§ 3.

Die unendlich weit liegenden Linien des Complexes. Eintheilung der Complexe nach diesen Linien.

266. Wenn wir in einer gegebenen Ebene eine gerade Linie beliebig annehmen und, parallel mit sich selbst, immer weiter fortrücken lassen, so verliert sie in unendlicher Entfernung jede Spur ihrer ursprünglichen Richtung in der Ebene. Auch können wir an die Stelle der gegebenen Ebene, welche die unendlich weit gerückte Linie enthielt, jede andere Ebene setzen, die derselben parallel ist. Alle in parallelen Ebenen unendlich weit liegenden geraden Linien fallen im Unendlichen in eine einzige zusammen. Die unendlich weit gerückte gerade Linie ist der Durchschnitt unendlich vieler parallelen Ebenen. Sie hat, im Unendlichen, keine andere Beziehung zum Endlichen behalten, als dass sie einer gegebenen Ebenen-Richtung, einer gegebenen Ebene, parallel ist.

Wenn eine gegebene Ebene, parallel mit sich selbst, immer weiter fortrückt, so verliert sie ihrerseits ihre Richtung. Eine unendlich weit entfernte Ebene ist als jeder gegebenen Ebene parallel zu betrachten. Die in ihr liegenden geraden Linien haben jede Beziehung zum Endlichen und somit jede Bedeutung im gewöhnlichen Sinne verloren.

Diese geometrischen Anschauungen finden ihren unmittelbaren analytischen Ausdruck. Damit eine gerade Linie:

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

in einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0,$$

enthalten sei, ergeben sich die folgenden drei Relationen:

$$tr + us + v = 0,$$
$$t\varrho + u\sigma + w = 0,$$
$$t\eta + v\sigma - ws = 0.$$

Wenn die gerade Linie in der gegebenen Ebene unendlich weit liegt, sind ϱ und σ, und, in Folge davon, auch $\eta \equiv r\sigma - s\varrho$ unendlich gross. Dann geben die beiden letzten der vorstehenden Gleichungen:

$$t : u : v = -\sigma : \varrho : \eta,$$

während die erste Gleichung bloss ausdrückt, dass die unendlich weit gerückte gerade Linie der gegebenen Ebene parallel ist.

Wenn die gegebene Ebene unendlich weit rückt, wird w unendlich gross, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es verschwinden t, u und v. Ihre Gleichung drückt dann ihre Richtung nicht mehr aus und die vorstehenden drei Relationen verlieren ihre Bedeutung.

267. Wenn wir wiederum für die allgemeine Gleichung der Complexe des zweiten Grades die folgende nehmen:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Irs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0, \end{gathered} \tag{I}$$

und in derselben ϱ, σ, η unendlich gross werden lassen und demnach gegen diese drei Veränderlichen die beiden übrigen, r und s, sowie constante Grössen und endlich gegen zweite Potenzen der erstgenannten drei Veränderlichen erste Potenzen derselben vernachlässigen, so ergibt sich für solche Linien des Complexes, welche unendlich weit liegen:

$$D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma = 0. \tag{85}$$

Diese Gleichung stellt, wie jede Gleichung in Linien-Coordinaten, einen Complex dar. Wir wollen denselben den Asymptoten-Complex des gegebenen Complexes nennen. Dieser Complex subsumirt sich, nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen, unter diejenigen, welche einen Kegel zweiter Classe darstellen. Der Mittelpunct dieser Kegelfläche fällt mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammen und ihr Durchschnitt mit der unendlich weit liegenden Ebene ist die in dieser Ebene von Linien des Complexes umhüllte Curve zweiter Classe.

Ein jeder Complex des zweiten Grades, in dessen Gleichung die Glieder zweiter Ordnung in ϱ, σ, η mit denselben Constanten D, E, F, K, L, M multiplicirt vorkommen, wie in der Gleichung des gegebenen Complexes, stellt mit gleicher Genauigkeit die im Unendlichen liegenden Linien des gegebenen Complexes dar, als derjenige Complex, dessen Gleichung die vorstehende (85) ist. Es ist der Asymptoten-Complex, der seinerseits wieder zu allen solchen Complexen in gleicher Beziehung, wie zu dem gegebenen, steht, unter ihnen durch die Einfachheit seiner Gleichung und, dem entsprechend, sowohl durch die übersichtliche Gruppirung seiner Linien als durch eine besondere Lage zu dem Coordinaten-Systeme ausgezeichnet.

Der Grad der Annäherung, mit welcher der Asymptoten-Complex die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes darstellt, ist nur der erste, insofern seine Gleichung mit der des gegebenen einzig in den Gliedern zweiter Ordnung der in Betracht kommenden Veränderlichen, nicht aber auch in denen erster Ordnung, übereinstimmt.

268. Wenn wir in der Gleichung (85) für $-\sigma$, ϱ, η bezüglich die obigen Werthe t, u, v, welche diese Coordinaten für unendlich weit entfernte gerade Linien annehmen, einsetzen, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu = 0,$$

zur Bestimmung derjenigen Ebenen-Richtungen, nach welchen Linien des Complexes unendlich weit liegen. Legen wir durch den Coordinaten-Anfangspunct Ebenen, welche diese Richtung haben, so umhüllen dieselben eine Kegelfläche zweiter Classe, dieselbe Kegelfläche, welche durch die Gleichung (85) in Linien-Coordinaten dargestellt wird. Wir können die Kegelfläche und mit ihr den Asymptoten-Complex beliebig parallel mit sich selbst verschieben, ohne die Beziehung zu dem gegebenen Complex zu ändern. Denn bei einer solchen Verschiebung bleiben nach den Coordinaten-Transformationsformeln der 157. Nummer die Coefficienten D, E, F, K, L, M, auf die es hier einzig ankommt, ungeändert. Bei der Verschiebung rücken die Tangential-Ebenen der Kegelfläche parallel mit sich selbst fort. Alle unter sich parallelen Tangential-Ebenen schneiden sich auf einer Linie des gegebenen Complexes, welche unendlich weit liegt.

Wir haben in dem ersten Paragraphen dieses Abschnitts als Characteristik eines Complexes eine Fläche zweiter Classe bezeichnet, deren Mittelpunct und absolute Dimensionen beliebig angenommen werden können, und die, wenn wir ihren Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten legen und durch k eine willkürliche Constante bezeichnen, durch die folgende Gleichung dargestellt wird:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + Mtu + kw^2 = 0.$$

Nach dem Vorstehenden liegen die unendlich weit entfernten Linien des Complexes in den Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels der Characteristik, und dieser Asymptoten-Kegel wird durch die Gleichung (85) in Linien-Coordinaten dargestellt. Eine Ebene, die wir unendlich weit rücken lassen, aber so, dass sie ihre ursprüngliche Richtung noch nicht verliert, schneidet diesen Asymptoten-Kegel, und also auch die Characteristik selbst, nach einer Curve, die von unendlich weit liegenden Linien des Complexes umhüllt wird. Es kommt hierbei auf eine endliche Verschiebung der Characteristik und ihres Asymptoten-Kegels nicht an.

269. Wir können uns der unendlich weit entfernten Ebene, von der wir kaum eine geometrische Vorstellung haben, auf unendlichfach verschiedene Weise nähern, indem wir von einer Ebene mit gegebener Richtung ausgehen, die, diese Richtung beibehaltend, immer weiter fortrückt. In einer solchen beliebigen Ebene liegt einerseits eine Complex-Curve zweiter Classe, andererseits als Durchschnitt mit der Characteristik eine zweite solche Curve: die beiden Curven fallen, wenn ihre Ebene unendlich weit rückt, zusammen; mit anderen Worten, die Curven der sämmtlichen Aequatorialflächen eines gegebenen Complexes in Breiten-Ebenen, die unendlich weit gerückt sind, liegen auf der Characteristik.

Während die Ebene von gegebener Richtung fortrückt, ändert sich in ihr fortwährend die Complex-Curve, welche die Aequatorialfläche beschreibt. Die Richtung der beiden Axen der Curve und ihr Verhältniss nähern sich, wenn die Ebene immer weiter rückt, der Richtung der Ebene entsprechend, einer bestimmten Grenze. Diese Grenze ist gegeben durch die constante Richtung und das constante Verhältniss der Axen der Durchschnitts-Curve der fortrückenden Ebene mit der Characteristik. Da in unendlicher Entfernung Complex-Curven und Durchschnitts-Curven der Characteristik, welche in parallelen Ebenen enthalten sind, zusammenfallen, muss der Durchmesser der bezüglichen Aequatorialfläche des gegebenen Complexes mit demjenigen Durchmesser der Characteristik parallel sein, welcher der parallel mit sich selbst fortrückenden Ebene zugeordnet ist, wie das die analytischen Entwicklungen des ersten Paragraphen bestätigen.

Es bezeichnen die vorstehenden geometrischen Anschauungen die Beziehungen zwischen dem gegebenen Complexe und seiner Characteristik. In Uebereinstimmung mit denselben erhalten wir aus den Gleichungen (7) der 166. Nummer für die drei Complex-Curven in solchen Ebenen, welche den beliebig angenommenen Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY parallel unendlich weit gerückt sind, indem wir erste Potenzen von x, y, z und Constante gegen zweite Potenzen derselben vernachlässigen, die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
Dw^2 + 2Lxvw + Fx^2v^2 + 2Mxuw + 2Kx^2uv + Ex^2u^2 &= 0,\\
Ew^2 + 2Mytw + Dy^2t^2 + 2Kyvw + 2Ly^2tv + Fy^2v^2 &= 0,\\
Fw^2 + 2Kzuw + Ez^2u^2 + 2Lztw + 2Mz^2tu + Dz^2t^2 &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

die mit den Gleichungen der Durchschnitts-Curven der drei fraglichen Ebenen mit dem Asymptotenkegel der Characteristik zusammenfallen.

270. Die Kegelfläche der zweiten Classe, welche von den Linien des Asymptoten-Complexes umhüllt wird, kann reell oder imaginär sein, und dementsprechend schliesst der gegebene Complex zweiten Grades entweder solche reelle Linien ein, welche unendlich weit liegen, oder nicht. Danach zerfallen die allgemeinen Complexe des zweiten Grades in zwei coordinirte Arten. Complexe der ersten Art wollen wir hyperboloidische, Complexe der zweiten Art ellipsoidische nennen. Wir sehen bei dieser Eintheilung zunächst von allen solchen Complexen ab, deren Asymptoten-Complex sich irgendwie particularisirt hat.

Hyperboloidische Complexe haben eine Characteristik mit einem reellen Asymptotenkegel, und werden demnach analytisch dadurch bezeichnet, dass nur zwei der drei Ausdrücke:

$$D - \frac{LM}{K}, \qquad E - \frac{MK}{L}, \qquad F - \frac{KL}{M}$$

Werthe mit gleichem Vorzeichen haben.

Ellipsoidische Complexe haben eine Characteristik, deren Asymptoten-Kegel sich auf einen ellipsoidischen Punct reducirt; die obigen drei Ausdrücke haben für solche Complexe Werthe, die alle drei im Zeichen übereinstimmen.

271. In hyperboloidischen Complexen bestimmen die Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels der Characteristik die Richtungen derjenigen Ebenen, nach welchen Linien des Complexes unendlich weit liegen. Die Complex-Curven in solchen Ebenen sind Parabeln, welche die unendlich weit liegenden Linien berühren. Bewegt sich eine solche Ebene parallel mit sich selbst, so beschreibt die in ihr liegende, von Linien des Complexes umhüllte Parabel eine parabolische Aequatorialfläche (n. 232). Die Seite, nach welcher der Asymptoten-Kegel der Characteristik von einer Breiten-Ebene der Fläche berührt wird, bestimmt die Richtung, welcher die Richtung der Axe der Parabel sich fortwährend nähert, wenn die Ebene derselben immer weiter fortrückt, was in zweifachem Sinne geschehen kann.

Jede andere Ebenen-Richtung, nach der keine Linie des Complexes unendlich weit liegt, bestimmt eine Aequatorialfläche, deren Breiten-Curven einen Mittelpunct besitzen. Hier heben wir zunächst nur hervor, dass, bei zunehmender Entfernung einer parallel mit sich selbst fortrückenden Ebene die Complex-Curve in ihr entweder eine Hyperbel oder eine Ellipse ist, je nachdem die Ebene den Asymptoten-Kegel in einer Hyperbel oder einer Ellipse schneidet.

Durch eine gegebene gerade Linie lassen sich im Allgemeinen zwei Ebenen legen, in denen eine Linie des hyperboloidischen Complexes unendlich weit liegt. Nehmen wir irgend einen Punct der gegebenen geraden Linie als Mittelpunct des Asymptoten-Kegels der Characteristik, so sind die beiden Tangential-Ebenen, welche durch die gegebene Linie an diesen Kegel sich legen lassen, die beiden fraglichen Ebenen. Sie sind reell oder imaginär, je nachdem die Linie ausserhalb oder innerhalb des Kegels liegt, und fallen, wenn die Linie eine Seite des Kegels ist, in eine Tangential-Ebene desselben zusammen. Dem entsprechend können unter den Meridian-Curven einer Meridianfläche eines hyperboloidischen Complexes zwei Parabeln auftreten. Dieselben können auch zusammenfallen. Es hängt das ab von der Richtung der Doppellinie der Meridianfläche in Beziehung auf den Asymptoten-Kegel der Characteristik des Complexes.

Die der Doppellinie einer Meridianfläche parallelen Linien des Complexes bilden einen der Meridianfläche umschriebenen Complex-Cylinder. Dieser Cylinder ist ein hyperbolischer oder ein elliptischer*), je nachdem die beiden Meridian-Ebenen, in welchen parabolische Complex-Curven liegen, reell oder imaginär sind. Fallen die beiden Ebenen in eine zusammen, so wird der Complex-Cylinder ein parabolischer.

Nach dem Vorstehenden sind also die von den Linien eines hyperboloidischen Complexes gebildeten Cylinder elliptische oder hyperbolische, je nachdem die Richtung der sie erzeugenden Complex-Linien in den Asymptoten-Kegel der Characteristik hineinfällt, oder nicht. Alle Complex-Cylinder, deren Erzeugende einer Seite des Asymptoten-Kegels parallel sind, sind parabolische.

272. In ellipsoidischen Complexen gibt es überhaupt keine parabolischen Complex-Curven. Alle Aequatorialflächen sind zwischen zwei in endlichem Abstande von einander befindliche Ebenen eingeschlossen. Diese Ebenen bezeichnen den Uebergang von solchen Ebenen, in welchen eine reelle Complex-Curve liegt, zu solchen, in denen eine imaginäre Curve von Linien des Complexes umhüllt wird.

---

*) Wir verstehen hier und im Folgenden unter einem hyperbolischen und einem elliptischen Cylinder einen solchen, der von der unendlich weit entfernten Ebene bezüglich in zwei reellen oder in zwei imaginären geraden Linien geschnitten wird. Danach wird auch der imaginäre Cylinder als ein elliptischer bezeichnet. Insbesondere kann sich der hyperbolische und der elliptische Cylinder in das System zweier sich schneidender, bezüglich reeller oder imaginärer Ebenen auflösen.

Wenn die beiden Durchschnittslinien mit der unendlich entfernten Ebene in eine gerade Linie zusammenfallen, heisst der Cylinder ein parabolischer, auch wenn er sich in ein System zweier paralleler, reeller oder imaginärer, Ebenen particularisirt.

Unter den Meridian-Curven einer beliebigen, dem Complexe angehörigen Meridianfläche finden sich keine Parabeln. Die beiden Meridian-Ebenen, in welchen in dem Falle hyperboloidischer Complexe Parabeln von den Linien des Complexes umhüllt werden, sind bei ellipsoidischen Complexen unabhängig von der Richtung der Doppellinie imaginär. In Folge dessen sind sämmtliche Cylinder, welche von Linien eines ellipsoidischen Complexes gebildet werden, elliptische Cylinder.

273. Wir haben in der 163. Nummer für die Gleichung einer solchen Aequatorialfläche, deren Breiten-Curven der Ebene YZ parallel sind, in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten x, u, v, w, die folgende erhalten:

$$Dw^2 + 2(Lx - S)vw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2$$
$$+ 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \quad (87)$$

Diese Gleichung enthält dreizehn Constante, welche mit den zwei Constanten, durch welche das Coordinaten-System particularisirt ist, die fünfzehn Constanten geben, von denen die Aequatorialfläche abhängt.

Wenn wir die Axe OX so bestimmen, dass sie dem Durchmesser des Complexes, welcher der zu YZ genommenen beliebigen Ebene zugeordnet ist, parallel läuft, so verschwinden die Constanten L und M; wenn sie mit diesem Durchmesser zusammenfällt, so verschwinden gleichzeitig S und T. Es verschwindet K, wenn wir in YZ den beiden Axen OY und OZ eine solche Richtung geben, dass die drei Coordinaten-Axen dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Durch diese Coordinaten-Bestimmung verliert die allgemeine Gleichung der Aequatorialfläche fünf weitere ihrer Constanten, indem sie in die folgende übergeht:

$$Dw^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 - 2(Ox + G)uv$$
$$+ (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \quad (88)$$

Wenn wir die Coordinaten-Ebene YZ parallel mit sich selbst verschieben, bis sie durch den Mittelpunct des Complexes geht, so reducirt sich die Anzahl der Constanten, in Gemässheit der Bedingungs-Gleichung (36):

$$ER = FU,$$

um eine sechste Einheit.

274. Für ellipsoidische Complexe sind alle Aequatorialflächen durch eine Gleichung von der Form der letzten, (88), darstellbar, wie wir auch die Richtung der Ebene YZ wählen mögen. Wenn wir aber bei hyperboloidischen Complexen insbesondere die Breiten-Ebenen der Aequatorialfläche einer Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels der Characteristik parallel

nehmen, so ist der zugeordnete Durchmesser der Characteristik diesen Ebenen parallel und in Folge dessen die vorstehende Coordinaten-Bestimmung nicht mehr möglich. Dann verliert die allgemeine Gleichung der Aequatorialfläche (87) die Constante D, so dass die Fläche nur noch von vierzehn Constanten abhängt. Solche Aequatorialflächen haben wir parabolische genannt.

Dem Verschwinden von D entspricht, dass die Ebene YZ eine Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels der Characteristik ist, als deren Mittelpunct wir den Coordinaten-Anfangspunct genommen haben. Wir wollen die Axe OZ mit derjenigen Seite des Asymptoten-Kegels zusammenfallen lassen, nach welcher derselbe von der Ebene YZ berührt wird. Dann verschwindet in der Gleichung der Aequatorialfläche die Constante M. Im allgemeinen Falle sind die Coordinaten des Mittelpunctes einer beliebigen Breiten-Curve:

$$y = -\frac{Mx + T}{D}, \qquad z = -\frac{Lx - S}{D}.$$

Wenn D verschwindet, rückt der Mittelpunct in der Ebene der Curve unendlich weit, und die Richtung, nach welcher er unendlich weit liegt, ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Mx + T}{Lx - S}$$

bestimmt, in welcher α den Winkel bezeichnet, den diese Richtung, die Axen-Richtung der Parabel, mit OZ bildet. Für die unendlich weit liegende Parabel kommt:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{M}{L}$$

Wenn M verschwindet, ist diese Axen-Richtung mit der Axe OZ parallel.

Die Richtung der Axe OY ist bisher noch unbestimmt geblieben. Wir können dieselbe in YZ senkrecht gegen OZ nehmen. Wenn wir dann durch OY eine zweite Tangential-Ebene an den Asymptoten-Kegel legen und dieselbe als Ebene XY und die Seite des Asymptoten-Kegels, nach welcher sie berührt wird, als Axe OX nehmen, so verschwinden aus der Gleichung der Aequatorialfläche die zwei Constanten F und K. Dann schreibt sich die Gleichung der Fläche unter der folgenden Form:

$$\begin{aligned} &2(Lx - S)vw - (2Rx - B)v^2 + 2Tuw \\ &- 2(Ox + G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \end{aligned} \tag{89}$$

Aus dieser Gleichung können wir durch schickliche Wahl des Anfangspunctes noch weitere drei Constante fortschaffen.

275. Wenn sich der Ausdruck:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu,$$

entsprechend der Bedingungs-Gleichung:

$$DEF - DK^2 - EL^2 - FM^2 + 2KLM = 0, \tag{90}$$

in zwei Factoren des ersten Grades auflöst, so particularisirt sich der Complex, indem er eine seiner neunzehn Constanten verliert.

Die vorstehende Bedingungs-Gleichung kommt darauf hinaus, dass, wenn wir durch eine schickliche Annahme der Richtung der drei Coordinaten-Axen, wie früher, K, L, M verschwinden lassen, dadurch zugleich eine der drei Constanten D, E, F verschwindet. Ist D die verschwindende Constante, so wird die Gleichung des Complexes:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{aligned} \tag{91}$$

Aus dieser Gleichung, bei welcher wir, unbeschadet der Allgemeinheit, das Coordinaten-System als ein rechtwinkliges annehmen wollen, können wir noch weitere drei Constanten durch die Bestimmung des Anfangspunctes der Coordinaten fortschaffen. Wesentlich bei den folgenden Betrachtungen ist, dass durch die Wahl der Richtung der Coordinaten-Axen ausser D nicht auch noch eine andere der Constanten D, E, F verschwindet.

276. Wir haben durch die Gleichung:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu + kw^2 = 0$$

die Characteristik des Complexes dargestellt. Diese Characteristik ist in dem allgemeinen Falle der hyperboloidischen und ellipsoidischen Complexe eine Fläche des zweiten Grades mit einem Mittelpuncte. Der Mittelpunct dieser Fläche und ihre absoluten Dimensionen, die von der willkürlichen Constante k abhängen, können beliebig angenommen werden. In dem Falle der Complexe besonderer Art, die wir jetzt betrachten und die wir durch die Gleichung (91) dargestellt haben, reducirt sich die Characteristik auf eine Curve zweiten Grades mit einem Mittelpuncte. Wir wollen diese Curve die characteristische Curve des Complexes besonderer Art nennen.

Durch die Ebene der characteristischen Curve ist eine ausgezeichnete Ebenen-Richtung für den Complex gegeben. Nehmen wir dieselbe der Coordinaten-Ebene YZ parallel, so verschwinden D, L, M und die Gleichung der Curve geht in die folgende über:

$$Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + kw^2 = 0.$$

Wenn wir zwei zugeordnete Durchmesser der Curve, insbesondere die beiden Axen derselben, zu Coordinaten-Axen OY und OZ nehmen, so verschwindet K, und dann sind die Coordinaten-Axen dieselben, auf welche der Complex in der Gleichung (91) bezogen ist.

277. Wir haben die Bestimmung der Richtung der zugeordneten Durchmesser eines Complexes der allgemeinen Art auf die Betrachtung der Durchmesser seiner characteristischen Fläche zurückgeführt. Die characteristische Curve eines Complexes der besonderen Art können wir als die Grenze von characteristischen Flächen ansehen, und, in Folge davon, sagen, dass von zwei zugeordneten Durchmessern der Curve jeder zugleich allen Ebenen zugeordnet ist, welche nach beliebiger Richtung durch den jedesmaligen anderen gelegt werden können; dass jede durch den Mittelpunct der Curve hindurchgehende gerade Linie, welche nicht in der Ebene derselben liegt, dieser Ebene zugeordnet sei, und endlich, dass eine beliebige solche gerade Linie und zwei zugeordnete Durchmesser der Curve ein System dreier zugeordneter Durchmesser der Curve bilden.

Diese Relationen übertragen sich unmittelbar auf Complexe der besonderen Art. Einer gegebenen Ebene entspricht ein Durchmesser des Complexes, welcher der Ebene der characteristischen Curve parallel ist und dieser Ebene parallel bleibt, wie auch die Richtung der gegebenen Ebene sich ändern mag; oder, mit anderen Worten, die Durchmesser aller Aequatorialflächen des Complexes sind der Ebene seiner characteristischen Curve parallel.

Wenn sich die gegebene Ebene um ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der characteristischen Curve dreht, so rückt der zugeordnete Durchmesser des Complexes parallel mit sich selbst fort. Es gibt also unendlich viele unter sich parallele Durchmesser des Complexes. Wenn endlich die sich drehende Ebene mit der Ebene der characteristischen Curve zusammenfällt, so wird der Durchmesser unbestimmt. Er verliert seine Richtung, indem er unendlich weit rückt.

In dem allgemeinen Falle der hyperboloidischen und ellipsoidischen Complexe haben wir gezeigt, dass je zwei conjugirte Durchmesser von der Axe desjenigen Complex-Cylinders geschnitten werden, dessen Seiten dem dritten conjugirten Durchmesser parallel sind. In dem Falle der besonderen Complexe, die wir hier betrachten, ist jedesmal der dritte conjugirte Durchmesser unendlich weit gerückt. Aber nach wie vor bestimmen je zwei beliebige, der Central-Ebene parallele, conjugirte Durchmesser durch den Durchschnitt ihrer zugeordneten Ebenen die Richtung der Seiten eines Complex-Cylinders, dessen Axe die beiden Durchmesser schneidet. Wir sagen, dass dieser Cylinder und insbesondere seine Axe dem Systeme der beiden Durchmesser zugeordnet sei.

278. Zur Bestätigung und Erweiterung dieser Resultate wollen wir zu den Gleichungen (5) zurückgehen, welche in dem allgemeinen Falle der Complexe den Durchmesser darstellen, der einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

zugeordnet ist. Diese Gleichungen reduciren sich, wenn wir die Gleichung der Complexe besonderer Art, (91), zu Grunde legen und x', y', z' in der früheren Bedeutung beibehalten, auf:

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= 0, \\ y - y' &= \frac{Eu}{Eu^2 + Fv^2}, \\ z - z' &= \frac{Fv}{Eu^2 + Fv^2}. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Danach ist:

$$(y - y') Fv = (z - z') Eu. \tag{93}$$

Der Durchmesser ist, in Gemässheit mit der ersten der drei Gleichungen (92), der Ebene YZ parallel. Die Gleichung (93), in folgender Weise geschrieben:

$$\frac{y - y'}{z - z'} \cdot \frac{v}{u} = \frac{E}{F} \tag{94}$$

drückt unmittelbar aus, dass der Durchschnitt der gegebenen Ebene YZ und der dieser Ebene zugeordnete Durchmesser des Complexes die Richtung zweier zugeordneter Durchmesser der characteristischen Curve haben, die, nach dem Verschwinden von K, durch die Gleichung:

$$Eu^2 + Fv^2 + kw^2 = 0$$

dargestellt wird.

Die Werthe für x', y', z', welche wir den Gleichungen (92) zu Grunde gelegt haben, sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{Ouv + Rv^2 + Stv - Ttu - Uu^2}{Eu^2 + Fv^2}, \\ y' &= \frac{-Ntv - Puv - Qv^2 + Tt^2 + Utu}{Eu^2 + Fv^2}, \\ z' &= \frac{(N - O)tu + Pu^2 + Quv - Rtv - St^2}{Eu^2 + Fv^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Der Abstand x' des Durchmessers von der Ebene YZ bleibt also für alle Ebenen derselbe, deren Coordinaten die folgende Gleichung befriedigen:

$$(Eu^2 + Fv^2)x' = Ouv + Rv^2 + Stv - Ttu - Uu^2. \tag{95}$$

Alle solche Ebenen umhüllen eine unendlich weit liegende Curve der zweiten Classe. Indem in der vorstehenden Gleichung das Glied mit t^2 fehlt, berührt diese Curve, unabhängig von der Annahme von x', die in YZ unendlich weit liegende gerade Linie. Für den Berührungspunct erhalten wir:

$$Sv - Tu = 0. \tag{96}$$

In dieser Gleichung kommt x' nicht mehr vor. Es ist durch dieselbe eine für den Complex ausgezeichnete Richtung bestimmt.

Wenn u und v gleichzeitig verschwinden, werden die Coordinaten des Punctes x', y', z', durch welchen die Lage des Durchmessers bestimmt wird, unendlich gross. Dabei verliert der Durchmesser, wie die Gleichungen (92) zeigen, in unendlicher Entfernung seine Richtung. Aber der Quotient $\frac{y'}{z'}$, behält einen endlichen und bestimmten Werth. Wir erhalten aus (4), indem wir u und v verschwinden lassen:

$$\frac{y'}{z'} = -\frac{T}{S}. \tag{97}$$

Der Durchmesser ist also in der durch die vorstehende Gleichung bezeichneten Richtung parallel zu YZ unendlich weit gerückt. Diese Richtung fällt mit derjenigen zusammen, welche wir durch die Gleichung (96) bestimmt haben. Wir können sagen, dass die unendlich vielen Durchmesser, welche im Complexe der Ebene der characteristischen Curve zugeordnet sind, diese Ebene in demselben unendlich weit liegenden Puncte schneiden. Dieser Punct ist der Mittelpunct der in der Ebene der characteristischen Curve von Linien des Complexes umhüllten Curve, und bleibt unverändert, wenn die Ebene parallel mit sich fortrückt. Wir werden in den folgenden Nummern die analytische Bestätigung für diese geometrische Folgerung erhalten.

279. Für die Durchschnitte der beiden, den Coordinateu-Ebenen XZ und XY zugeordneten, mit OY und OZ parallelen Durchmesser mit diesen beiden Coordinaten-Ebenen erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{U}{E}, & x &= \frac{P}{E}, \\ x &= \frac{R}{F}, & y &= -\frac{Q}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Setzen wir: $\quad P = 0, \qquad Q = 0,$

so verschieben wir die Ebenen XZ und XY so, dass, nach der Verschiebung, die beiden diesen Ebenen zugeordneten Durchmesser die Axe OX schneiden.

Von den Gleichungen-Paaren (18) der 240. Nummer, durch welche überhaupt die Axen der drei Complex-Cylinder, deren Seiten den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel sind, dargestellt werden, zeigt das erste:

$$y = -\frac{Q}{F}, \qquad z = \frac{P}{E}, \tag{99}$$

dass eine der drei Cylinder-Axen mit OX zusammenfällt. Die beiden anderen Gleichungen-Paare geben:

$$\left.\begin{array}{ll} x = \dfrac{R}{F}, & z = \infty, \\ x = -\dfrac{U}{E}, & y = \infty. \end{array}\right\} \tag{100}$$

Es sind also die beiden anderen Cylinder-Axen in denselben zu YZ parallelen Ebenen, in welchen die beiden zugeordneten Durchmesser liegen, unendlich weit gerückt.

Von den drei Coordinaten des Mittelpunctes des Centralparallelepipeds, dessen Kanten bezüglich OX, OY, OZ parallel sind, für welche wir in dem allgemeinen Falle erhalten haben:

$$x^0 = \frac{ER - FU}{2EF}, \quad y^0 = -\frac{DQ - FT}{2DF}, \quad z^0 = \frac{DP - ES}{2DE}, \tag{21}$$

bleibt nur x^0 endlich und vollkommen bestimmt, während y^0 und z^0 unendlich gross werden. Das Verhältniss zwischen y^0 und z^0 bleibt ein bestimmtes. Wir erhalten für dasselbe:

$$\frac{y^0}{z^0} = -\frac{T}{S}. \tag{101}$$

Durch diese Gleichung wird dieselbe für den Complex ausgezeichnete Richtung bestimmt, welche wir in der vorigen Nummer erhalten haben (97).

Der Mittelpunct des Centralparallelepipeds, welches wir ausgewählt haben, liegt in einer nicht nur der Richtung, sondern auch der Lage nach bestimmten Ebene in dem durch die Gleichung (101) bestimmten Sinne unendlich weit. Wenn wir die Axe OX als eine Seite des Centralparallelepipeds beibehalten und OY und OZ beliebig zweien conjugirten Durchmessern der characteristischen Curve parallel nehmen, so erhalten wir eine Reihe von Centralparallelepipeden. Dieselben Betrachtungen, welche wir in der 246. Nummer in dem Falle der hyperboloidischen und ellipsoidischen Complexe angestellt haben, zeigen hier, dass der Mittelpunct aller dieser

Centralparallelepipede in derselben Richtung und in derselben zu der Ebene der characteristischen Curve parallelen Ebene unendlich weit gerückt sind.

Wenn wir an Stelle der Axe OX eine andere Cylinder-Axe des Complexes wählen, so erhalten wir eine neue Reihe von Centralparallelepipeden. Der Mittelpunct aller dieser Parallelepipede ist in derselben Richtung, wie vorhin, parallel mit der Ebene der characteristischen Curve unendlich weit gerückt, indem die Bestimmung dieser Richtung von der Wahl der Coordinaten-Axe OX unabhängig war. Dagegen ist die Ebene, in welcher der Mittelpunct des Parallelepipeds unendlich weit gerückt ist, im Allgemeinen eine andere geworden. Denn wenn wir irgend zwei conjugirte Durchmesser des Complexes auswählen und den einen durch einen anderen, ihm parallelen, ersetzen, so ändert sich dabei die in der Mitte zwischen den beiden conjugirten Durchmessern hindurch gehende Central-Ebene.

Wir sind so zu den folgenden Sätzen gekommen:

In den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, ist der Mittelpunct parallel mit der Ebene der characteristischen Curve nach gegebener Richtung:

$$\frac{y}{z} = \frac{y_0}{z_0} = -\frac{T}{S}$$

unendlich weit gerückt.

Alle Central-Parallelepipeda, welche dieselbe im Endlichen liegende Cylinder-Axe zu einer ihrer Kanten haben, besitzen parallel zu der Ebene der characteristischen Curve dieselbe Central-Ebene.

280. Für die Gleichung des Complexes der besonderen Art erhalten wir, wenn wir die Axe irgend eines seiner Cylinder mit der Coordinaten-Axe OX zusammen fallen lassen und OY und OZ irgend zweien Durchmessern der characteristischen Curve parallel annehmen, die folgende:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{aligned} \tag{102}$$

Wir können noch die Bedingungs-Gleichung

$$ER = FU \tag{103}$$

hinzufügen, und bestimmen damit, dass die der Axe OX zugehörige Central-Ebene mit der Coordinaten-Ebene YZ zusammenfällt. Endlich können wir nach Belieben S oder T verschwinden lassen, indem wir eine der beiden Axen OY, OZ der durch die Gleichung (101) bestimmten Richtung parallel nehmen.

Unter Berücksichtigung dieser Vereinfachungen enthält die Gleichung (102) elf von einander unabhängige Constanten. Wenn wir zu denselben die sieben Constanten hinzuzählen, durch welche das Coordinaten-System particularisirt ist, so erhalten wir die achtzehn Constanten des Complexes der besonderen Art.

281. Der Asymptoten-Kegel der characteristischen Fläche eines Complexes der allgemeinen Art wird bei Complexen der besonderen Art, die wir hier betrachten, durch die beiden Asymptoten der characteristischen Curve vertreten.

In dem Falle der allgemeinen Complexe bestimmt die Curve, nach welcher eine gegebene Ebene den Asymptoten-Kegel schneidet, die Natur der Complex-Curve in derjenigen Ebene, welche parallel mit der gegebenen unendlich weit gerückt ist. In Complexen der besonderen Art löst sich diese Curve in die beiden Durchschnittspuncte der gegebenen Ebene mit den Asymptoten auf. Es artet also in der unendlich weit gerückten Ebene die Complex-Curve in ein System von zwei Punkten aus, die nach der Richtung der beiden Asymptoten unendlich weit liegen.

Alle Aequatorialflächen, deren Breiten-Ebenen einer der beiden Asymptoten parallel sind, sind parabolische. Wir erhalten auch dann eine parabolische Aequatorialfläche, wenn wir die Breiten-Ebenen derselben der Ebene der characteristischen Curve parallel nehmen. Die Gleichung dieser Fläche ist:

$$\begin{aligned} -2Svw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 + 2Tuw \\ -2(Ox + G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0, \end{aligned} \tag{104}$$

und demnach die Fläche dadurch particularisirt, dass die Axen der Parabeln in allen Breiten-Ebenen gleich gerichtet sind. Diese Richtung ist, in Uebereinstimmung mit der 278. Nummer, dieselbe, in welcher der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist.

Wenn wir dieselbe Aequatorialfläche, statt durch ihre Breiten-Curven, durch ihre umhüllenden Cylinder-Flächen bestimmen, so erhalten wir nach den Entwicklungen der 182. Nummer die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} (Fy'^2 + Ez'^2)x^2 - 2(Ry'^2 - Oy'z' - Uz'^2)x \\ + 2(Sy' + Tz')y' \cdot z + (By'^2 + 2Gy'z' + Cz'^2) = 0. \end{aligned} \tag{105}$$

Dieselbe stellt den Durchschnitt mit XZ desjenigen Complex-Cylinders dar, dessen Seiten der durch das Verhältniss $\frac{y'}{z'}$ bestimmten Richtung parallel sind.

In der vorstehenden Gleichung fehlt das Glied mit z^2. Alle Complex-Cylinder also, deren Seiten der Ebene der characteristischen Curve parallel sind, sind parabolische Cylinder. Die Diametral-Ebenen derselben sind mit der genannten Ebene parallel. Insbesondere lösen sich diejenigen beiden Cylinder, deren Seiten einer der beiden Asymptoten der characteristischen Curve parallel sind, in Systeme von zwei Ebenen auf, von denen die eine unendlich weit rückt. In Folge dessen reducirt sich die Gleichung des Cylinders auf den ersten Grad. Wenn wir endlich den Seiten des Cylinders diejenige Richtung geben, in welcher der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist, so kommt:

$$Sy' + Tz' = 0,$$

und der Cylinder zerfällt in zwei Ebenen, welche beide der Ebene der characteristischen Curve parallel sind.

282. Je nachdem die beiden Asymptoten der characteristischen Curve reell oder imaginär sind, wollen wir den Complex der besonderen Art einen hyperbolischen oder einen elliptischen nennen.

In beiden Arten von Complexen liegt in solchen Ebenen, welche der Ebene der characteristischen Curve parallel sind, eine Linie des Complexes unendlich weit. In elliptischen Complexen gibt es sonst keine Ebenen, welche unendlich weit liegende Linien des Complexes enthalten. In hyperbolischen Complexen lassen sich durch jede Linie des Raumes zwei reelle Ebenen legen, die bezüglich den beiden Asymptoten der characteristischen Curve parallel sind: die Complex-Curven in diesen Ebenen sind Parabeln. Mit Ausnahme derjenigen Complex-Cylinder, deren Seiten der Ebene der characteristischen Curve parallel verlaufen, sind sämmtliche einem hyperbolischen Complexe angehörige Cylinderflächen hyperbolische, die einem elliptischen Complexe angehörigen elliptische Cylinder.

Wir können sagen, dass sich die in der unendlich weit liegenden Ebene enthaltene Curve des Complexes in dem Falle der hyperbolischen Complexe in ein System von zwei reellen, in dem Falle der elliptischen Complexe in ein System von zwei imaginären Puncten aufgelöst hat.

283. Wenn wir, um die Gesammtheit der unendlich weit liegenden Linien des Complexes darzustellen, nur die Glieder zweiten Grades in ϱ, σ, η

betrachten, wie wir dies in dem allgemeinen Falle gethan haben (n. 267), so erhalten wir aus der Gleichung (102):

$$E\varrho^2 + F\eta^2 = 0. \tag{106}$$

Diese Gleichung stellt in Linien-Coordinaten die beiden Asymptoten der characteristischen Curve dar.

Mit grösserer Annäherung aber, als es vermittelst der characteristischen Curve geschehen kann, bestimmen wir die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes, wenn wir gegen zweite Potenzen von ϱ und η, nach wie vor, erste Potenzen derselben, sowie die Veränderlichen r, s und Constante vernachlässigen, während wir erste Potenzen von σ beibehalten. Auf diese Art*) erhalten wir die folgende Gleichung:

$$E\varrho^2 + F\eta^2 - 2(Ss + T)\sigma = 0. \tag{107}$$

Ein Glied mit N oder O tritt nicht hinzu. Es ist nämlich:

$$-Nr\sigma + Os\varrho = -N\eta + (O-N)s\varrho,$$

das heisst, es bleibt $r\sigma$ immer von der Ordnung der Glieder mit η und $s\varrho$ und kommt somit nicht in Betracht.

Die vorstehende Gleichung stellt einen neuen Complex dar, welchen wir den Asymptoten-Complex des gegebenen nennen wollen.

Wie in dem allgemeinen Falle, ist die Annäherung des Asymptoten-Complexes an den gegebenen vom ersten Grade, während dieselbe bei Nicht-Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung in σ nur von dem Grade $1/2$ sein würde.

Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten beliebig verschieben, behalten in der Gleichung (91), welche D, K, L, M nicht enthält, die beiden Constanten S und T unverändert dieselben Werthe. Wie wir also den gegebenen Complex und seinen Asymptoten-Complex parallel mit sich selbst gegen einander verschieben mögen, ihre gegenseitige Beziehung zu einander bleibt dieselbe.

Die Gleichung des Asymptoten-Complexes wird befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\varrho = 0, \quad \sigma = 0, \quad \eta = 0.$$

*) Analog hat ein Curvenzweig mit einer parabolischen Asymptote nur einen Punct, der, absolut genommen, unendlich weit liegt, derjenige, in welchem derselbe von den Durchmessern der parabolischen Asymptote geschnitten wird. Eine genauere Anschauung über die Lage der dem Unendlichen sich nähernden Puncte erhalten wir durch die parabolische Asymptote selbst, deren Puncte, wenn sie unendlich weit rücken, sowohl nach der Richtung der Axe als auch senkrecht dagegen unendlich weit sich entfernen: aber so, dass, wenn die Grösse der Entfernung nach der Axe von der ersten Ordnung ist, die Ordnung der Grösse der Entfernung von der Axe nur $1/2$ beträgt.

Alle durch den Coordinaten-Anfangspunct gehenden geraden Linien gehören dem Asymptoten-Complexe an. Der Complex umfasst ferner alle geraden Linien, welche den beiden Gleichungen:

$$E\varrho^2 + F\eta^2 = 0, \qquad \sigma = 0,$$

oder den folgenden beiden:

$$E\varrho^2 + F\eta^2 = 0, \qquad Ss + T = 0,$$

Genüge leisten.

Eine jede gerade Linie also, welche die Axe OX und die beiden in YZ liegenden Asymptoten der characteristischen Curve schneidet, ist eine Linie des Asymptoten-Complexes. Und ferner gehört demselben jede gerade Linie an, welche eine der beiden Asymptoten schneidet und der durch den Anfangspunct gehenden Ebene:

$$Sy + Tz = 0,$$

welche diejenige Richtung bezeichnet, in welcher der Mittelpunct des gegebenen Complexes in der Ebene der characteristischen Curve unendlich weit gerückt ist, parallel ist. In Folge dessen artet die Complex-Curve in der Ebene YZ in das System zweier Puncte aus, von denen der eine mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfällt und der andere in der durch die vorstehende Gleichung bezeichneten Richtung unendlich weit gerückt ist. Die Aequatorialfläche des Asymptoten-Complexes, deren Breiten-Ebenen zu YZ parallel sind, besteht, wie die des gegebenen Complexes, aus Parabeln. Alle diese Parabeln werden von den beiden Ebenen berührt, welche sich durch die Axe OX und die beiden Asymptoten der characteristischen Curve hindurch legen lassen. Wenn die Breiten-Ebene parallel mit YZ unendlich weit rückt, artet die Parabel in ihr in das System zweier unendlich weit liegender Puncte aus. Den Uebergang von einer Parabel in zwei unendlich weit liegende Puncte haben wir uns so zu denken, dass auf zwei festen Tangenten der Curve die Berührungspuncte unendlich weit gerückt sind.

284. Wenn die Ebene, in welcher der Mittelpunct unendlich weit gerückt ist, eine der beiden Asymptoten enthält oder unbestimmt wird, erhalten wir eine entsprechende Particularisation des gegebenen Complexes in Beziehung auf die Lage seiner Durchmesser und die Anordnung seiner unendlich weit liegenden Linien. Derartige Complexe hängen, im Allgemeinen, bezüglich von siebenzehn oder sechszehn Constanten ab.

Wir wollen hier nur den letzten Fall betrachten, in welchem in der allgemeinen Complex-Gleichung neben K, L, M und D auch S und T verschwinden.

Dann fällt aus der Gleichung des so particularisirten Complexes die Veränderliche σ ganz aus.

Die allgemeinste Gleichungsform, in welcher diese Veränderliche fehlt, ist:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ + E\varrho^2 + F\eta^2 + 2K\varrho\eta \\ + 2(O - N)s\varrho - 2N\eta \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta + 2U\varrho = 0. \end{aligned} \tag{108}$$

Dadurch, dass wir die Coordinaten-Axen OY und OZ zweien zugeordneten Durchmessern der characteristischen Curve parallel nehmen, verschwindet aus dieser Gleichung K. Indem wir die Axe OX, welche bisher willkürlich angenommen worden ist, mit der Axe eines Complex-Cylinders zusammenfallen lassen, verschwinden P und Q. Endlich erhalten wir durch Verschiebung der Ebene YZ parallel mit sich selbst die Relation:

$$ER = FU.$$

Die Gleichung:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2(O-N)s\varrho - 2N\eta \\ + 2Rs\eta + 2U\varrho = 0, \end{aligned} \tag{109}$$

wobei: $$ER = FU$$

ist also als die allgemeine Gleichung der in fraglicher Weise particularisirten Complexe anzusehen. Sie enthält zehn von einander unabhängige Constanten, zu welchen noch sechs Constanten der Lage hinzugerechnet werden müssen, die darauf kommen, dass einmal die Ebene YZ durch den Complex bestimmt ist, dass ferner die beiden Axen OY und OZ zugeordnete Richtungen mit Bezug auf die characteristische Curve haben, endlich, dass OX eine Cylinder-Axe des Complexes ist.

Der Bedingung also, dass sich ein Complex zweiten Grades durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen nur vier der fünf Variabeln:

$$r,\ s,\ \sigma,\ \varrho,\ (r\sigma - s\varrho = \eta)$$

darstellen lasse, entspricht eine dreifache Particularisation des Complexes.*)

*) Statt, wie im Text, σ ausfallen zu lassen, können wir auch η wählen, indem wir die Coordinaten-Ebene XY der Ebene der characteristischen Curve parallel nehmen. Dann schreibt sich die Gleichung des Complexes unmittelbar als die allgemeine des zweiten Grades zwischen den vier Veränderlichen r, s, σ, ϱ, die uns als Linien-Coordinaten entgegentreten, wenn wir die gerade Linie durch ihre Projection auf XZ und YZ bestimmen. Statt der früheren Constanten K, P, Q können wir hier M, T, U verschwinden lassen, und erhalten, durch passende Verschiebung der Coordinaten-Ebene XY, die Relation: $$DP = ES.$$

285. Es ist interessant, den so particularisirten Complex näher zu untersuchen.

Für den Abstand desjenigen Durchmessers des Complexes, welcher einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

zugeordnet ist, von der ihm parallelen Coordinaten-Ebene YZ finden wir nach den Formeln der 278. Nummer, indem wir S und T gleich Null setzen:

$$x = \frac{Rv^2 + Ouv - Uu^2}{Eu^2 + Fv^2}. \tag{110}$$

Wenn wir dann die gegebene Ebene um ihren Durchschnitt mit der Ebene der characteristischen Curve beliebig drehen, so bleibt der ihr zugeordnete Durchmesser immer in derselben, durch den vorstehenden Werth von x bestimmten Ebene, während in dem allgemeinen Falle der hyperbolischen und elliptischen Complexe bei der Drehung der gegebenen Ebene der ihr zugeordnete Durchmesser seinen Abstand von der YZ-Ebene ändert.

Danach geht das früher gewonnene Resultat in das folgende über.

Die irgend zweien zugeordneten Durchmessern der characteristischen Curve parallelen Durchmesser des Complexes liegen in zwei parallelen Ebenen, die von einer festen Ebene gleichen Abstand haben. Wir wollen diese Ebene die Central-Ebene des gegebenen Complexes nennen.

Die Coordinaten des Mittelpuncts des Complexes in der Central-Ebene sind nicht mehr unendlich gross; ihre Werthe erscheinen unter der Form $\frac{0}{0}$. Der Mittelpunct liegt nicht mehr unendlich weit. Jeder Punct der Central-Ebene kann als Mittelpunct des Complexes angesehen werden.

286. Bei den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, liegen, wie in dem allgemeinen Falle der hyperbolischen und elliptischen Complexe, in allen Ebenen, welche einer der beiden Asymptoten der characteristischen Curve parallel sind, Linien unendlich weit, und die Complex-Curven in ihnen sind Parabeln. In Ebenen aber, die der Central-Ebene und also beiden Asymptoten parallel sind, werden die Complex-Curven nach dem Verschwinden von S und T durch die Gleichung:

$$(Fx^2 - 2Rx + B)v^2 - 2(Ox + G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)v^2 = 0 \tag{111}$$

dargestellt. Sie hören auf, Parabeln zu sein, und sind in Systeme von zwei Puncten ausgeartet, die nach Richtungen, welche von einer Ebene zur anderen sich ändern, unendlich weit liegen.

Die Linien des Complexes in einer der Central-Ebene parallelen Ebene bestehen also aus allen Linien der Ebene, welche zwei gegebenen parallel sind. Diese Linien können reell oder imaginär sein, sie können endlich zusammenfallen. Wenn die Ebene sich immer weiter von der Central-Ebene entfernt, nähert sich die Richtung der beiden Linien-Systeme immer mehr der Richtung der beiden Asymptoten der characteristischen Curve.

Dem entsprechend arten die von Complex-Linien gebildeten Cylinder, deren Seiten der Central-Ebene parallel sind, in Systeme mit dieser Ebene paralleler Ebenen aus. Die Mittel-Ebenen zweier conjugirter Cylinder liegen auf beiden Seiten der Central-Ebene in gleichem Abstande von derselben.

Der Complex ist also, wenn wir zusammenfassen, in der Weise particularisirt, dass jeder Punct einer in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden ausgezeichneten geraden Linie der Mittelpunct eines Complex-Kegels ist, der sich in das System zweier Ebenen auflöst, die sich nach der fraglichen Linie schneiden; oder, was dasselbe sagt, dass jede Ebene, welche durch eine ausgezeichnete gerade Linie der unendlich weit entfernten Ebene sich legen lässt, eine Complex-Curve enthält, welche sich in das System zweier Puncte aufgelöst hat, die auf der fraglichen geraden Linie liegen.

287. Wir haben in dem Vorstehenden denjenigen Fall discutirt, dass sich der durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellte Complex in Folge davon, dass sich der Ausdruck:

$$D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma$$

in zwei lineare Factoren auflösen lässt, in Beziehung auf seine unendlich weit liegenden Linien particularisirt. Wir wollen jetzt die neue Particularisirung des Complexes betrachten, wo derselbe Ausdruck das Quadrat einer linearen Function wird, dem entsprechend, dass gleichzeitig:

$$K^2 - EF = 0, \quad L^2 - DF = 0, \quad M^2 - DE = 0. \tag{112}$$

Es kommt das darauf hinaus, dass bei gehöriger Bestimmung der Richtung der Coordinaten-Axen zwei der drei Constanten D, E, F zugleich mit K, L, M verschwinden. Sind E und F die beiden verschwindenden Constanten, so ist die Gleichung des Complexes die folgende:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ + D\sigma^2 \\ - 2Nrs + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{aligned} \tag{113}$$

288. Die Gleichungen (2) der 234. Nummer geben zur Bestimmung desjenigen Durchmessers des Complexes, der einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

zugeordnet ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{w}{t} + x' = -\frac{w}{t} + \frac{Ouv + Rv^2 + Stv - Ttu - Uu^2}{Dt^2}, \\ y &= y' = \frac{-Ntv - Puv - Qv^2 + Tt^2 + Utu}{Dt^2}, \\ z &= z' = \frac{(N-O)tu + Pu^2 + Quv - Rtv - St^2}{Dt^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Alle Durchmesser des Complexes sind zu der Axe OX parallel. Die Richtung der Axe OX ist sonach durch den Complex gegeben. Die sechszehn Constanten des Complexes, der durch die drei Bedingungen (112) particularisirt ist, finden sich in den vierzehn Constanten seiner Gleichung (113) und denjenigen zwei Constanten wieder, durch die wir die Richtung der genannten Axe bestimmt haben. Wir können also, unbeschadet der Allgemeinheit, für das Coordinaten-System, auf welches der Complex in der Gleichung (113) bezogen ist, ein rechtwinkliges nehmen.

Zur Bestimmung derjenigen drei Cylinder-Axen, welche den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ bezüglich parallel sind, erhalten wir aus den Gleichungen (18):

$$\left.\begin{aligned} y &= \infty, & z &= \infty, \\ x &= \infty, & z &= -\frac{S}{D}, \\ x &= \infty, & y &= \frac{T}{D}. \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

Alle Cylinder-Axen des Complexes sind unendlich weit gerückt.

Durch parallele Verschiebung der Axe OX können wir aus der obigen Gleichung (113) die beiden mit $s\sigma$ und σ behafteten Glieder fortschaffen. Wir wählen dann zum Coordinaten-Anfangspuncte den Mittelpunct der in der Ebene YZ liegenden Complex-Curve, der in dem Falle der Gleichung (113) durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt wird:

$$y = \frac{T}{D}, \quad z = -\frac{S}{D}.$$

Die Axe OX wird dadurch derjenige Durchmesser des Complexes, welcher von den beiden Axen der zu OY und OZ parallelen Cylinder, die nach OX unendlich weit gerückt sind, geschnitten wird. Von den Kanten des durch die Richtung der drei Coordinaten-Axen im Complexe bestimmten Centralparallelepipeds ist nur eine im Endlichen geblieben. Dem entsprechend werden die Coordinaten des Mittelpunctes des Complexes, wie wir sie durch die Gleichungen (21) bestimmt haben, sämmtlich unendlich gross. Der Quotient je zweier derselben erscheint unter der Form $\frac{0}{0}$. Der Mittelpunct des Centralparallelepipeds ist in unbestimmter Richtung unendlich weit gerückt.

289. Für eine beliebige Ebene, welche die Axe OX enthält und damit allen im Endlichen liegenden Durchmessern des Complexes parallel ist, erhalten die Coordinaten x', y', z' (114), indem t verschwindet, unendlich grosse Werthe. Aber ihr Verhältniss bleibt ein endliches. Es ist die Complex-Curve in einer beliebigen solchen Ebene eine Parabel und die Durchmesser-Richtung dieser Parabel wird durch das endliche Verhältniss bezeichnet. Wir finden für diese Richtung aus (114):

$$x' : y' : z' = (Ouv + Rv^2 - Uu^2) : -v(Pu + Qv) : u(Pu + Qv),$$

und hieraus, wenn wir

$$\frac{u}{v} = -\frac{z'}{y'}$$

setzen und die Accente fortlassen:

$$x(Pz - Qy) = Ry^2 - Oyz - Uz^2. \tag{116}$$

Diese Gleichung stellt eine Kegelfläche der zweiten Ordnung dar, deren Mittelpunct in den Coordinaten-Anfangspunct fällt und welche die Axe OX als eine Seite enthält. Diejenige zweite Seite, nach welcher die Kegelfläche von einer beliebigen durch die Axe OX gelegten Ebene geschnitten wird, gibt die Richtung an, in welcher in der angenommenen Ebene der Mittelpunct der Complex-Curve unendlich weit gerückt ist. Diese Richtung bleibt unverändert, wenn die angenommene Ebene parallel mit sich fortrückt. Denn die Coefficienten O, P, Q, R, U, welche in die vorstehende Gleichung eingehen, bleiben, nach den Transformationsformeln der 158. Nummer, bei einer Verschiebung des Coordinaten-Systems ungeändert, sobald, wie in dem besonderen Falle, den wir betrachten, die Constanten E, F, K, L, M verschwinden. Es sind also die Aequatorialflächen des Complexes, deren Breiten-Ebenen der Axe OX parallel sind, in der Art particularisirt, dass ihre Breiten-Curven, welche Parabeln sind, dieselbe Durchmesser-Richtung besitzen. Die gemeinsame Richtung der Durchmesser aller Parabeln wird durch die Gleichung (116) gegeben.

In dem Falle der elliptischen und hyperbolischen Complexe gab es eine Aequatorialfläche, welche in gleicher Weise particularisirt war: diejenige, deren Breiten-Ebenen der Ebene der characteristischen Curve parallel waren. Die allen Breiten-Curven dieser parabolischen Aequatorialfläche gemeinsame Axen-Richtung bezeichnete den in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden Mittelpunct des Complexes. Dem entsprechend erhalten wir für die Complexe besonderer Art, die wir betrachten, unendlich viele Richtungen, nach denen der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist, und diese unendlich vielen Richtungen werden durch die Gleichung (116) bezeichnet.

In den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, ist der Mittelpunct unbestimmt geworden. Der geometrische Ort für denselben ist eine in der unendlich weit entfernten Ebene liegende Curve der zweiten Ordnung.

290. Die Complex-Curven in allen mit OX parallelen Ebenen sind in dem Falle, den wir betrachten, Parabeln. In Uebereinstimmung hiermit sind nach den Gleichungen (115) alle Complex-Cylinder parabolische Cylinder, deren Diametral-Ebenen die Axe OX parallel ist. Alle Linien, welche in der unendlich entfernten Ebene liegen und die Axe OX schneiden, gehören dem Complexe an. Wir können sagen, dass sich die Curve, welche in der unendlich weit gerückten Ebene von Linien des Complexes umhüllt wird, in ein System zweier Puncte aufgelöst hat, die auf der Axe OX in unendlicher Entfernung zusammenfallen. Wir wollen einen derartigen Complex, der früheren Bezeichnung entsprechend, einen parabolischen Complex nennen.

Derjenige Cylinder, dessen Seiten der allen Durchmessern des Complexes gemeinsamen Richtung parallel ist, löst sich in ein System von zwei Ebenen auf, von denen eine unendlich weitrückt. Und wie in dem Falle der hyperbolischen und elliptischen Complexe derjenige Cylinder, dessen Seiten die Richtung bezeichneten, nach welcher der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt war, in das System zweier, zu der Ebene der characteristischen Curve paralleler Ebenen zerfiel, so wird sich in parabolischen Complexen ein jeder Cylinder, dessen Seiten eine beliebige derjenigen Richtungen besitzen, nach welchen der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist, in ein System zweier zu OX paralleler Ebenen auflösen. Die analytische Bestätigung dieser Behauptung finden wir aus der Gleichung (27) der 182. Nummer, welche diejenigen Cylinder, deren Seiten der Ebene YZ parallel sind, —

einer beliebig angenommenen Ebene, die in keinerlei ausgezeichneter Beziehung zu dem Complexe steht —, durch ihren Durchschnitt mit XZ bestimmt. Diese Gleichung ist die folgende:

$$Dy'^2 \cdot z^2 - 2(Ry'^2 - Oy'z' - Uz'^2)x + (By'^2 + 2Gy'z' + Cz'^2) = 0.$$

Der Annahme entsprechend, dass

$$Ry'^2 - Oy'z' - Uz'^2 = 0,$$

das heisst, dass die Seiten des Complex-Cylinders die Richtung einer derjenigen beiden geraden Linien haben, nach welchen die Kegelfläche (116) von der Ebene YZ geschnitten wird, zerfällt dieselbe in zwei lineare Factoren, in welchen x nicht mehr vorkommt, und stellt also zwei zu OX parallele Ebenen dar.

291. Wenn wir in der Complex-Gleichung (113) gegen zweite Potenzen von ϱ, σ, η erste Potenzen dieser Veränderlichen, so wie r, s und Constante vernachlässigen, so finden wir, um die unendlich weit liegenden Linien des Complexes darzustellen:

$$D\sigma^2 = 0. \qquad (117)$$

Alle Linien, welche die Coordinaten-Axe OX schneiden, gehören dem vorstehenden Complexe an. Die beiden Asymptoten der characteristischen Curve bei hyperbolischen und elliptischen Complexen fallen also bei parabolischen Complexen in eine gerade Linie zusammen.

Mit grösserer Annäherung aber, als dies durch die vorstehende Gleichung möglich ist, können wir die unendlich weit liegenden Linien des Complexes darstellen, wenn wir neben der zweiten Potenz von σ die ersten Potenzen von ϱ und η beibehalten. Die resultirende Gleichung:

$$D\sigma^2 - 2N\eta + 2(O - N)s\varrho + 2(Pr + U)\varrho + 2(Qr + Rs)\eta = 0 \quad (118)$$

stellt einen neuen Complex dar, welchen wir den Asymptoten-Complex des gegebenen nennen wollen. Wie wir auch den gegebenen Complex und seinen Asymptoten-Complex gegen einander verschieben mögen, ihre gegenseitige Beziehung zu einander bleibt dieselbe. Denn die Coefficienten D, N, O, P, Q, R, U behalten bei einer Verschiebung des Coordinaten-Systems parallel mit sich selbst nach den Regeln der 157. Nummer in dem Falle, den wir betrachten, dieselben Werthe.

Der Asymptoten-Complex, der durch die Gleichung (118) dargestellt wird, umfasst alle geraden Linien, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurch gehen. Für die Gleichung derjenigen Aequatorialfläche desselben, deren Breiten-Ebenen der Coordinaten-Ebene YZ parallel sind, erhalten wir aus der 165. Nummer, indem wir die Constanten B, C, E, F, G, K, L, M, S, T verschwinden lassen, nach Ablösung des Factors x, die folgende:

$$2DRy^2 - 2DOyz + 2DUz^2 + O^2x - 4RUx = 0. \qquad (119)$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade und stellt ein Paraboloid dar, welches in dem Coordinaten-Anfangspuncte die Ebene YZ berührt, und dessen Durchmesser mit OX parallel sind. Die Reduction der Gleichung 4. Grades der allgemeinen Aequatorialfläche auf den 2. Grad kommt hier, in Uebereinstimmung mit den Entwicklungen der 258. Nummer, dadurch zu Stande, dass sich von der Aequatorialfläche zwei Ebenen absondern, in denen von den Linien des Complexes zwei Puncte umhüllt werden, die in einen zusammenfallen. Es sind dies in dem vorliegenden Falle die Coordinaten-Ebene YZ und die unendlich weit liegende Ebene.

Wir erhalten für die Meridianfläche, welche OX zur Doppellinie hat, aus der 169. Nummer die folgende Gleichung in gemischten Coordinaten:

$$(R \operatorname{tang}^2 \varphi - O \operatorname{tang} \varphi - U)tw - (Q \operatorname{tang} \varphi - P)vw = 0. \qquad (120)$$

Es löst sich also die Curve in einer beliebigen Meridian-Ebene in das System zweier Puncte auf, von denen der eine mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfällt und der andere in der durch die Gleichung:

$$(R \operatorname{tang}^2 \varphi - O \operatorname{tang} \varphi - U)t - (Q \operatorname{tang} \varphi - P)v = 0 \qquad (121)$$

bezeichneten Richtung unendlich weit gerückt ist. Derjenige Cylinder des gegebenen Complexes, dessen Seiten diese Richtung besitzen, löst sich in das System zweier zu der durch den Werth von $\operatorname{tang} \varphi$ bestimmten Ebene parallelen Ebenen auf.

292. Wir erhalten eine letzte Particularisation des Complexes, wenn die sechs Constanten der Gruppe

$$D, \; E, \; F, \; K, \; L, \; M$$

zugleich verschwinden. Dann enthält die allgemeine Gleichung des Complexes nur noch dreizehn von einander unabhängige Constanten.

Um diejenigen Linien darzustellen, welche in dem so particularisirten Complexe der (absolut) unendlich weit entfernten Ebene angehören, erhalten wir die Identität:

$$0 = 0.$$

In den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, gehört jede in der unendlich weit entfernten Ebene liegende gerade Linie dem Complexe an. Die Complex-Curve in einer beliebigen Ebene ist eine Parabel. Sämmtliche Complex-Cylinder zerfallen in Systeme von zwei Ebenen, und reduciren sich, indem die eine derselben unendlich weit rückt, auf den ersten Grad. Von Centralparallelepipeden des Complexes kann keine Rede mehr sein. Der Complex hat seinen Mittelpunct verloren.

Als Asymptoten-Complex des gegebenen bezeichnen wir denjenigen, dessen Gleichung sich aus der des gegebenen Complexes ableitet, indem wir die Veränderlichen r, s und Constante gegen die ersten Potenzen von ϱ, σ, η vernachlässigen. Wir erhalten so:

$$\begin{gathered} -2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ +2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \qquad (122) \end{gathered}$$

Die Beziehung des Asymptoten-Complexes zu dem gegebenen ändert sich, zu Folge der Form dieser Gleichung, nicht, wenn wir denselben parallel mit sich selbst um ein endliches Stück verschieben.

Wir mögen zunächst bemerken, dass der Asymptoten-Complex, in dessen Gleichung sowohl die Constanten:

$$A,\ B,\ C,\ G,\ H,\ I$$

als die Constanten:

$$D,\ E,\ F,\ K,\ L,\ M$$

fehlen, in analoger Weise in Bezug auf den Anfangspunct particularisirt ist als in Bezug auf die unendlich weit entfernte Ebene. Alle Linien, welche unendlich weit liegen, sowie alle Linien, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurch gehen, gehören dem Asymptoten-Complexe an.

Wie in dem Falle des gegebenen Complexes arten alle von Linien des Asymptoten-Complexes gebildete Cylinderflächen in das System zweier Ebenen aus, von denen eine unendlich weit gerückt ist. Aber hier tritt die neue Particularisation hinzu, dass jedesmal die andere Ebene durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurchgeht. Während in einer beliebigen Ebene des Raumes eine Parabel von Linien des Complexes umhüllt wird, zerfällt die Complex-Curve in jeder Ebene, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurchgeht, in das System zweier Puncte, von denen der eine mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfällt, während der andere unendlich weit gerückt ist. Eine jede Aequatorialfläche des Complexes artet in Folge dessen in einen Kegel der zweiten Ordnung aus, dessen Mittelpunct in den Coordinaten-Anfangspunct fällt und der von den zugehörigen Breiten-Ebenen in Parabeln geschnitten wird. Insbesondere berührt diejenige Breiten-Ebene, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct geht, die Kegelfläche nach einer Seite, welche diejenige Richtung bezeichnet, in der einer der Puncte, in welche sich die Complex-Curve in der fraglichen Ebene aufgelöst hat, unendlich weit gerückt ist.

293. Wir haben in dem Vorstehenden die Lage der unendlich weit entfernten geraden Linien und die entsprechenden Durchmesser-Verhältnisse bei Complexen des zweiten Grades discutirt und insbesondere durch einfachere Complexe des zweiten Grades, welche wir als die Asymptoten-Complexe der gegebenen bezeichneten, veranschaulicht. Wir sind dabei, wenn wir zusammenfassen, zu einer sechsfachen Unterscheidung der Complexe zweiten Grades gelangt.

In hyperboloidischen Complexen umhüllen die unendlich weit liegenden Linien des Complexes eine reelle, in ellipsoidischen Complexen eine imaginäre Curve der zweiten Classe. Diese Curve löst sich in dem Falle der hyperbolischen Complexe in ein System von zwei reellen, in dem Falle der elliptischen Complexe in ein System von zwei imaginären Puncten auf. Fallen diese beiden Puncte zusammen, so ist der Complex ein parabolischer. Endlich kann der Fall eintreten, dass alle der unendlich weit liegenden Ebene angehörigen geraden Linien Linien des Complexes sind.

§ 4.

Tangential- und Polar-Complexe des ersten Grades.

294. Die im Vorstehenden gewonnenen Resultate lassen sich ohne Weiteres verallgemeinern, indem wir alle Betrachtungen, die wir vorhin für die unendlich weit liegende Ebene angestellt haben, auf eine beliebige Ebene und, nach den Regeln des Princips der Reciprocität, auf einen beliebigen Punct übertragen. Wir lassen indess vorab eine Reihe anderer Ueberlegungen folgen, die bestimmt sind, die Sätze der vorhergehenden Paragraphen zu erweitern und unter einen allgemeinen Gesichtspunct zu bringen.

Es sei Ω_n eine homogene Function des n. Grades von beliebig vielen Variabeln $p, q, r, \cdots$. In Gemässheit des bekannten Theorems über homogene Functionen erhalten wir alsdann:

$$\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\cdot p+\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\cdot q+\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot r+\cdots\cdots=n.\ \Omega_n. \tag{123}$$

Wir können hiernach die Gleichung:

$$\Omega_n=0 \tag{124}$$

auch in folgender Weise schreiben: