes einsetzt. Im Allgemeinen sind vier unter den Tangenten einer gegebenen Complex-Curve und vier unter den Seiten eines gegebenen Complex-Kegels singuläre Linien. Wenn insbesondere die Complex-Curve sich in das System zweier Puncte oder der Complex-Kegel sich in das System zweier Ebenen auflöst, fallen zwei von den vier singulären Linien bezüglich in die Verbindungslinie der beiden Puncte oder in die Durchschnittslinie der beiden Ebenen zusammen.

312. Wenn sich die Complex-Curve in einer gegebenen Ebene so particularisirt, dass sie sich in zwei Puncte auflöst, welche in einen zusammenfallen, wollen wir die Ebene eine Doppelebene des Complexes nennen. Als einen Doppelpunct bezeichnen wir einen solchen, der Mittelpunct eines Complex-Kegels ist, welcher in das System zweier, in einen zusammenfallender Ebenen ausgeartet ist. Derjenige Punct, welcher von den Linien des Complexes in einer Doppel-Ebene umhüllt wird, ist darum noch kein Doppelpunct, so wenig wie die Ebene, die von den durch einen Doppelpunct hindurchgehenden Linien des Complexes gebildet wird, eine Doppelebene.

Eine jede Linie des gegebenen Complexes, welche in einer Doppelebene liegt oder durch einen Doppelpunct hindurchgeht, ist eine singuläre Linie desselben. Die Doppelebenen und Doppelpuncte sind solche Ebenen und Puncte, welche unendlich viele Linien aus der Congruenz der singulären Linien enthalten.

Einer jeden singulären Linie, welche in einer Doppelebene liegt, entspricht diese als singuläre Ebene. Der jeder einzelnen singulären Linie entsprechende singuläre Punct fällt darum noch nicht mit dem singulären Puncte zusammen, in welchem sie sich alle schneiden. Vielmehr entspricht einer jeden singulären Linie ein zweiter, im Allgemeinen von dem ersten verschiedener singulärer Punct. Wenn sich die singuläre Linie in der Doppelebene um den festen

Punct dreht, welcher in derselben von den Linien des Complexes umhüllt wird, beschreibt der entsprechende singuläre Punct eine Curve der zweiten Ordnung, welche durch den festen Punct hindurchgeht. Während einer singulären Ebene im Allgemeinen ein singulärer Punct zugeordnet ist, entsprechen einer Doppelebene unendlich viele zugeordnete singuläre Puncte, welche auf einer Curve der zweiten Ordnung liegen.

Einer jeden derjenigen singulären Linien, welche durch einen Doppelpunct hindurchgehen, entspricht dieser als singulärer Punct. Aber jeder derselben entspricht, im Allgemeinen, eine singuläre Ebene, welche nicht mit derjenigen festen Ebene zusammenfällt, die von den durch den Doppelpunct hindurchgehenden Linien des Complexes gebildet wird. Alle diese Ebenen umhüllen eine Kegelfläche der zweiten Classe, die insbesondere die feste Ebene berührt. Während einem singulären Puncte im Allgemeinen eine singuläre Ebene zugeordnet ist, entsprechen einem Doppelpuncte unendlich viele zugeordnete singuläre Ebenen, welche eine Kegelfläche der zweiten Classe umhüllen.

Die analytische Bestätigung der vorstehenden geometrischen Folgerungen entnehmen wir der 289. und 290. Nummer, in denen die unendlich weit entfernte Ebene für eine Doppelebene des Complexes genommen ist.

313. Eine singuläre Linie kann sich in der Art particularisiren, dass eine jede durch sie hindurchgelegte Ebene eine singuläre Ebene und dass ein jeder auf ihr angenommener Punct ein singulärer Punct ist. Solch' eine gerade Linie haben wir eine Doppellinie des Complexes genannt (n. 307). Aber es verlangt eine Particularisation des gegebenen Complexes, wenn derselbe eine Doppellinie enthalten soll. Wir schliessen die Möglichkeit, dass der gegebene Complex sich in der dazu nöthigen Weise particularisire, von der ferneren Betrachtung aus.

In einem gegebenen Complexe kann es ausgezeichnete Puncte oder Ebenen von der Art geben, dass alle durch dieselben hindurchgehenden, bezüglich alle in denselben liegenden geraden Linien Linien des Complexes sind. Dann ist jede durch den Punct hindurchgelegte Ebene eine singuläre Ebene, jeder in der Ebene angenommene Punct ein singulärer Punct. Solch' eine Ebene haben wir in der 292. Nummer mit der unendlich weit entfernten Ebene zusammenfallen lassen. Nach den Erörterungen dieser Nummer verlangt es eine sechsfache Particularisation, wenn für einen gegebenen Complex die unendlich weit liegende Ebene von dieser besonderen Art sein soll.

Im Allgemeinen also gibt es derartige Ebenen und Puncte nicht. Wir sehen in dem Folgenden von der Möglichkeit ab, dass der gegebene Complex sich dementsprechend particularisirt habe.

314. Damit sich ein gegebener Kegel zweiter Ordnung in das System zweier Ebenen, oder eine gegebene Curve der zweiten Classe in das System zweier Puncte auflöse, ist eine Bedingungs-Gleichung zu erfüllen. Es wird also von den singulären Puncten eines Complexes eine Fläche gebildet, und von den singulären Ebenen desselben eine Fläche umhüllt. Dagegen sind drei Bedingungen zu erfüllen, wenn die beiden Ebenen, in welche sich ein Complex-Kegel, bezüglich die beiden Puncte, in welche sich eine Complex-Curve auflöst, zusammenfallen sollen. Es gibt also eine endliche Anzahl von Doppelpuncten und Doppelebenen.

In dem sechsten und siebenten Paragraphen des vorigen Abschnitts haben wir nachgewiesen, dass auf der Coordinaten-Axe OX, welche wir zur Doppellinie einer Complexfläche genommen hatten und die ganz beliebig angenommen worden war, vier singuläre Puncte liegen und dass durch dieselbe vier singuläre Ebenen hindurchgehen (vgl. n. 215). Wir erhalten somit unmittelbar die folgenden Sätze:

Die von den singulären Puncten eines Complexes des zweiten Grades gebildete Fläche ist von der vierten Ordnung.

Die von den singulären Ebenen eines Complexes des zweiten Grades umhüllte Fläche ist von der vierten Classe.

315. Um die Gleichung der Fläche der singulären Puncte in Punct-Coordinaten zu erhalten, gehen wir von der Gleichung (II) des Complexes zweiten Grades in Strahlen-Coordinaten aus. Wir haben auszudrücken, dass sich der Kegel, welchen die Gleichung des Complexes darstellt, sobald wir den Veränderlichen x, y, z feste Werthe ertheilen, in ein System zweier Ebenen auflöse. Von den sechs Strahlen-Coordinaten:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y)$$

können wir die letzten drei auf folgende Weise schreiben:

$$\big((y-y')z-y(z-z')\big),\ \big(x(z-z')-(x-x')z\big),\ \big((x-x')y-x(y-y')\big).$$

Dadurch nimmt die Gleichung II des Complexes die folgende Form an:

$$\begin{aligned} a(x-x')^2 &+ 2b(x-x')(y-y') + c(y-y')^2 \\ &+ 2d(x-x')(z-z') + 2e(y-y')(z-z') + f(z-z')^2 = 0, \quad (167) \end{aligned}$$

wo a, b, c, d, e, f Functionen des zweiten Grades in x, y, z sind. Insbesondere finden wir:

$$\left.\begin{aligned}
a &= A + Ez^2 + Fy^2 - 2Kyz - 2Pz + 2Qy,\\
b &= I - Fxy + Kxz + Lyz - Mz^2 + (N-O)z - Qx + Ry,\\
c &= B + Dz^2 + Fx^2 - 2Lxz - 2Rx + 2Sz,\\
d &= H - Exz + Kxy - Ly^2 + Myz - Ny + Px - Uz,\\
e &= G - Dyz - Kx^2 + Lxy + Mxz + Ox - Sy + Tz,\\
f &= C + Dy^2 + Ex^2 - 2Mxy - 2Ty + 2Ux.
\end{aligned}\right\} \quad (168)$$

Um auszudrücken, dass sich der durch die Gleichung (167) dargestellte Kegel in das System zweier Ebenen auflöse, erhalten wir, nach der 186. Nummer, die folgende Bedingung:

$$acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0. \quad (169)$$

Wenn wir in diese Gleichung für a, b, c, d, e, f die Werthe aus der Gleichung (168) einsetzen, bekommen wir die gesuchte Gleichung der Fläche. Dieselbe ist scheinbar vom sechsten Grade. Es werden sich also bei der wirklichen Ausführung der in (169) angedeuteten Multiplicationen die Glieder fünfter und sechster Ordnung in x, y, z fortheben.

316. Wir erhalten die Gleichung der von den singulären Ebenen des Complexes umhüllten Fläche in Ebenen-Coordinaten, wenn wir in den vorstehenden Gleichungen (168) nach den Vertauschungsregeln der 153. Nummer:

$$x, y, z \text{ mit } t, u, v$$

und

$$A, B, C, \qquad G, H, I, \qquad P, Q, R$$

bezüglich gegenseitig mit

$$D, E, F, \qquad K, L, M, \qquad S, T, U$$

vertauschen. Ungeändert bleiben dabei die Constanten:

$$N, O.$$

Wenn wir nach der Vertauschung statt a, a', statt b, b' u. s. w. schreiben, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
a' &= D + Bv^2 + Cu^2 - 2Guv - 2Sv + 2Tu,\\
b' &= M - Ctu + Gtv + Huv - Iv^2 + (N-O)v - Tt + Uu,\\
c' &= E + Av^2 + Ct^2 - 2Htv - 2Ut + 2Pv,\\
d' &= L - Btv + Gtu - Hu^2 + Iuv - Nu + St - Rv,\\
e' &= K - Auv - Gt^2 + Htu + Itv + Ot - Pu + Qv,\\
f' &= F + Au^2 + Bt^2 - 2Itu - 2Qu + 2Rt,
\end{aligned}\right\} \quad (170)$$

und wir erhalten die Gleichung der Fläche unter der folgenden Form:

$$a'c'f' + 2b'd'e' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2 = 0. \quad (171)$$

Bezüglich der Reduction der vorstehenden Gleichung, die in t, u, v scheinbar vom sechsten Grad ist, auf den vierten Grad in diesen Veränderlichen gilt das in der vorigen Nummer Gesagte.

Wenn wir die Ausdrücke (170) für a', b', c', d', e', f' durch Einführung einer vierten Veränderlichen w homogen machen und dann in die Gleichung (171) einsetzen, so wird diese allerdings vom sechsten Grade und reducirt nur dadurch auf den vierten, dass sich von ihr ein Factor w^2 absondert. Die Gleichung (171) sagt, geometrisch gedeutet, nicht sowohl aus, dass sich die Complex-Curve in einer gegebenen Ebene t, u, v, w in das System zweier Puncte auflöse, als dass derjenige Kegel zweiter Classe, der sich durch die fragliche Complex-Curve und den Coordinaten-Anfangspunct als Mittelpunct hindurchlegen lässt, in das System zweier umhüllter Axen zerfällt. Es findet das für eine jede Ebene statt, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurchgeht, und daher der Factor w^2, welcher, gleich Null gesetzt, den Coordinaten-Anfangspunct darstellt.

317. Eine beliebig angenommene gerade Linie schneidet die Fläche der singulären Puncte im Allgemeinen in vier Puncten, und es lassen sich durch dieselbe im Allgemeinen vier Tangential-Ebenen an die Fläche der singulären Ebenen legen. Wenn die angenommene gerade Linie insbesondere eine singuläre Linie des Complexes ist, so fallen zwei der vier singulären Puncte in den entsprechenden Punct und zwei der vier singulären Ebenen in die entsprechende Ebene zusammen (vergl. n. 306.). Eine singuläre Linie berührt also sowohl die Fläche der singulären Puncte als die Fläche der singulären Ebenen. Berührungs-Punct mit der ersten Fläche ist der entsprechende singuläre Punct, Berührungs-Ebene mit der zweiten Fläche die entsprechende singuläre Ebene.

Für solche singuläre Linien, welche in einer Doppel-Ebene des Complexes liegen, fallen von den vier Durchschnittspuncten mit der Fläche der singulären Puncte paarweise zwei zusammen. Solche Linien sind also Doppeltangenten der Fläche der singulären Puncte, in dem Sinne, dass sie in zwei verschiedenen Puncten diese Fläche berühren.

Ebenso fallen von den vier Tangential-Ebenen, welche sich, im Allgemeinen, durch eine gegebene gerade Linie an die Fläche der singulären Ebenen legen lassen, paarweise zwei in eine zusammen, sobald die gegebene gerade Linie eine der singulären Linien ist, welche durch einen Doppelpunct des Complexes hindurchgehen. Diese Linien sind also Doppeltangenten der Fläche der singulären Ebenen, in dem Sinne, dass sie nach zwei verschiedenen Ebenen diese Fläche berühren.

318. Die vier singulären Linien des Complexes, welche in einer beliebigen Ebene liegen, berühren die in dieser Ebene von Linien des Complexes umhüllte Curve in den ihnen entsprechenden singulären Puncten. In denselben Puncten berühren dieselben geraden Linien die Fläche vierter Ordnung der singulären Puncte. Die Durchschnitts-Curve vierter Ordnung dieser Fläche mit einer beliebigen Ebene berührt also die in dieser Ebene liegende Complex-Curve in vier Puncten. Von den acht Durchschnitts-Puncten, welche die beiden Curven haben müssen, fallen jedesmal zwei in einen Berührungspunct zusammen.

Ebenso berührt derjenige Complex-Kegel, welcher einen beliebigen Punct des Raumes zum Mittelpuncte hat, den Kegel vierter Classe, welcher sich von dem beliebig angenommenen Puncte aus an die von den singulären Ebenen umhüllte Fläche der vierten Classe legen lässt, nach vier geraden Linien, welche die vier singulären Linien sind, die durch ihn hindurchgehen. Gemeinsame Tangential-Ebenen der beiden Kegel nach diesen vier geraden Linien sind die entsprechenden singulären Ebenen.

Wir wollen für die beliebig angenommene Ebene insbesondere eine singuläre Ebene wählen. Der in derselben von Linien des Complexes umhüllte Ort wird, nach wie vor, von der Durchschnitts-Curve der singulären Ebene mit der Fläche der singulären Puncte in vier Puncten berührt. Die gemeinsamen Tangenten in den vier Berührungspuncten sind singuläre Linien. Die Berührungspuncte der singulären Linien sind die bezüglich entsprechenden singulären Puncte. Von den vier singulären Linien, welche, im Allgemeinen, in einer gegebenen Ebene liegen, fallen für eine singuläre Ebene zwei in die dieser entsprechende singuläre Linie zusammen. Die beiden anderen gehen in beliebiger Richtung jede durch einen der beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve aufgelöst hat. Von den vier Berührungspuncten der Durchschnitts-Curve der Fläche der singulären Puncte mit dem von den Linien des Complexes umhüllten Ort fallen also zwei in die beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve in der singulären Ebene aufgelöst hat, während die anderen beiden mit dem der gegebenen singulären Ebene zugeordneten singulären Puncte zusammenfallen.

Die Durchschnitts-Curve vierter Ordnung der Fläche der singulären Puncte mit einer beliebigen singulären Ebene hat in dem dieser Ebene zugeordneten singulären Puncte einen Doppelpunct.

Auf dieselbe Art beweisen wir den Satz:

Die Kegelfläche vierter Classe, welche sich von einem beliebigen singulären Puncte aus an die Fläche der singulären Ebenen legen lässt, hat die diesem Puncte zugeordnete singuläre Ebene zur Doppelebene.

319. Die analytische Bestätigung dieser geometrischen Folgerungen entnehmen wir den Gleichungen (169) und (171), welche die Fläche der singulären Puncte und die Fläche der singulären Ebenen bezüglich in Punct- und Ebenen-Coordinaten darstellen. Wenn wir annehmen, dass die Ebene XZ eine singuläre Ebene sei und dass die entsprechende singuläre Linie mit OX, der zugeordnete singuläre Punct mit O zusammenfalle, so erhalten wir aus der 305. und der 306. Nummer die folgende Constanten-Bestimmung:

$$A = 0, \qquad H = 0, \qquad I = 0, \qquad P = 0.$$

Dadurch bekommen die Ausdrücke a, b, c, d, e, f (168), wenn wir in denselben zugleich y' verschwinden lassen, die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned} a &= Ez^2, \\ b &= Kxz - Mz^2 + (N - O)z - Qx, \\ c &= B + Dz^2 + Fx^2 - 2Lxz - 2Rx + 2Sz, \\ d &= -Exz - Uz, \\ e &= G - Kx^2 + Mxz + Ox + Tz, \\ f &= C + Ex^2 + 2Ux. \end{aligned}\right\} \qquad (172)$$

Wenn wir in denselben x und z gegen Constante, so wie zweite Potenzen von x und z gegen erste vernachlässigen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} a &= Ez^2, \\ b &= (N - O)z - Qx, \\ c &= B, \\ d &= -Uz, \\ e &= G, \\ f &= C. \end{aligned}\right\} \qquad (173)$$

Und indem wir diese Werthe in die Gleichung (169):

$$acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0$$

einsetzen, finden wir die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} BCEz^2 - 2GUz\big((N - O)z - Qx\big) - EG^2z^2 \\ - BU^2z^2 - C\big((N - O)z - Qx\big)^2 = 0 \end{aligned} \qquad (174)$$

um diejenigen singulären Puncte darzustellen, welche in der singulären Ebene XZ in der Nähe des zugeordneten singulären Punctes O liegen. Diese Gleichung enthält nur Glieder zweiten Grades in x und z. Die Durchschnitts-Curve der Fläche der singulären Puncte mit der Ebene XZ besitzt also, in Uebereinstimmung mit den Schlussfolgerungen der vorigen Nummer, im Coordinaten-Anfangspuncte einen Doppelpunct.

Wir mögen noch bemerken, dass dieser Doppelpunct ein Rückkehrpunct wird, wenn ausser den Constanten A, H, I, P auch noch die Constante Q verschwindet. Dann ist, nach den Erörterungen der 307. Nummer, die Axe OX eine Doppellinie des gegebenen Complexes.

Auf dieselbe Art können wir nachweisen, dass der Kegel vierter Classe, der sich von einem beliebigen singulären Puncte aus an die Fläche der singulären Ebenen legen lässt, die dem angenommenen singulären Puncte zugeordnete singuläre Ebene zur Doppelebene hat.

320. Nach dem Vorstehenden ist jede singuläre Ebene eine Tangential-Ebene der von den singulären Puncten gebildeten Fläche vierter Ordnung. Berührungspunct ist der zugeordnete singuläre Punct. Und umgekehrt ist jeder singuläre Punct ein Punct der von den singulären Ebenen umhüllten Fläche vierter Classe. Tangential-Ebene in demselben ist die zugeordnete singuläre Ebene.

Die Fläche vierter Ordnung, welche von den singulären Puncten des Complexes gebildet wird, und die Fläche vierter Classe, welche von den singulären Ebenen desselben umhüllt wird, sind identisch.

Eine jede singuläre Linie des Complexes berührt die Fläche vierter Ordnung und vierter Classe der singulären Puncte und singulären Ebenen. Der Berührungspunct mit der Fläche ist der entsprechende singuläre Punct, die Berührungsebene in demselben die entsprechende singuläre Ebene. Die beiden übrigen Schnittpuncte der singulären Linie mit der Fläche sind diejenigen beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve in der entsprechenden singulären Ebene aufgelöst hat. Ebenso sind die beiden übrigen Tangential-Ebenen, welche sich durch die singuläre Linie an die Fläche legen lassen, diejenigen beiden Ebenen, in welche der Complex-Kegel zerfällt, dessen Mittelpunct der zugeordnete Punct ist. Die Richtung der einer singulären Ebene und ihrem zugeordneten singulären Puncte entsprechenden singulären Linie ist durch die Fläche der singulären Puncte und singulären Ebenen noch nicht gegeben. Die

Fläche hängt von weniger willkürlichen Constanten ab, als der Complex zweiten Grades, welcher sie bestimmt.

321. Die von den singulären Puncten des Complexes gebildete und von den singulären Ebenen desselben umhüllte Fläche ist von der vierten Ordnung und der vierten Classe. Sie hat also, im Allgemeinen, sechszehn Doppelpuncte und sechszehn Doppelebenen. Die Möglichkeit, dass die Fläche sonstige Singularitäten, insbesondere einen Doppelstrahl und eine mit demselben zusammenfallende Doppelaxe besitzt, durch welche die Anzahl der Doppelpuncte und Doppelebenen erniedrigt würde, bleibt ausgeschlossen, so lange nicht der gegebene Complex selbst particularisirt ist.

Die Tangential-Ebenen der Fläche in einem Doppelpuncte derselben umhüllen einen Kegel der zweiten Classe und die Berührungspuncte derselben mit einer ihrer Doppelebenen bilden eine Curve der zweiten Ordnung. Wir haben in der 312. Nummer nachgewiesen, dass die singulären Ebenen, welche durch einen Doppelpunct des Complexes gehen, ebenfalls einen Kegel der zweiten Classe umhüllen, und dass die singulären Puncte, welche in einer Doppelebene des Complexes liegen, eine Curve der zweiten Ordnung bilden.

Die Doppelpuncte und Doppelebenen des Complexes fallen mit den Doppelpuncten und Doppelebenen der von den singulären Puncten gebildeten und von den singulären Ebenen umhüllten Fläche zusammen.

Und hieraus:

In einem Complexe zweiten Grades gibt es, im Allgemeinen, sechszehn Doppelpuncte und sechszehn Doppelebenen.

Welcher Punct in einer Doppelebene von den Linien des Complexes umhüllt, oder welche Ebene in einem Doppelpuncte von den Linien des Complexes gebildet wird, ist durch die Fläche der singulären Puncte und Ebenen noch nicht bestimmt. Der Punct kann ein beliebiger Punct der Berührungs-Curve, die Ebene eine beliebige Ebene des Berührungs-Kegels sein.

322. Wir gehen zu der Gleichung der Fläche der singulären Puncte und Ebenen in Plan-Coordinaten (171) zurück:

$$a'c'f' + 2b'd'e' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2 = 0.$$

Wir wollen dieselbe durch Einführung einer vierten Veränderlichen, w, homogen machen. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir die für a', b', c', d', e', f' gefundenen Ausdrücke (170) durch Einführung dieser Veränderlichen homogen machen und, nach Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung (171), den Factor w^2, welchen dieselbe erhält, vernachlässigen.

Wir wollen die Gleichung der Fläche in der folgenden Weise schreiben:

$$f = 0. \tag{175}$$

Dann erhalten wir für die Gleichung des Pols einer gegebenen Ebene (t', u', v', w') in Bezug auf diese Fläche, nach der 296. Nummer, die folgende:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) t + \left(\frac{\delta f}{\delta u}\right) u + \left(\frac{\delta f}{\delta v}\right) v + \left(\frac{\delta f}{\delta w}\right) w = 0.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten des Pols sind also:

$$x' = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)}{\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)}, y' = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta u}\right)}{\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)}, z' = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta v}\right)}{\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)}. \tag{176}$$

Wenn wir die homogen gemachten Ausdrücke a', b', c', d', e', f' in die Gleichung (171) einsetzen, so erhalten wir die Gleichung:

$$F = 0, \tag{177}$$

und es ist, nach dem Vorhergehenden:

$$F = w^2 f. \tag{178}$$

Es ist also erlaubt, in den Formeln (176) die nach t, u, v, w genommenen Differentialquotienten der Function f bezüglich durch die folgenden Functionen zu ersetzen:

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right), \left(\frac{\delta F}{\delta u}\right), \left(\frac{\delta F}{\delta v}\right), \left(\frac{\delta F}{\delta w} - \frac{2F}{w}\right).$$

323. Wir wollen insbesondere die unendlich weit liegende Ebene auswählen. Der Einfachheit wegen setzen wir, was immer gestattet ist, in der Gleichung des gegebenen Complexes die Constanten K, L, M gleich Null. Dann erhalten die homogen gemachten Ausdrücke a', b', c', d', e', f' die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
a' &= Dw^2 + Bv^2 + Cu^2 - 2Guv - 2Svw + 2Tuw,\\
b' &= -Ctu + Gtv + Huv - Iv^2 + (N-O)vw - Ttw + Uuw,\\
c' &= Ew^2 + Av^2 + Ct^2 - 2Htv - 2Utw + 2Pvw,\\
d' &= -Btv + Gtu - Hu^2 + Iuv - Nuw + Stw - Rvw,\\
e' &= -Auv - Gt^2 + Htu + Itv + Otw - Puw + Qvw,\\
f' &= Fw^2 + Au^2 + Bt^2 - 2Itu - 2Quw + 2Rtw.
\end{aligned}\right\} \tag{179}$$

Wenn wir in diese Ausdrücke und ihre bezüglich nach t, u, v, w genommenen Differentialquotienten die Coordinaten der unendlich weit liegenden Ebene:

$$t' = 0,\ u' = 0,\ v' = 0,\ w' = w'$$

einsetzen, erhalten wir:

$$a' = Dw'^2,\ b' = 0,\ c' = Ew'^2,\ d' = 0,\ e' = 0,\ f' = Fw'^2 \tag{180}$$

und:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\delta a'}{\delta t}\right) = 0, && \left(\frac{\delta c'}{\delta t}\right) = -2Uw', && \left(\frac{\delta f'}{\delta t}\right) = 2Rw',\\
&\left(\frac{\delta a'}{\delta u}\right) = 2Tw', && \left(\frac{\delta c'}{\delta u}\right) = 0, && \left(\frac{\delta f'}{\delta u}\right) = -2Qw',\\
&\left(\frac{\delta a'}{\delta v}\right) = -2Sw', && \left(\frac{\delta c'}{\delta v}\right) = 2Pw', && \left(\frac{\delta f'}{\delta v}\right) = 0,\\
&\left(\frac{\delta a'}{\delta w}\right) = 2Dw', && \left(\frac{\delta c'}{\delta w}\right) = 2Ew', && \left(\frac{\delta f'}{\delta w}\right) = 2Fw'.
\end{aligned}\right\} \tag{181}$$

Es ist für das Folgende unnöthig, die Differentialquotienten von b', d', e' hinzuschreiben.

Nach den vorstehenden Gleichungen erhalten die vier Ausdrücke:

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta u}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta v}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta w} - 2\frac{F}{w}\right),$$

wo:

$$F \equiv a'c'f' + 2b'd'e' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2,$$

für die unendlich weit entfernte Ebene, indem nur das eine Glied

$$a'c'f'$$

in Betracht kommt, die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right) = 2Dw'^5(ER - FU),\\
&\left(\frac{\delta F}{\delta u}\right) = 2Ew'^5(FT - DQ),\\
&\left(\frac{\delta F}{\delta v}\right) = 2Fw'^5(DP - ES),\\
&\left(\frac{\delta F}{\delta w} - 2\frac{F}{w}\right) = 6DEFw'^5 - 2DEFw'^5 = 4DEFw'^5.
\end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Und also werden die Coordinaten des Pols der unendlich weit liegenden Ebene mit Bezug auf die Fläche, oder, wie wir sagen können, die Coordinaten des Mittelpunctes der Fläche:

$$x' = \frac{ER - FU}{2EF},\ y' = -\frac{DQ - FT}{2DF},\ z' = \frac{DP - ES}{2DE}. \tag{183}$$

Es sind dies dieselben Ausdrücke, welche wir in der 240. Nummer für die Coordinaten des Mittelpunctes des Complexes gefunden haben. Und somit haben wir den Satz:

Der Mittelpunct eines Complexes zweiten Grades fällt mit dem Mittelpunct der Fläche seiner singulären Puncte und Ebenen zusammen.

Damit in Uebereinstimmung rückt der Mittelpunct des Complexes unendlich weit, wenn die unendlich entfernte Ebene insbesondere eine singuläre Ebene ist, und fällt in unendlicher Entfernung mit dem derselben zugeordneten singulären Puncte zusammen, demjenigen Puncte, in welchem dieselbe die Fläche der singulären Puncte und Ebenen berührt. (Vergl. n. 279.)

Wenn die unendlich weit liegende Ebene eine Doppelebene des Complexes ist, so wird der Mittelpunct desselben unbestimmt. Sein geometrischer Ort ist eine in der unendlich weit entfernten Ebene liegende Curve der zweiten Ordnung. Diese Curve ist die Berührungs-Curve der Doppelebene mit der Fläche der singulären Puncte und Ebenen. (Vergl. n. 289.)

Wenn endlich die Beziehung der unendlich weit liegenden Ebene zu dem Complexe sich so particularisirt, dass eine jede in ihr liegende Linie eine Linie des Complexes, und in Folge dessen ein jeder ihrer Puncte ein singulärer Punct desselben ist, so kann weder von einem bestimmten Mittelpuncte des Complexes noch von einem solchen der Fläche der singulären Puncte und Ebenen mehr die Rede sein.

§ 6.

Pol einer gegebenen Ebene, Polar-Ebene, einem gegebenen Puncte mit Bezug auf den Complex zugeordnet.

324. Wir kehren zu den Betrachtungen der drei ersten und insbesondere des dritten Paragraphen dieses Abschnitts zurück. Wir haben in denselben die Beziehung des gegebenen Complexes zweiten Grades zu der unendlich weit entfernten Ebene untersucht. Es beschäftigte uns zunächst die Gesammtheit der Durchmesser des Complexes — solcher gerader Linien, welche mit Bezug auf den Complex den in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden geraden Linien als Polaren zugeordnet sind —, dann die Gesammtheit der Cylinder des Complexes — solcher Complex-Kegel, deren Mittelpuncte in der unendlich weit entfernten Ebene liegen — und der Axen dieser Cylinder — der Polar-Linien derselben mit Bezug auf die durch ihre Mittelpuncte gehende unendlich weit entfernte Ebene —. Dann betrachteten wir die von Linien des Complexes in der unendlich weit entfernten Ebene