welche sich die Complex-Curve in der fraglichen Ebene aufgelöst hat, unendlich weit gerückt ist.

293. Wir haben in dem Vorstehenden die Lage der unendlich weit entfernten geraden Linien und die entsprechenden Durchmesser-Verhältnisse bei Complexen des zweiten Grades discutirt und insbesondere durch einfachere Complexe des zweiten Grades, welche wir als die Asymptoten-Complexe der gegebenen bezeichneten, veranschaulicht. Wir sind dabei, wenn wir zusammenfassen, zu einer sechsfachen Unterscheidung der Complexe zweiten Grades gelangt.

In hyperboloidischen Complexen umhüllen die unendlich weit liegenden Linien des Complexes eine reelle, in ellipsoidischen Complexen eine imaginäre Curve der zweiten Classe. Diese Curve löst sich in dem Falle der hyperbolischen Complexe in ein System von zwei reellen, in dem Falle der elliptischen Complexe in ein System von zwei imaginären Puncten auf. Fallen diese beiden Puncte zusammen, so ist der Complex ein parabolischer. Endlich kann der Fall eintreten, dass alle der unendlich weit liegenden Ebene angehörigen geraden Linien Linien des Complexes sind.

§ 4.

Tangential- und Polar-Complexe des ersten Grades.

294. Die im Vorstehenden gewonnenen Resultate lassen sich ohne Weiteres verallgemeinern, indem wir alle Betrachtungen, die wir vorhin für die unendlich weit liegende Ebene angestellt haben, auf eine beliebige Ebene und, nach den Regeln des Princips der Reciprocität, auf einen beliebigen Punct übertragen. Wir lassen indess vorab eine Reihe anderer Ueberlegungen folgen, die bestimmt sind, die Sätze der vorhergehenden Paragraphen zu erweitern und unter einen allgemeinen Gesichtspunct zu bringen.

Es sei Ω_n eine homogene Function des n. Grades von beliebig vielen Variabeln $p, q, r, \cdots$. In Gemässheit des bekannten Theorems über homogene Functionen erhalten wir alsdann:

$$\frac{\delta \Omega_n}{\delta p} \cdot p + \frac{\delta \Omega_n}{\delta q} \cdot q + \frac{\delta \Omega_n}{\delta r} \cdot r + \cdots\cdots = n . \Omega_n . \qquad (123)$$

Wir können hiernach die Gleichung:

$$\Omega_n = 0 \qquad (124)$$

auch in folgender Weise schreiben:

$$\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\cdot p+\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\cdot q+\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot r+\cdots\cdots=0. \tag{125}$$

Wenn also $p', q', r', \ldots$ gegebene Werthe sind, welche die Gleichung (124) befriedigen, so befriedigen dieselben Werthe die Gleichung (125). Die partiellen Differentialquotienten, die in dieser Gleichung vorkommen und im Allgemeinen homogene Functionen $(n-1)$. Grades der Veränderlichen sind, erhalten dann constante Werthe, die wir, zur Unterscheidung, in dem Nachstehenden einklammern wollen. Wenn wir von den gegebenen Werthen $p', q', r', \ldots$ zu benachbarten übergehen, so finden wir aus (124):

$$\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right)dp+\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right)dq+\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right)dr+\cdots\cdots=0. \tag{126}$$

Die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right)p+\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right)q+\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right)r+\cdots\cdots=\Pi=0, \tag{127}$$

in welcher die eingeklammerten Differentialquotienten die eben angegebene Bedeutung haben, ist eine Gleichung des ersten Grades zwischen den Veränderlichen $p, q, r, \cdots\cdots$. Die gegebenen Werthe $p', q', r', \ldots\ldots$ befriedigen die vorstehende Gleichung, wie sie die Gleichung des n. Grades (124) befriedigen. Denn wenn wir die letztgenannte Gleichung unter der Form (125) schreiben, erhalten wir aus beiden Gleichungen übereinstimmend:

$$\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right)p'+\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right)q'+\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right)r'+\cdots\cdots=0.$$

Aber auch, wenn wir von den gegebenen Werthen $p', q', r', \ldots.$ zu benachbarten Werthen übergehen, gibt uns die Gleichung (127) dieselbe Gleichung (126), die uns oben die Gleichung des n. Grades (124) gegeben hat. Dem entsprechend wollen wir Π eine lineare Tangential-Function der gegebenen homogenen Function des n. Grades Ω_n nennen.

Wenn wir, statt vorauszusetzen, dass die constanten Werthe $p', q', r', \ldots.$ die gegebene Function Ω_n befriedigen, diese Werthe ganz beliebig annehmen, so wird dadurch die Form der Function Π in keiner Weise geändert. Wir wollen in diesem allgemeinen Falle Π eine lineare Polar-Function der gegebenen Function Ω_n nennen. Durch die obige Voraussetzung geht eine Polarfunction in eine Tangentialfunction über.

Wenn insbesondere $n=2$, so sind die Differential-Quotienten von Ω_n Functionen des ersten Grades der Veränderlichen. Wir können dann in der Polarfunction Π der veränderlichen Grössen $p, q, r, \ldots$ mit ihren constanten Werthen $p', q', r', \ldots.$ gegenseitig mit einander vertauschen, ohne dass die Function irgend wie sich ändert. Demgemäss können wir die Gleichung (127) in der folgenden doppelten Weise schreiben:

$$\left(\frac{\delta\,\Omega_2}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\,\Omega_2}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\,\Omega_2}{\delta r}\right) r + \cdots\cdots = 0, \qquad (128)$$

$$p'\,\frac{\delta\,\Omega_2}{\delta p} + q'\,\frac{\delta\,\Omega_2}{\delta q} + r'\,\frac{\delta\,\Omega_2}{\delta r} + \cdots\cdots = 0. \qquad (129)$$

Das Vorstehende überträgt sich unmittelbar auf den Fall allgemeiner, nicht homogener Functionen. Wir können zu diesem Ende durch Einführung einer neuen Veränderlichen die nicht homogene Function homogen machen, für die homogen gemachte Function die Polar-Function ableiten, und in dieser, die eine homogene Function des ersten Grades ist, die eingeführte Veränderliche und ihren constanten Werth der Einheit wieder gleich setzen.

Wenn die gegebenen Variabeln $p, q, r, \ldots.$ nicht von einander unabhängig sind, sondern beliebig viele (m) Bedingungs-Gleichungen:

$$\Phi = 0, \ \Phi' = 0, \ \ldots\ldots \qquad (130)$$

zu befriedigen haben, deren Grad wir, der Einfachheit wegen, gleich dem von Ω_n nehmen wollen, so modificiren sich die vorstehenden Betrachtungen. Dieselben Werthe der Veränderlichen $p, q, r, \ldots\ldots$, welche der Gleichung:

$$\Omega_n = 0$$

Genüge leisten, befriedigen eine jede der Gleichungen von der folgenden Gestalt:

$$\Omega_n + \lambda\Phi + \lambda'\,\Phi' + \cdots\cdot = 0, \qquad (131)$$

wo $\lambda, \lambda', \ldots.$ unbestimmte Constanten bezeichnen. Einem gegebenen Systeme von Werthen der Variabeln entsprechend erhalten wir in Bezug auf eine jede derartige Gleichung eine lineare Polarfunction.

Diese Polarfunctionen stellen, gleich Null gesetzt, lineare Gleichungen dar. Dieselben werden gemeinsam von denjenigen Werthen der Veränderlichen $p, q, r, \ldots.$ befriedigt, welche den folgenden $(m+1)$ Gleichungen Genüge leisten:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r + \cdots\cdot = 0, \\
\left(\frac{\delta\Phi}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right) r + \cdots\cdot = 0, \\
\left(\frac{\delta\Phi'}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Phi'}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Phi'}{\delta r}\right) r + \cdots\cdot = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right\} \qquad (132)$$

Es bilden also die unendlich vielen (∞^m) linearen Polarfunctionen, welche einem gegebenen Systeme von Werthen der Variabeln $p, q, r, \ldots$ entsprechen, eine $(m+1)$gliedrige Gruppe.*)

Aus der $m$fach unendlichen Anzahl linearer Porlarfunctionen können wir, einer willkürlichen Annahme von $\lambda, \lambda', \ldots$ entsprechend, eine beliebig auswählen. Ist dann insbesondere $n = 2$, so lassen sich in derselben, wie in dem Falle unabhängiger Veränderlicher, die Veränderlichen mit den entsprechenden partiellen Differentialquotienten vertauschen, ohne die Form der Polarfunction zu ändern. Aber während in dem Falle unabhängiger Variabeln die eine lineare Polarfunction, welche es gab, in einer ausschliesslichen Beziehung zu dem Systeme der gegebenen Werthe der Veränderlichen und zu der gegebenen Gleichung stand, ist jetzt jede beliebig angenommene lineare Polarfunction mit jeder anderen gleichberechtigt. Wir können sagen, dass den gegebenen constanten Werthen $p', q', r', \ldots$ nicht sowohl jede einzelne Polarfunction als die $m$fach unendliche Schaar aller Polarfunctionen zugeordnet sei.

295. Beschränken wir uns auf drei Veränderliche, so ist:

$$\Omega_n = f(p, q, r),$$

und wir erhalten:

$$\Pi = \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta r}\right) r.$$

Wenn wir den Veränderlichen die Bedeutung von Punct-Coordinaten in der Ebene geben, so bestimmen p', q', r' einen Punct, und die homogene Gleichung:

$$\Omega_n = 0 \tag{124}$$

stellt eine Curve der n. Ordnung dar, während:

$$\Pi \equiv \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta r}\right) r = 0 \tag{133}$$

die Gleichung der Polaren des gegebenen Punctes in Beziehung auf die Curve darstellt, insbesondere, wenn der Punct auf der Curve liegt, die Gleichung der Tangente der Curve in diesem Puncte.

Das Princip der Reciprocität in Betracht der Curven zweiter Ordnung beruht auf der zweifachen Form, welche in dem Falle $n = 2$ die letzte Gleichung annimmt.

Wenn wir den drei Veränderlichen die Bedeutung von Linien-Coordinaten in der Ebene geben, so wird durch die drei constanten Werthe derselben

*) Wir sehen dabei von dem Falle ab, dass sich unter den Bedingungs-Gleichungen Φ lineare befinden. Unter dieser Annahme werden die entsprechenden unter den Gleichungen (132), als von den Bedingungs-Gleichungen selbst nicht verschieden, ohnehin befriedigt.

eine gerade Linie bestimmt, und die Gleichung (124) stellt eine Curve der n. Classe dar, während die Gleichung (133) den Pol dieser geraden Linie in Beziehung auf diese Curve darstellt, insbesondere, wenn die gerade Linie eine Tangente der Curve ist, den Berührungspunct auf derselben.

Für Curven zweiter Classe gilt in Beziehung auf Reciprocität die in Beziehung auf Curven zweiter Ordnung gemachte Bemerkung.

296. In dem Falle von vier Veränderlichen sei:

$$\Omega_n = f(p, q, r, s)$$

und:

$$\Pi = \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta s}\right) s.$$

Geben wir den vier Veränderlichen die Bedeutung von Punct-Coordinaten im Raume, so stellt die Gleichung:

$$\Omega_n = 0 \tag{124}$$

eine Fläche der n. Ordnung dar, und:

$$\Pi = 0 \tag{134}$$

ist die Gleichung der Polar-Ebene des Punctes (p', q', r', s') in Beziehung auf diese Fläche, insbesondere, wenn der Punct auf der Fläche liegt, der Tangential-Ebene der Fläche in diesem Puncte.

Wenn p, q, r, s Plan-Coordinaten bedeuten, so stellt die Gleichung (124) eine Fläche der n. Classe dar und (p', q', r', s') bezeichnet eine gegebene Ebene. Dann ist (134) die Gleichung des Pols dieser Ebene in Beziehung auf die Fläche, insbesondere, wenn die Ebene die Fläche berührt, die Gleichung des Berührungspunctes.

Die doppelte Form der Gleichung (134) in dem Falle, dass $n = 2$, schliesst das Princip der Reciprocität für Flächen der zweiten Ordnung und Flächen der zweiten Classe ein, wie es für Curven und Flächen der zweiten Ordnung in eleganter Weise zuerst von Gergonne entwickelt worden ist.

Wir können die vier Veränderlichen auch als Punct- oder Linien-Coordinaten in der Ebene betrachten, müssen in diesem Falle aber zwischen ihnen und also auch ihren constanten Werthen eine lineare Bedingungs-Gleichung statuiren. Dann stellt die Gleichung (124) wiederum eine Curve der n. Ordnung oder der n. Classe dar, und die Gleichung (134) bezüglich die Polare des Punctes (p', q', r', s') oder den Pol der geraden Linie (p', q', r', s') in Beziehung auf die Curve. Polare und Pol gehen in Tangente und Berührungspunct über, wenn bezüglich der gegebene Punct auf der Curve liegt oder die gegebene gerade Linie die Curve berührt. Wir können zu der gegebenen Gleichung des n. Grades die lineare Bedingungs-Gleichung, welcher die Veränderlichen p, q, r, s zu genügen haben, mit einer beliebigen (homogenen) Function des $(n-1)$. Grades multiplicirt, hinzufügen. Aber dadurch wird die Gleichung (134) der Polaren, bezüglich des Pols, nicht geändert, insofern sowohl die Veränderlichen p, q, r, s als ihre festen Werthe p', q', r', s' die betreffende lineare Bedingungs-Gleichung befriedigen.

297. Wenn endlich:

$$\Omega_n = f(p, q, r, s, t, u),$$

so erhalten wir:

$$\Pi = \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) s + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta t}\right) t + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta u}\right) u.$$

Den Veränderlichen wollen wir die Bedeutung von Linien-Coordinaten geben, und zwar einmal für dieselben die Strahlen-Coordinaten:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y),$$

das andere Mal die Axen-Coordinaten:

$$(uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u),\ (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v')$$

nehmen. Dann stellt in beiden Annahmen die homogene Gleichung:

$$\Omega_n = 0 \tag{124}$$

denselben Complex des n. Grades dar, und die Gleichung:

$$\Pi = 0, \tag{135}$$

wenn wir die constanten Werthe p', q', r', s', t', u', welche die partiellen Differentialquotienten einschliessen, auf eine gerade Linie, auf einen Strahl oder eine Axe beziehen, einen linearen Complex, welchen wir den Polar-Complex der gegebenen geraden Linie (p', q', r', s', t', u') in Beziehung auf den gegebenen Complex des n. Grades nennen wollen. Wenn insbesondere die gegebene gerade Linie dem Complexe selbst angehört, so geht der Polar-Complex in einen Tangential-Complex über, das heisst, in einen Complex ersten Grades, der die gegebene gerade Linie und alle diejenigen Linien des gegebenen Complexes enthält, welche der gegebenen unendlich nahe liegen.

298. Die sechs Coordinaten der geraden Linie sind nicht von einander unabhängig, sondern befriedigen eine Gleichung des zweiten Grades, welche in der Identität:

$$(x-x')(yz'-y'z) + (y-y')(x'z-xz') + (z-z')(xy'-x'y) = 0$$

ihren Ausdruck findet. Dem entsprechend erhalten wir nach den Erörterungen der 294. Nummer eine zweigliedrige Gruppe linearer Polar-Complexe, welche zu der gegebenen geraden Linie und dem gegebenen Complexe sämmtlich in derselben Beziehung stehen. Die zweigliedrige Gruppe linearer Polar-Complexe, die einer gegebenen geraden Linie zugehören, bestimmt eine lineare Congruenz, von der wir insbesondere sagen können, dass sie der gegebenen geraden Linie in Bezug auf den Complex n. Grades zugeordnet sei.

Wir wollen in dem Folgenden wiederum, wie früher, die sechs Linien-Coordinaten in der vorstehenden Reihenfolge mit

$$r,\ s,\ h,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

bezeichnen. Dann schreibt sich die Bedingungs-Gleichung, welche die Linien-Coordinaten befriedigen müssen, unter der folgenden Form:

$$-r\sigma + s\varrho + h\eta = 0. \tag{136}$$

Der gegebenen geraden Linie ertheilen wir die Coordinaten $r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta'$.

Ohne den gegebenen Complex n. Grades:

$$\Omega_n = 0$$

zu ändern, können wir seiner Gleichung die Gleichung (136) mit einer beliebigen homogenen Function des $(n-2)$. Grades multiplicirt, hinzuaddiren. So durften wir der allgemeinen Gleichung (I) der Complexe des zweiten Grades nach Belieben ein Glied $2V\eta$ hinzufügen. Unbeschadet der Allgemeinheit wollen wir die beliebige Function des $(n-2)$. Grades mit λ bezeichnen und bei der Bildung der Polarfunction als constant betrachten. Denn diejenigen Glieder der Polarfunction, welche wir dadurch vernachlässigen, erscheinen mit dem Factor $(-r'\sigma' + s'\varrho' + h'\eta')$ multiplicirt, und dieser Factor ist gleich Null, weil die Coordinaten der angenommenen geraden Linie, $r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta'$, die Gleichung (136) befriedigen müssen.

Wir können sonach für die Gleichung des gegebenen Complexes die folgende nehmen:

$$\Omega_n + \lambda(-r\sigma + s\varrho + h\eta) = 0. \tag{137}$$

Dann wird die Gleichung des Polar-Complexes:

$$\Pi + \lambda(-r\sigma' + s\varrho' + h\eta' - r'\sigma + s'\varrho + h'\eta) = 0, \tag{138}$$

wo Π die Function bezeichnet:

$$\Pi = \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) s + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\right) h - \left(-\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}\right) \sigma + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}\right) \varrho + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}\right) \eta.$$

Einem jeden Werthe von λ entsprechend erhalten wir einen anderen Polar-Complex.

299. Von den beiden Directricen der durch die zweigliedrige Gruppe

der Polar-Complexe bestimmten Congruenz fällt eine mit der gegebenen geraden Linie zusammen. Denn indem wir λ unendlich gross nehmen, wird die Gleichung (138):

$$-r\sigma' + s\varrho' + h\eta' - r'\sigma + s'\varrho + h'\eta = 0, \tag{139}$$

und diese Gleichung stellt nach den Erörterungen der 45. Nummer einen linearen Complex dar, der alle diejenigen Linien umfasst, welche die gegebene gerade Linie schneiden. Wir können diesen Satz, im Anschluss an die Betrachtungen der 71. Nummer, folgendermassen aussprechen:

Einer gegebenen geraden Linie entspricht in Bezug auf die zweigliedrige Gruppe der ihr zugeordneten linearen Polar-Complexe dieselbe gerade Linie als conjugirte Polare.

Diese letztere gerade Linie ist die zweite Directrix der durch die Polar-Complexe bestimmten Congruenz. Wir sagen, dass diese gerade Linie der gegebenen in Bezug auf den Complex n. Grades zugeordnet sei, und nennen sie die Polare der gegebenen geraden Linie mit Bezug auf den Complex n. Grades.*)

Wir können in der Gleichung (138) die unbestimmte Constante λ so wählen, dass die Gleichung einen Complex ersten Grades der besonderen Art darstellt, dessen sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden. Wir wollen zu diesem Zwecke die Gleichung (138) in der folgenden Weise schreiben:

$$\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) - \lambda\sigma'\right] r + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) + \lambda\varrho'\right] s + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\right) + \lambda\eta'\right] h$$
$$-\left[\left(-\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}\right) + \lambda r'\right]\sigma + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}\right) + \lambda s'\right]\varrho + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}\right) + \lambda h'\right]\eta = 0. \tag{140}$$

Dann erhalten wir zur Bestimmung von λ, nach der 45. Nummer:

$$\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) - \lambda\sigma'\right]\cdot\left[\left(-\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}\right) + \lambda r'\right] + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) + \lambda\varrho'\right]\cdot\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}\right) + \lambda s'\right]$$
$$+\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\right) + \lambda\eta'\right]\cdot\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}\right) + \lambda h'\right] = 0. \tag{141}$$

Zufolge der Gleichung (136) wird eine Wurzel der vorstehenden Gleichung unendlich gross, dem entsprechend, dass die eine Directrix der durch die

---

*) Wir mögen gleich hier bemerken, dass eine gerade Linie und ihre Polare nicht gegenseitig zu einander in derselben Beziehung stehn. Der Polare der gegebenen geraden Linie entspricht eine neue gerade Linie als die ihr zugeordnete Polare u. s. f. Es gibt nur eine endliche Anzahl solcher gerader Linien, die selbst die Polaren ihrer Polaren sind.

zweigliedrige Gruppe (138) bestimmten Congruenz mit der gegebenen geraden Linie zusammenfällt. Es reducirt sich daher die Gleichung (141) auf den ersten Grad und gibt, zur Bestimmung der zweiten Directrix, welche wir als die Polare der gegebenen geraden Linie bezeichnet haben, indem wir der Kürze wegen

$$-\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}=\Phi$$

setzen,

$$\lambda = -\,{}^1\!/_2\left(\frac{\Phi}{\Omega_n}\right), \tag{142}$$

wo in Φ und Ω_n die Werthe der Coordinaten der gegebenen geraden Linie einzusetzen sind und wir desshalb die Klammern zugefügt haben.

300. Wenn die gegebene gerade Linie insbesondere dem gegebenen Complexe Ω_n angehört, so erhalten wir statt der zweigliedrigen Gruppe der Polar-Complexe eine zweigliedrige Gruppe von Tangential-Complexen.

Die beiden Directricen der durch dieselben bestimmten Congruenz fallen in die gegebene gerade Linie zusammen. Denn indem Ω_n für die Coordinaten der gegebenen geraden Linie verschwindet, wird der Werth von λ, wie wir ihn durch die Gleichung (142) bestimmt haben, unendlich gross. Die Congruenz hat sich in der Art particularisirt, dass sie alle diejenigen Linien eines linearen Complexes umfasst, die eine feste gerade Linie schneiden, welche dem Complex selbst angehört (vergl. n. 68.). Diese feste gerade Linie ist die gegebene $(r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta')$.

Nur in dem besonderen Falle, dass die gegebene gerade Linie ausser dem gegebenen Complexe Ω_n zugleich dem folgenden Complexe angehört:

$$\Phi \equiv -\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}=0, \tag{143}$$

wird der durch (142) gegebene Werth von λ unbestimmt. Indem sowohl Ω und Φ verschwindet, erscheint λ unter der Form $\frac{0}{0}$. Bei beliebiger Annahme von λ erhalten wir jedesmal einen Tangential-Complex, dessen sämmtliche Linien eine feste gerade Gerade schneiden. Wenn wir λ unendlich gross wählen, fällt diese gerade Linie mit der gegebenen zusammen. Die gegebene gerade Linie bleibt, nach wie vor, eine der Directricen der durch die zweigliedrige Gruppe der Tangential-Ebene bestimmten Congruenz. Es hat sich diese Congruenz nach den Erörterungen der 68. Nummer, in der Weise particularisirt, dass sie unendlich viele Directricen besitzt, welche in einer Ebene liegen und innerhalb derselben durch einen Punct gehen. Alle Linien, welche in der durch die Directricen bestimmten Ebene liegen, oder durch ihren Schnittpunct hindurch gehen, gehören der Congruenz an.

Wir wollen diejenigen geraden Linien, welche sowohl dem gegebenen Complex n. Grades:

$$\Omega_n = 0$$

als dem aus demselben abgeleiteten Complexe $2(n-1)$. Grades:

$$\Phi = -\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma} + \frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho} + \frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta} = 0 \tag{143}$$

angehören, als die singulären Linien des gegebenen Complexes bezeichnen.

Die singulären Linien eines Complexes des n. Grades bilden eine Congruenz von der Ordnung und Classe $2n.(n-1)$.

Einer jeden singulären Linie entspricht, nach den vorstehenden Erörterungen, eine Ebene und ein Punct in ausgezeichneter Weise. Wir wollen jene eine singuläre Ebene, diesen einen singulären Punct des Complexes nennen und dieselben als der angenommenen singulären Linie zugehörig oder entsprechend bezeichnen.

Noch ein letzter Fall bleibt zu berücksichtigen. Wenn:

$$r' : s' : h' : -\sigma' : \varrho' : \eta'$$
$$= \left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right),$$

so stellt der Polar-Complex der gegebenen geraden Linie, unabhängig von dem besonderen Werthe, den wir λ ertheilen mögen, die Gesammtheit aller derjenigen geraden Linien dar, welche die gegebene schneiden. Die Polar-Complexe sind unter sich identisch geworden und bestimmen nicht mehr eine lineare Congruenz. Als Polare der gegebenen geraden Linie kann jede beliebige gerade Linie angesehen werden.

Wir wollen die gegebene gerade Linie eine Doppellinie des Complexes nennen.

Während zwei Bedingungen zu erfüllen sind, damit eine gegebene gerade Linie eine singuläre Linie des Complexes sei, und es also in einem gegebenen Complexe eine Congruenz singulärer Linien gibt, sind fünf Bedingungen zu befriedigen, damit eine gegebene gerade Linie eine Doppellinie des Complexes sei. Weil eine gerade Linie von vier Constanten abhängt, enthält also ein gegebener Complex im Allgemeinen keine Doppellinien. Es ist dazu eine Particularisation desselben erforderlich.

301. Wir beschränken uns in dem Folgenden auf Complexe des zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung des Complexes in Strahlen-Coordinaten sei:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gsh + 2Hrh + 2Irs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2Th\sigma + 2Uh\varrho = 0. \end{gathered} \qquad (V)$$

Wir erhalten dann für die Gleichung des Polar-Complexes einer gegebenen geraden Linie $(r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta')$ in Strahlen-Coordinaten die Gleichung:

$$\begin{gathered} (Ar' + Hh' + Is' - N\sigma' + P\varrho' + Q\eta')\, r \\ + (Bs' + Gh' + Ir' + O\varrho' + R\eta' - S\sigma')\, s \\ + (Ch' + Gs' + Hr' + V\eta' - T\sigma' + U\varrho')\, h \\ - (- D\sigma' + L\eta' + M\varrho' + Nr' + Ss' + Th')\, \sigma \\ + (E\varrho' + K\eta' - M\sigma' + Os' + Pr' + Uh')\, \varrho \\ + (F\eta' + K\varrho' - L\sigma' + Vh' + Qr' + Rs')\, \eta = 0. \end{gathered} \qquad (144)$$

Wir können in der vorstehenden Gleichung h und h' willkürlich der Einheit gleich setzen.

Wenn wir von der Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten (III) ausgehen, und die gegebene gerade Linie durch ihre Axen-Coordinaten $(p', q', l', -\varkappa', \pi', \omega')$ bestimmen, so erhalten wir für die Gleichung desselben Complexes:

$$\begin{gathered} (Dp' + Ll' + Mq' - N\varkappa' + S\pi' + T\omega')\, p \\ + (Eq' + Kl' + Mp' + O\pi' - P\varkappa' + U\omega')\, q \\ + (Fl' + Kq' + Lp' + V\omega' - Q\varkappa' + R\pi')\, l \\ - (- A\varkappa' + H\omega' + I\pi' + Np' + Pq' + Ql')\, \varkappa \\ + (B\pi' + G\omega' - I\varkappa' + Oq' + Rl' + Sp')\, \pi \\ + (C\omega' + G\pi' - H\varkappa' + Vl' + Tp' + Uq')\, \omega = 0. \end{gathered} \qquad (145)$$

Dabei ist:

$$\begin{gathered} r' : s' : h' : -\sigma' : \varrho' : \eta' \\ = -\varkappa' : \pi' : \omega' : p' : q' : l'. \end{gathered}$$

302. Wenn wir insbesondere in der allgemeinen Gleichung der Polar-Complexe (144) bezüglich

$$s', h', \varrho', \sigma', \eta',$$
$$r', h', \varrho', \sigma', \eta',$$
$$r', s', \varrho', \sigma', \eta'$$

gleich Null setzen, so stellen die drei resultirenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Ar + Hh + Is - N\sigma + P\varrho + Q\eta = 0, \\ Bs + Gh + Ir + O\varrho + R\eta - S\sigma = 0, \\ Ch + Gs + Hr + V\eta - T\sigma + U\varrho = 0 \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

die Polar-Complexe der drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ dar. Diese Gleichungen können wir unter der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\delta\Omega_2}{\delta r} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta s} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta h} = 0, \tag{146b}$$

was sich unmittelbar ergibt, wenn wir zu der Gleichung (144) zurückgehen.

Wenn wir eine derjenigen drei geraden Linien, welche in den Ebenen YZ, XZ, XY unendlich weit liegen, für die gegebene nehmen, verschwinden bezüglich:

$$r', s', h', \varrho', \eta',$$
$$r', s', h', \sigma', \eta',$$
$$r', s', h', \sigma', \varrho'.$$

Für die Polar-Complexe dieser drei geraden Linien erhalten wir somit:

$$\left.\begin{aligned} -D\sigma + L\eta + M\varrho + Nr + Ss + Th = 0, \\ E\varrho + K\eta - M\sigma + Os + Pr + Uh = 0, \\ F\eta + K\varrho - L\sigma + Vh + Qr + Rs = 0, \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

oder, unter anderer Form geschrieben:

$$\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta\varrho} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta\eta} = 0. \tag{148}$$

303. Setzen wir in der allgemeinen Gleichung des Complexes zweiten Grades (V), die wir auf folgende Weise schreiben wollen:

$$\Omega_2 = 0,$$

r, ϱ und folglich auch η gleich Null, so finden wir zur Bestimmung der Complex-Curve in YZ:

$$Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + 2Gsh - 2Ss\sigma - 2Th\sigma \equiv \Omega_2^0 = 0. \tag{149}$$

Für die Gleichung des Pols dieser Complex-Curve in Beziehung auf OZ finden wir, in bekannter Weise:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega_2^0}{dh} \equiv Ch + Gs - T\sigma = 0. \tag{150}$$

Andererseits ist die Gleichung des Polar-Complexes der Axe OZ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega_2}{dh} \equiv Ch + Gs + Hr - T\sigma + U\varrho + V\eta = 0.$$

Für alle Linien dieses Polar-Complexes, welche in YZ liegen, ist wiederum r, ϱ und η gleich Null, wonach die folgende Gleichung:

$$Ch + Gs - T\sigma = 0 \tag{150}$$

denjenigen Punct darstellt, in welchem diese Linien sich schneiden.

Der Pol der Axe OZ, in Beziehung auf die Complex-Curve in YZ, fällt also mit demjenigen Puncte zusammen, in welchem alle Linien des Polar-Complexes, welche in YZ liegen, sich schneiden. Dieser Durchschnittspunct beschreibt eine gerade Linie, wenn die Ebene YZ um OZ sich dreht. Diese Linie ist also zugleich der geometrische Ort der Pole von OZ in Beziehung auf diejenigen Complex-Curven, deren Ebenen durch OZ gehen. Wir erhalten so den folgenden Satz:

Einer beliebigen geraden Linie entspricht im Complex eine Meridianfläche. Die Polare dieser Meridianfläche fällt mit derjenigen geraden Linie zusammen, welche wir als die Polare der gegebenen geraden Linie in Bezug auf den Complex bezeichnet haben.*)

Insbesondere also ist ein Durchmesser des Complexes die Polare der in den ihm zugeordneten parallelen Ebenen unendlich weit liegenden geraden Linie.

Wenn wir den Beweis des vorstehenden Satzes auf seinen einfachsten Ausdruck zurückführen, so beruht er darauf, dass es einerlei ist, ob wir in der Function Ω_2 zuerst r, ϱ und η gleich Null setzen und dann in Beziehung auf h differentiiren, oder ob wir zuerst in Beziehung auf h differentiiren und nach der Differentiation r, ϱ und η gleich Null setzen. Das aber ist selbstverständlich.

304. Das Vorstehende gibt eine geometrische Definition für die Congruenz der einer gegebenen geraden Linie zugeordneten Polar-Complexe.

In einer beliebigen durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegt eine Complex-Curve zweiter Classe. Dieselbe wird, im Allgemeinen, von der gegebenen geraden Linie in zwei Puncten geschnitten. Die Tangenten der Complex-Curve in diesen Puncten gehören der fraglichen Congruenz an.

Ein beliebiger Punct der gegebenen geraden Linie ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels zweiter Ordnung. An denselben lassen sich durch die

*) Dieser Satz überträgt sich unmittelbar von Complexen des zweiten Grades auf Complexe eines beliebigen Grades.

gegebene gerade Linie, im Allgemeinen, zwei Tangential-Ebenen legen. Die beiden Seiten, nach welchen derselbe von diesen beiden Ebenen berührt wird, sind ebenfalls Linien der Congruenz.

Der durch die Polar-Complexe einer gegebenen geraden Linie bestimmten Congruenz gehören unter den Linien des gegebenen Complexes zweiten Grades diejenigen an, welche eine nächste Linie desselben Complexes, die mit ihnen bezüglich in derselben, durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegt, in einem Puncte der gegebenen geraden Linie schneiden.

Wenn die gegebene gerade Linie selbst eine Linie des Complexes ist, wird sie von allen Complex-Curven berührt, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen liegen, und ist eine gemeinschaftliche Seite aller Complexkegel, deren Mittelpuncte auf ihr angenommen sind. Dann fällt die Polare mit der gegebenen geraden Linie zusammen. Alle Linien, welche in einer durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegen und durch den Berührungspunct der bezüglichen Complex-Curve mit der gegebenen geraden Linie gehen, oder, was dasselbe ist, alle Linien, welche durch einen Punct der gegebenen geraden Linie gehen und in derjenigen Ebene enthalten sind, von welcher der bezügliche Complex-Kegel nach der gegebenen geraden Linie berührt wird, gehören der durch die Tangential-Complexe der gegebenen geraden Linie bestimmten Congruenz an.

Die fragliche Congruenz hat mit dem gegebenen Complexe zweiten Grades alle diejenigen geraden Linien gemein, welche in diesem nächste Linien der gegebenen sind und dieselbe schneiden.

305. Wenn die gegebene gerade Linie eine singuläre Linie des Complexes ist, so umfasst die durch die Tangential-Complexe bestimmte Congruenz alle solche Linien, welche in einer bestimmten, durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegen, sowie alle solche Linien, welche durch einen bestimmten Punct derselben gehen. Wir haben die Ebene und den Punct bezüglich die zugeordnete singuläre Ebene und den zugeordneten singulären Punct genannt.

Eine singuläre Linie des Complexes wird sonach von allen Complex-Curven, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen liegen, in einem festen Puncte berührt; und alle Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf einer singulären Linie des Complexes angenommen werden, berühren eine durch dieselbe hindurchgehende feste Ebene.

Dieses Resultat finden wir analytisch bestätigt. Wenn wir verlangen, dass die Coordinaten-Axe OX eine singuläre Linie des gegebenen Complexes sein soll, so erhalten wir, indem wir in den beiden Gleichungen:

$$\Omega_2 = 0, \qquad \Phi = 0$$

die Veränderlichen:

$$s, h, \sigma, \varrho, \eta$$

gleich Null setzen, die folgenden beiden Relationen zwischen den Constanten der gegebenen Complex-Gleichung:

$$A = 0, \qquad PI + HQ = 0. \tag{151}$$

Wir haben, unter der Voraussetzung, dass OX eine Linie des gegebenen Complexes sei, dass also die Constante A den Werth Null habe, den Berührungspunct derselben mit der Complex-Curve in einer beliebigen durch sie hindurchgelegten Ebene, durch die folgende Gleichung bestimmt (n. 191):

$$x_0 = \frac{I \tang \varphi + H}{Q \tang \varphi - P}. \tag{152}$$

Es bezeichnet φ den Winkel zwischen der beliebig angenommenen Ebene und der Coordinaten-Ebene XZ, x_0 den Abstand des Berührungspunctes von dem Anfangspuncte der Coordinaten. Dieser Abstand wird constant, sobald die zweite der Bedingungs-Gleichungen (151) erfüllt ist.

Wir haben ferner, unter derselben Voraussetzung, in der 192. Nummer zur Bestimmung der durch OX gelegten Tangential-Ebene eines beliebigen Complex-Kegels, der seinen Mittelpunct auf der Axe OX hat, gefunden:

$$\tang \varphi_0 = \frac{Px + H}{Qx - I}, \tag{153}$$

und auch dieser Ausdruck erhält einen constanten Werth, wenn die zweite der Gleichungen (151) erfüllt ist.

306. Die Gleichung (64) der 191. Nummer, durch welche wir diejenigen unter den durch OX gelegten Ebenen bestimmt haben, für welche sich die Complex-Curve in das System zweier Puncte auflöst, besitzt, wenn die zweite der Gleichungen (151):

$$PI + HQ = 0$$

erfüllt ist, die doppelte Wurzel:

$$\tang \varphi = -\frac{H}{I} = \frac{P}{Q}. \tag{154}$$

Diesem Werthe von $\tang \varphi$ entsprechend löst sich die Complex-Curve in ein System von zwei Puncten auf, welche beide auf der Axe OX liegen.

Denn der Werth von x_0 (152), welcher den Berührungspunct der Complex-Curve mit OX bestimmt, erscheint für den Werth (154) von tang φ unter der Form $\frac{0}{0}$.

Ebenso hat, unter derselben Voraussetzung, die Gleichung (67) der 192. Nummer, durch die wir diejenigen Puncte der Axe OX bestimmt haben, für welche sich der Complex-Kegel in das System zweier Ebenen auflöst, die doppelte Wurzel:

$$x = -\frac{H}{P} = \frac{I}{Q}. \tag{155}$$

Diesem Werthe von x entsprechend löst sich der Complex-Kegel in das System zweier Ebenen auf, die sich nach OX schneiden. Denn der zugehörige Werth von tang φ_0 (153) erscheint unter der Form $\frac{0}{0}$.

Dies gibt die folgende geometrische Definition der singulären Linien, Puncte und Ebenen eines Complexes des zweiten Grades.

Die Verbindungslinie solcher zwei Puncte, in welche sich eine Complex-Curve für besondere Lagen ihrer Ebenen auflöst, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Durchschnittslinien solcher zwei Ebenen, in welche ein Complex-Kegel bei einer besonderen Annahme seines Mittelpuncts zerfällt, ist eine singuläre Linie des Complexes. Diejenigen Ebenen und Puncte, für welche sich die Complex-Curve, bezüglich der Complex-Kegel, in der fraglichen Weise particularisirt, sind singuläre Ebenen und singuläre Puncte des Complexes.

Insbesondere also sind die acht Linien einer Complexfläche, welche wir bezüglich als singuläre Strahlen und als singuläre Axen derselben bezeichnet haben (n. 187, 189), und die vier singulären Ebenen und vier singulären Puncte einer Complexfläche (n. 215) singuläre Linien, Ebenen, Puncte des Complexes.

Wir haben in dem vorigen Paragraphen (n. 275 — n. 283) die unendlich weit liegende Ebene für eine singuläre Ebene des Complexes genommen und die ihr entsprechende singuläre Linie zu YZ parallel gewählt. In Uebereinstimmung mit dem Vorstehenden fanden wir, dass die Complex-Curven in allen zu YZ parallelen Ebenen Parabeln sind, deren Durchmesser-Richtung dieselbe ist (n. 281). Die gemeinsame Richtung der Durchmesser aller Parabeln bezeichnet den der in YZ unendlich weit liegenden singulären Linie zugehörigen singulären Punct.

307. Wenn gleichzeitig

$$A,\ H,\ I,\ P,\ Q$$

verschwinden, so particularisirt sich die Beziehung der singulären Linie, welche mit OX zusammenfällt, zu dem Complexe. Die Werthe von x_0 (152) und tang φ_0 (153) erscheinen dann, unabhängig von der Annahme der Veränderlichen tang φ und x, unter der Form $\frac{0}{0}$. Dem entsprechend löst sich die Complex-Curve in einer beliebigen durch OX gelegten Ebene in das System zweier Puncte auf, welche auf OX liegen, und der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct ein beliebiger Punct von OX ist, zerfällt in das System zweier Ebenen, die sich nach OX schneiden.

Für die Gleichung des Polar-Complexes der Axe OX erhalten wir unter dieser Constanten-Bestimmung die folgende:

$$\sigma = 0,$$

welche alle Linien darstellt, die die Axe OX schneiden. Die Axe OX ist eine Doppellinie des gegebenen Complexes geworden (vergl. n. 300). Eine Doppellinie ist sonach eine singuläre Linie, deren Beziehung zu dem Complexe sich in der Weise particularisirt hat, dass ein jeder auf ihr angenommener Punct ein singulärer Punct und jede durch sie hindurchgelegte Ebene eine singuläre Ebene des Complexes ist.

In der 284.—286. Nummer haben wir die in YZ unendlich weit liegende gerade Linie zu einer Doppellinie des Complexes gewählt, und, dem entsprechend, gefunden, dass alle Complex-Cylinder, deren Seiten der Ebene YZ parallel sind, in Systeme von zwei zu YZ parallelen Ebenen zerfallen.

Im Allgemeinen enthält ein gegebener Complex des zweiten Grades keine Doppellinie. Es verlangt das eine einfache Particularisation desselben.

308. Wir wollen die Gleichung des gegebenen Complexes des zweiten Grades wiederum unter der folgenden Form schreiben:

$$\Omega = 0. \tag{156}$$

Ohne den Complex selbst zu ändern, können wir zu dieser Gleichung die Identität

$$-r\sigma + s\varrho + h\eta = 0, \tag{157}$$

mit einem beliebigen Factor multiplicirt, hinzuaddiren. Dann erhalten wir:

$$\Omega + \lambda(-r\sigma + s\varrho + h\eta) = 0. \tag{158}$$

Dem entsprechend wird die Gleichung des Polar-Complexes, der einer gegebenen geraden Linie $(r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta')$ zugeordnet ist, die folgende:

$$\left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right) - \lambda\sigma'\right] r + \left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right) + \lambda\varrho'\right] s + \left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right) + \lambda\eta'\right] h - \left[\left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) + \lambda r'\right] \sigma$$

$$+ \left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right) + \lambda s'\right] \varrho + \left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right) + \lambda h'\right] \eta = 0, \qquad (159)$$

die sich auch unter der anderen Form schreiben lässt:

$$\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r} - \lambda\sigma\right) r' + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta s} + \lambda\varrho\right) s' + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta h} + \lambda\eta\right) h'$$

$$- \left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \lambda r\right) \sigma' + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho} + \lambda s\right) \varrho' + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta} + \lambda h\right) \eta' = 0. \qquad (160)$$

Wenn wir dann λ einen festen Werth ertheilen, knüpft sich an diese doppelte Form derselben Gleichung in dem nämlichen Sinne eine Theorie der Reciprocität, wie sie Gergonne zuerst bei ebenen Curven und Flächen der zweiten Ordnung entwickelt hat.*) Wir können dieselbe in den folgenden Worten zusammenfassen:

Einer jeden geraden Linie, welche dem Polar-Complexe einer gegebenen geraden Linie angehört, entspricht ein Polar-Complex, welchem, umgekehrt, die gegebene gerade Linie angehört.

Die Gesammtheit aller geraden Linien des Raumes mit ihren Polar-Complexen bilden ein Polarsystem. Für die Gleichung desselben können wir die vorstehenden beiden (159) und (160), die unter sich identisch sind, ansehen, indem wir neben $r, s, h, -\sigma, \varrho, \eta$ auch $r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta'$, aber unabhängig davon, als veränderlich betrachten. Einer anderen Annahme der unbestimmten Constante λ entsprechend erhalten wir aus dem gegebenen Complexe des zweiten Grades ein anderes Polarsystem, welches zu dem Complexe in derselben Beziehung steht, wie das ursprünglich ausgewählte. Während ein Complex des zweiten Grades von neunzehn Constanten abhängt, ist ein jedes der Polar-Systeme, welche demselben zugehören, durch zwanzig Constante bestimmt.

309. Um auszudrücken, dass die gegebene gerade Linie selbst dem ihr zugeordneten Polar-Complexe angehöre, erhalten wir, unabhängig von dem besonderen Werthe, den wir der Constante λ beilegen wollen, unter Berücksichtigung der Gleichung (157), die folgende Bedingung:

---

*) Geometrie des Raumes. n. 258.

$$\left[\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right] r' + \left[\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right] s' + \ldots\ldots \equiv (\Omega) = 0. \qquad (161)$$

Diejenigen Linien, welche den ihnen zugeordneten Polar-Complexen selbst angehören, sind in allen Polar-Systemen dieselben und fallen mit den Linien des gegebenen Complexes des zweiten Grades zusammen.

Wenn in einem Polarsysteme, als dessen Gleichung wir die Gleichung (159) betrachten wollen, der Polar-Complex einer gegebenen geraden Linie ein Complex von der besonderen Art sein soll, dessen Linien sämmtlich eine feste gerade Linie schneiden, so erhalten wir, nach den Erörterungen der 45. Nummer, indem wir, wie in der 299. Nummer,

$$(\Phi) \equiv -\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right)\cdot\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right) + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right)$$

setzen, unter Berücksichtigung der Gleichung (157), die folgende:

$$(\Phi) + \lambda\,(\Omega) = 0. \qquad (162)$$

Diese Gleichung wird unabhängig von dem besonderen Werthe, den wir λ gegeben haben, erfüllt, sobald die beiden Gleichungen:

$$(\Phi) = 0, \qquad (\Omega) = 0$$

befriedigt werden. Es sind dies dieselben Gleichungen, durch welche wir, in der 300. Nummer, die singulären Linien des gegebenen Complexes bestimmt haben. Wir erhalten also, in Uebereinstimmung mit dem Früheren, den Satz, dass die Polar-Complexe der singulären Linien des gegebenen Complexes in allen zugehörigen Polar-Systemen Complexe von der besonderen Art sind, deren sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden.

310. Wir wollen λ in dem Folgenden, unbeschadet der Allgemeinheit, gleich Null setzen und das durch diesen Werth von λ bestimmte Polarsystem einer näheren Betrachtung unterwerfen. Es schreibt sich dann die Gleichung des Polarsystems unter der doppelten Form:

$$\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right) s + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right) h - \left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\sigma + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right)\varrho + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right)\eta = 0, \qquad (163)$$

und:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta r}\cdot r' + \frac{\delta\Omega}{\delta s}\cdot s' + \frac{\delta\Omega}{\delta h}\cdot h' + \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\cdot\sigma' + \frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\cdot\varrho' + \frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\cdot\eta' = 0. \qquad (164)$$

Sei eine gerade Linie gegeben. Derselben entspricht in dem Polar-System ein Polar-Complex. Jeder Linie des lezteren gehört ein Polar-Complex an, der die gegebene gerade Linie enthält. Aber im Allgemeinen haben die Polar-Complexe, welche den Linien eines beliebig angenommenen linearen Complexes entsprechen, keine gerade Linie mit einander gemein. Dazu bedarf es einer besonderen Lage desselben gegen das gegebene Polar-System.

Die Polar-Complexe, welche zwei gegebenen geraden Linien entsprechen, bestimmen eine lineare Congruenz. Die gegebenen beiden geraden Linien gehören einem jeden derjenigen Polar-Complexe an, die den Linien der Congruenz entsprechen. Und umgekehrt haben auch die Polar-Complexe aller Linien einer beliebig angenommenen linearen Congruenz zwei feste gerade Linien gemein. Denn vier Linien der Congruenz bestimmen durch ihre Polar-Complexe zwei gerade Linien. Die Polar-Complexe dieser zwei geraden Linien haben vier Linien der gegebenen Congruenz und somit alle derselben gemein.

Wenn drei gerade Linien gegeben sind, so bestimmen die Polar-Complexe ein Hyperboloid durch die Linien einer Erzeugung desselben. Eine beliebige der Linien derselben Erzeugung, die wir als die erste bezeichnen wollen, besitzt einen Polar-Complex, dem die gegebenen drei geraden Linien angehören. Die gegebenen drei geraden Linien bestimmen, als Linien erster Erzeugung, ein zweites Hyperboloid. Die beiden Hyperboloide entsprechen sich gegenseitig. Die Linien der ersten Erzeugung des zweiten Hyperboloids gehören den Polar-Complexen der Linien erster Erzeugung des ersten Hyperboloids an, und ebenso die Linien erster Erzeugung des ersten Hyperboloids den Polar-Complexen der Linien erster Erzeugung des zweiten Hyperboloids. Die zweite Erzeugung jedes der beiden Hyperboloide kommt dabei nicht weiter in Betracht. Jeder Erzeugung entsprechend ist einem gegebenen Hyperboloide ein zweites zugeordnet.

Indem wir die drei gegebenen geraden Linien insbesondere so annehmen, dass sie sich in einem Puncte schneiden oder dass sie in einer Ebene liegen, bestimmen sie alle Linien, welche durch einen festen Punct hindurchgehen, oder welche in einer festen Ebene enthalten sind. Es entspricht also in dem Polar-Systeme jedem Puncte und jeder Ebene die eine Erzeugung eines Hyperboloids. Der Polar-Complex, welcher einer beliebigen Linie dieser Erzeugung angehört, ist von der besonderen Art, dass alle seine Linien eine feste gerade Linie schneiden. Diese feste gerade Linie geht bezüglich durch den gegebenen Punct oder liegt in der gegebenen Ebene. Die Linien der einen Erzeugung der Hyperboloids gehören dem durch die Gleichung (162) bestimmten Complexe an. Das Hyperboloid ist nicht selbst particularisirt, sondern nur seine Lage zu dem Polar-System.

Nehmen wir insbesondere für die drei sich schneidenden geraden Linien die drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ oder die drei in den Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY unendlich weit liegenden geraden Linien, so erhalten wir zur Bestimmung desjenigen Hyperboloids, welches bezüglich dem Coordinaten-Anfangspuncte oder der unendlich weit liegenden Ebene zugeordnet ist, die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta r} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta s} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta h} = 0, \tag{165}$$

oder:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \sigma} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta \varrho} = 0, \qquad \frac{\delta \Omega}{\delta \eta} = 0. \tag{166}$$

Unter beiden Annahmen wird die Gleichung (162):

$$\Phi \equiv -\frac{\delta \Omega}{\delta r} \cdot \frac{\delta \Omega}{\delta \sigma} + \frac{\delta \Omega}{\delta s} \cdot \frac{\delta \Omega}{\delta \varrho} + \frac{\delta \Omega}{\delta h} \cdot \frac{\delta \Omega}{\delta \eta} = 0$$

erfüllt, welche diejenigen geraden Linien darstellt, denen in dem gegebenen Polar-System ($\lambda = 0$) solche Polar-Complexe entsprechen, deren sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden.

§ 5.

Fläche vierter Ordnung und Classe, von den singulären Puncten des Complexes gebildet, von den singulären Ebenen desselben umhüllt.

311. Wir haben einen Punct, dessen Complex-Kegel sich in das System zweier Ebenen auflöst, einen singulären Punct, und eine Ebene, deren Complex-Curve in das System zweier Puncte ausartet, eine singuläre Ebene des Complexes genannt.

Die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, in welche sich der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct ein singulärer Punct ist, aufgelöst hat, so wie die Verbindungslinie der beiden Puncte, in welche die Complex-Curve, deren Ebene eine singuläre Ebene ist, zerfällt, sind singuläre Linien des Complexes. In diesem Sinne entspricht einer jeden singulären Linie ein singulärer Punct und eine singuläre Ebene. Alle Complex-Curven, welche in Ebenen liegen, die durch eine singuläre Linie hindurchgelegt sind, berühren dieselbe in dem entsprechenden singulären Puncte, und alle Complex-Kegel, deren