## § 2.

### Particularisirung der Complexe, die einen Mittelpunct haben. Complexe, deren Linien eine Fläche zweiten Grades umhüllen.

250. Die zwanzig Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung (I):

$$\begin{gathered}
Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\
+ 2Gs + 2Hr + 2Jrs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\
- 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\
+ 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0,
\end{gathered}$$

welche, wenn wir durch eine beliebige derselben die übrigen dividiren, die neunzehn Constanten geben, welche zur Bestimmung des Complexes und seiner Lage nothwendig sind, ordnen sich zu den folgenden sechs Gruppen zusammen:

$$\begin{gathered}
A,\ B,\ C \quad \text{und} \quad G,\ H,\ J, \\
D,\ E,\ F \quad \text{-} \quad K,\ L,\ M, \\
N,\ O, \\
P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U.
\end{gathered}$$

Die sechs Constanten der letzten Gruppe ordnen sich ihrerseits wieder in verschiedener Weise zusammen, zweimal zu drei Paaren:

$$\begin{array}{lll}
P \text{ und } Q, & R \text{ und } S, & T \text{ und } U, \\
P \quad \text{-} \quad U, & R \quad \text{-} \quad Q, & T \quad \text{-} \quad S,
\end{array}$$

und einmal zu zwei Gruppen von drei:

$$P,\ R,\ T \quad \text{und} \quad Q,\ S,\ U.$$

251. Wir haben im ersten Paragraphen nachgewiesen, dass, wenn die drei Constanten $K$, $L$, $M$ verschwinden, die drei Coordinaten-Axen dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Dann können wir durch schickliche Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten überdiess noch drei neue Constanten aus der Gleichung des Complexes ausfallen lassen. Wenn $x_0$, $y_0$, $z_0$ die Coordinaten des neuen Anfangspunctes sind, so erhalten die sechs Constanten der letzten Gruppe die folgenden neuen Werthe, die wir durch $P_0$, $Q_0$, $R_0$, $S_0$, $T_0$, $U_0$ unterscheiden wollen (Nr. 157):

$$\begin{array}{ll}
P_0 = P + Ez_0, & Q_0 = Q - Fy_0, \\
R_0 = R + Fx_0, & S_0 = S - Dz_0, \\
T_0 = T + Dy_0, & U_0 = U - Ex_0.
\end{array} \qquad (41)$$

Wenn wir eine der acht Ecken des bezüglichen Central-Parallelepipeds zum Anfangspuncte nehmen, verschwinden drei der neuen Constanten. Je nach-dem (Fig. 12) diese Ecke eine derjenigen sechs ist, in welcher sich ein Durchmesser und eine Cylinderaxe schneiden, oder eine der beiden noch übrigen Ecken, durch welche weder einer der drei conjugirten Durchmesser, noch eine der drei, denselben parallelen, conjugirten Cylinderaxen gehen, verschwinden bezüglich:

$$S_0,\ T_0,\ U_0, \qquad R_0,\ S_0,\ T_0, \qquad Q_0,\ R_0,\ S_0,$$
$$P_0,\ Q_0,\ R_0, \qquad U_0,\ P_0,\ Q_0, \qquad T_0,\ U_0,\ P_0,$$

und

$$S_0,\ Q_0,\ U_0, \qquad P_0,\ R_0,\ T_0.$$

Die sechs neuen Constanten können nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn zwischen den ursprünglichen die folgenden drei Relationen bestehen:

$$\frac{R}{F}+\frac{U}{E}=0, \qquad \frac{T}{D}+\frac{Q}{F}=0, \qquad \frac{P}{E}+\frac{S}{D}=0. \tag{42}$$

Die Folge des Verschwindens der neuen Constanten ist, dass die drei neuen Coordinaten-Axen mit drei zugeordneten Durchmessern des Complexes zusammenfallen. Der neue Anfangspunct ist der Mittelpunct des Complexes. Die Complex-Curven in den drei Coordinaten-Ebenen haben denselben auch zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte, und zugleich sind die drei Coordinaten-Axen die Axen dreier Complex-Cylinder. Weil das Coordinaten-System noch von drei willkürlichen Constanten abhängt, so gibt es, im Allgemeinen, in jedem Complexe ein System dreier zugeordneter Durchmesser, welche sich im Mittelpuncte desselben schneiden. Wenn wir den Complex auf die drei sich schneidenden Durchmesser als Coordinaten-Axen beziehen, wird seine Gleichung:

$$\begin{aligned} Ar^2+Bs^2+C+D\sigma^2+E\varrho^2+F\eta^2 \\ +2Gs+2Hr+2Jrs \\ -2Nr\sigma+2Os\varrho=0. \end{aligned} \tag{43}$$

Diese Gleichung enthält zehn von einander unabhängige Constante, indem das Coordinaten-System durch neun Bedingungen particularisirt ist.

Die Coordinaten des Mittelpunctes der Complex-Curve in einer beliebigen durch den Mittelpunct des Complexes gehenden Ebene:

$$t'x+u'y+v'z=0$$

sind in Gemässheit der Gleichungen (2):

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{Ou'v'}{Dt'^2+Eu'^2+Fv'^2}, \\ y&=\frac{-Nt'v'}{Dt'^2+Eu'^2+Fv'^2}, \\ z&=\frac{(N-O)t'u'}{Dt'^2+Eu'^2+Fv'^2}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Da die Werthe der drei Coordinaten $x$, $y$, $z$ nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn gleichzeitig zwei der drei Coordinaten der Ebene $t'$, $u'$, $v'$ verschwinden, so gibt es, ausser den drei zugeordneten Durchmessern, die zu Coordinaten-Axen genommen worden sind, im Allgemeinen sonst keinen Durchmesser des Complexes, der durch den Mittelpunct desselben geht.

Die drei vorstehenden Gleichungen geben, wenn wir zwischen denselben $t'$, $u'$, $v'$ eliminiren:

$$DO^2y^2z^2 + EN^2x^2z^2 + F(N-O)^2x^2y^2 - NO(N-O)xyz = 0. \qquad (45)$$

Diese Gleichung stellt den geometrischen Ort für den Mittelpunct der Complex-Curve in einer Ebene dar, welche durch den Durchschnitt der drei zugeordneten Durchmesser geht und um diesen Punct beliebig gedreht wird.*)

252. Eine Particularisirung des Complexes tritt ein, wenn wir neben den sechs Constanten der letzten Gruppe eine der drei Constanten:

$$N, \qquad O, \qquad N-O$$

verschwinden lassen. Ist $O$ die verschwindende Constante, so geben die drei Gleichungen (44):

$$x = 0, \qquad u'y + v'z = 0.$$

Dann liegt also in jeder durch den Anfangspunct gehenden Ebene:

$$t'x + u'y + v'z = 0,$$

der Mittelpunct der Complex-Curve auf derjenigen geraden Linie, in welcher die Coordinaten-Ebene $YZ$ von dieser Ebene geschnitten wird, und rückt auf dieser Linie fort, wenn die Ebene um diese Linie sich dreht. Wenn diese Ebene insbesondere durch die Coordinaten-Axe $OX$ geht, verschwindet $t'$, und in Folge davon werden $y$ und $z$ gleichzeitig mit $x$ gleich Null: der Mittelpunct der Curve fällt also mit dem Anfangspuncte zusammen, oder, mit andern Worten, alle der Coordinaten-Axe $OX$ zugeordneten Durchmesser gehen durch den Anfangspunct, und liegen in der Ebene $YZ$. Jede Linie dieser Ebene, welche durch den Anfangspunct geht, ist ein Durchmesser des Complexes, so wie sie die Axe eines Complex-Cylinders ist.

Wenn neben den sechs Constanten der letzten Gruppe gleichzeitig die beiden Constanten $N$ und $O$ der vorhergehenden Gruppe verschwinden, so ver-

*) Die durch die Gleichung (45) dargestellte Fläche ist eine Complexfläche, die sich in der Art particularisirt hat, dass sie drei, sich in einem Puncte schneidende Doppellinien besitzt: die drei Coordinaten-Axen $OX$, $OY$, $OZ$. Dem entsprechend kann dieselbe auf dreifache Weise durch Drehung eines veränderlichen Kegelschnitts um eine feste Axe erzeugt werden.

schwinden die Werthe von $x$, $y$, $z$ in den Gleichungen (44). Dann gehen alle Durchmesser des Complexes durch den Mittelpunct desselben. Sie sind zugleich die Axen der Complex-Cylinder. Jede Complex-Curve, deren Ebene durch den Mittelpunct des Complexes geht, hat diesen Punct auch zu ihrem Mittelpuncte.

Die allgemeine Gleichung (I) wird in diesem Falle:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Sie stellt einen Complex dar, der dadurch, dass sämmtliche Durchmesser desselben in seinem Mittelpuncte sich schneiden, fünf seiner Constanten verloren hat und nur noch, ausser von den sechs Constanten der Lage, von acht Constanten abhängt, die in seiner Gleichung sich wiederfinden. Er ist auf irgend drei zugeordnete Durchmesser als Coordinaten-Axen bezogen, für welche wir, unbeschadet der Allgemeinheit, auch die drei Axen desselben nehmen können.

253. Wenn alle Durchmesser des Complexes in dem Mittelpuncte desselben sich schneiden und irgend drei dieser Durchmesser, welche einander zugeordnet sind, zu Coordinaten-Axen genommen werden, gehen die Gleichungen (3), (30), (12), (21) des vorigen Abschnitts in die folgenden über:

$$Dw^2 + (Fx^2 + B)v^2 - 2Guv + (Ex^2 + C)u^2 = 0, \tag{46}$$

$$\left(E\frac{u^2}{v^2} + F\right)x^2 + Dz^2 + \left(C\frac{u^2}{v^2} - 2G\frac{u}{v} + B\right) = 0, \tag{47}$$

$$\left(F\frac{y^2}{z^2} + E\right)w^2 + \left(B\frac{y^2}{z^2} + 2G\frac{y}{z} + C\right)t^2 - 2\left(J\frac{y}{z} + H\right)tv + Av^2 = 0, \tag{48}$$

$$\left(B\frac{t^2}{w^2} + F\right)y^2 + \left(C\frac{t^2}{w^2} + E\right)z^2 + 2J\frac{t}{w}y + 2H\frac{t}{w}z + A = 0. \tag{49}$$

Durch die beiden ersten der vorstehenden Gleichungen, (46) und (47), wird in gemischten Coordinaten diejenige Aequatorialfläche dargestellt, welche $OX$ zu ihrem Durchmesser hat, einmal vermittelst ihrer Breiten-Curven, deren jedesmalige Ebene durch $x$ bestimmt ist, das andere Mal vermittelst ihrer umhüllenden Complex-Cylinder, deren Axen mit $XZ$ Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten gleich $\left(-\frac{u}{v}\right)$ sind. Aus der Gleichung (47) folgt, dass die Axen sämmtlicher umhüllender Complex-Cylinder in $YZ$ liegen und die Coordinaten-Axe $OX$ im Anfangspuncte schneiden.

Die beiden letzten der vorstehenden Gleichungen, (48) und (49), stellen in gemischten Coordinaten diejenige Meridianfläche dar, welche die Coordinaten-

Axe $OX$ zur Doppellinie hat, einmal vermittelst ihrer Meridian-Curven, deren jedesmalige Ebene durch $\frac{y}{z}$, die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den sie mit $XZ$ bildet, bestimmt ist; das andere Mal vermittelst ihrer umhüllenden Complex-Kegel, deren jedesmaliger Mittelpunct auf $OX$ liegt, in einem Abstande $\left(-\frac{w}{t}\right)$ vom Anfangspuncte der Coordinaten. Wie die Gleichung (48) zeigt, haben alle Meridian-Curven einen Mittelpunct, der mit dem Mittelpuncte des Complexes zusammenfällt und als ein Mittelpunct der Fläche selbst zu betrachten ist.

254. Wenn zugleich mit den früheren elf Constanten auch noch die Constante $G$ der Gruppe

$$G, \; H, \; I$$

verschwindet, so zeigt die Gleichung (46), dass alle Breiten-Curven der bezüglichen Aequatorialfläche, deren Durchmesser $OX$ ist, zwei zugeordnete Durchmesser haben, die zweien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Durch das Verschwinden von $H$ und $I$ particularisiren sich die Aequatorialflächen, deren Durchmesser $OY$ und $OZ$ sind, in gleicher Weise, wie sich durch das Verschwinden von $G$ die Aequatorialfläche particularisirt, deren Durchmesser $OX$ ist.

Wenn $H$ und $I$ gleichzeitig verschwinden, schneiden alle Complex-Kegel, deren Mittelpunkte auf der Doppellinie der Fläche liegen, die ihr conjugirte Diametral-Ebene in Curven, deren Mittelpuncte mit dem Mittelpuncte des Complexes zusammenfallen (49).

Wenn die drei Constanten $G, H, I$ gleichzeitig verschwinden, so sind solche drei zugeordnete Durchmesser des Complexes zu Coordinaten-Axen gewählt worden, dass alle Kegel des Complexes, deren Mittelpuncte auf einem dieser drei zugeordneten Durchmesser liegen, die Ebene der jedesmaligen beiden anderen in Curven zweiter Ordnung schneiden, deren Mittelpuncte sämmtlich mit dem Mittelpuncte des Complexes zusammenfallen.

255. Die sechs Constanten

$$G, \; H, \; I, \; K, \; L, \; M$$

verschwinden gleichzeitig, wenn zu Coordinaten-Axen solche drei Durchmesser des Complex-Kegels, dessen Mittelpunkt in den Anfangspunct fällt, genommen werden, welche dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Dieser Bedingung kann, für einen gegebenen Complex, im Allgemeinen in einziger Weise entsprochen werden. Denn je zwei concentrische Flächen zweiter Ordnung, insbesondere zwei Kegel mit demselben Mittelpuncte, haben ein einziges System dreier zugeordneter Durchmesser gemein*). Für die beiden Kegel nehmen wir den Kegel des Complexes:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gyz + 2Hxz + 2Ixy = 0, \tag{50}$$

dessen Mittelpunct in den Anfangspunct fällt, und den Asymptotenkegel der Characteristik, dessen Mittelpunct wir ebenfalls in den Anfangspunct legen (11):

$$(K^2 - EF)x^2 + (L^2 - DF)y^2 + (M^2 - DE)z^2$$
$$+ 2(DK - LM)yz + 2(EL - KM)xz + 2(FM - KL)xy = 0. \tag{51}$$

Das System der beiden gemeinschaftlichen drei conjugirten Durchmesser ist das zu bestimmende Coordinaten-System.

256. In dem Falle, dass alle Durchmesser des Complexes in dem Mittelpuncte desselben sich schneiden, und wir diejenigen drei Durchmesser desselben, welche sowohl in Beziehung auf den Complex als auch in Beziehung auf den Complex-Kegel, der den Mittelpunct des Complexes zu seinem Mittelpuncte hat, einander zugeordnet sind, zu Coordinaten-Axen nehmen, wird die Gleichung des Complexes:

$$Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 = 0. \tag{52}$$

Diese Gleichung enthält fünf von einander unabhängige Constanten, die mit den neun Constanten der Lage die vierzehn Constanten geben, von denen der Complex nur noch abhängt.

257. Nach dem Verschwinden von $G$, $H$, $I$ gehen die Gleichungen der Aequatorialfläche in gemischten Coordinaten, (46) und (47), in die folgenden über:

$$w^2 + \frac{Fx^2 + B}{D} \cdot v^2 + \frac{Ex^2 + C}{D} \cdot u^2 = 0, \tag{53}$$

$$\frac{E\dfrac{u^2}{v^2} + F}{C\dfrac{u^2}{v^2} + B} \cdot x^2 + \frac{D}{C\dfrac{u^2}{v^2} + B} \cdot z^2 + 1 = 0, \tag{54}$$

und lassen sich unmittelbar in die folgenden verwandeln, welche dieselbe Aequatorialfläche bezüglich in Punct- und Plan-Coordinaten darstellen:

$$\frac{Dz^2}{Fx^2 + B} + \frac{Dy^2}{Ex^2 + C} + 1 = 0, \tag{55}$$

$$\frac{C\dfrac{u^2}{v^2} + B}{E\dfrac{u^2}{v^2} + F} \cdot t^2 + \frac{C}{D}\, u^2 + \frac{B}{D}\, v^2 + w^2 = 0. \tag{56}$$

*) Siehe Geometrie des Raumes. Nr. 262.

Die Meridianfläche, deren Doppellinie $OX$ ist, wird in dem fraglichen Falle durch die folgenden Gleichungen in gemischten Coordinaten dargestellt:

$$w^2 + \frac{B\frac{y^2}{z^2} + C}{F\frac{y^2}{z^2} + E} \cdot t^2 + \frac{A}{F\frac{y^2}{z^2} + E} \cdot v^2 = 0, \tag{57}$$

$$\frac{B\frac{t^2}{w^2} + F}{A} \cdot y^2 + \frac{C\frac{t^2}{w^2} + E}{A} \cdot z^2 + 1 = 0. \tag{58}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir unmittelbar die Gleichungen derselben Meridianfläche bezüglich in Punct- und Plan-Coordinaten:

$$\frac{F\frac{y^2}{z^2} + E}{B\frac{y^2}{z^2} + C} \cdot x^2 + \frac{F}{A} \cdot y^2 + \frac{E}{A} \cdot z^2 + 1 = 0, \tag{59}$$

$$\frac{A}{B\frac{t^2}{w^2} + F} \cdot u^2 + \frac{A}{C\frac{t^2}{w^2} + E} \cdot v^2 + w^2 = 0. \tag{60}$$

Die Aequatorialfläche, die $OX$ zum Durchmesser, und die Meridianfläche, die $OX$ zur Doppellinie hat, bleiben auch nach der Particularisation von der vierten Ordnung und der vierten Classe.

258. Wenn die neue Bedingungs-Gleichung:

$$BE = CF \tag{61}$$

besteht, wonach:

$$\frac{Fx^2 + B}{Ex^2 + C} = \frac{F}{E} = \frac{B}{C},$$

werden alle Breiten-Curven der Aequatorialfläche (55) ähnliche und ähnlich-liegende Curven des zweiten Grades. Die Gleichung derselben:

$$D(Fx^2 + B)y^2 + D(Ex^2 + C)z^2 + (Fx^2 + B)(Ex^2 + C) = 0$$

verwandelt sich, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor

$$DE(Fx^2 + B) = DF(Ex^2 + C)$$

vernachlässigen, in die folgende:

$$\frac{x^2}{D} + \frac{y^2}{E} + \frac{z^2}{F} + \frac{C}{DE} = 0. \tag{62}$$

Die Aequatorialfläche reducirt sich also, indem wir von den beiden Ebenen:

$$E(Fx^2 + B) = F(Ex^2 + C) = 0, \tag{63}$$

die sich auf der unendlich weit liegenden Doppellinie der Fläche schneiden und die Fläche auf der Axe $OX$ berühren, absehen, auf eine Fläche des zweiten Grades und verliert ihren, in $YZ$ unendlich weit liegenden Doppelstrahl.

Die beiden Ebenen, welche durch die Gleichung (63) dargestellt werden, sind solche zwei Ebenen, in denen sich die von Linien des Complexes umhüllte Curve der zweiten Classe in zwei Puncte aufgelöst hat, die in einen zusammenfallen.

In ähnlicher Weise verwandelt sich die Gleichung (56), wenn wir dieselbe mit $\frac{DE}{C}$ multipliciren und berücksichtigen, dass in Folge der Bedingungs-Gleichung (61):

$$\frac{C\frac{u^2}{v^2}+B}{E\frac{u^2}{v^2}+F}=\frac{C}{E}=\frac{B}{F},$$

in die folgende:

$$Dt^2+Eu^2+Fv^2+\frac{DE}{C}\cdot w^2=0, \tag{64}$$

die Gleichung derselben Fläche des zweiten Grades in Ebenen-Coordinaten, welche wir eben (62) durch ihre Gleichung in Punct-Coordinaten dargestellt haben.

Wir vernachlässigen hierbei zwei Puncte:

$$Eu^2+Fv^2=0, \tag{65}$$

welche auf der unendlich weit liegenden Doppelaxe liegen, die dadurch ebenfalls verschwindet. Diese beiden Puncte sind solche zwei, für welche sich der von Complexlinien gebildete Kegel der zweiten Ordnung in zwei Ebenen aufgelöst hat, die in eine zusammenfallen.

Die Gleichung der Meridianfläche in Punct-Coordinaten (59) reducirt sich, wenn wir mit $\frac{A}{EF}$ multipliciren, in Folge der Bedingungs-Gleichung (61), auf:

$$\frac{A}{CF}x^2+\frac{y^2}{E}+\frac{z^2}{F}+\frac{A}{EF}=0. \tag{66}$$

Die Gleichung derselben Fläche in Plan-Coordinaten (60) geht, wenn wir mit

$$\frac{F}{A}(Ct^2+Ew^2)=\frac{E}{A}(Bt^2+Fw^2)$$

multipliciren, in die folgende über:

$$\frac{CF}{A}t^2+Eu^2+Fv^2+\frac{EF}{A}w^2=0. \tag{67}$$

Die Meridianfläche reducirt sich, in Folge der Bedingungs-Gleichung (61), auf den zweiten Grad und verliert ihre Doppellinie. Wenn wir sie als den geometrischen Ort von Puncten betrachten und demgemäss, nach der Reduction, durch die Gleichung (66) darstellen, liegt der Grund dieser Reduction darin, dass wir von den beiden Ebenen:

$$B(Fy^2 + Ez^2) = F(By^2 + Cz^2) = 0, \tag{68}$$

die dem vernachlässigten Factor entsprechen, absehen. Diese beiden Ebenen schneiden sich auf $OX$ und sind diejenigen beiden Tangential-Ebenen der Fläche, welche sich durch $OX$ an dieselbe legen lassen. Die Complex-Curve in jeder derselben hat sich in ein System zweier Puncte aufgelöst, die in einen zusammenfallen. Wenn wir die Meridianfläche als von Ebenen umhüllt betrachten und nach der Reduction durch die Gleichung (67) darstellen, ist diese Reduction Folge davon, dass wir von den beiden Puncten:

$$E(Bt^2 + Fw^2) = F(Ct^2 + Ew^2) = 0 \tag{69}$$

absehen, welchen der vernachlässigte Factor entspricht. Diese beiden Puncte sind diejenigen beiden, in welchen die Fläche von der Axe $OX$ geschnitten wird. Der Complex-Kegel, welcher einen beliebigen dieser beiden Puncte zum Mittelpuncte hat, artet in ein System zweier Ebenen aus, die in eine zusammenfallen.

259. Indem wir eine Fläche des zweiten Grades als Aequatorialfläche betrachten, ist zugleich ein Durchmesser derselben bestimmt, der einer gegebenen Ebenen-Richtung zugeordnet ist; indem wir sie als Meridianfläche betrachten, ist unmittelbar ein Durchmesser derselben, der früheren Doppellinie entsprechend, gegeben.

260. In Folge der Bedingungs-Gleichung (61):

$$BE = CF$$

gehen die Aequatorial- und die Meridian-Fläche, welche $OX$ bezüglich zum Durchmesser und zur Doppellinie haben, beide in Flächen zweiten Grades über. Wenn die doppelte Bedingungs-Gleichung:

$$AD = BE = CF \tag{70}$$

befriedigt wird, werden diese beiden Flächen identisch dieselben. Für ihre gemeinschaftliche Gleichung in Punct-Coordinaten können wir die folgende nehmen:

$$\frac{x^2}{D} + \frac{y^2}{E} + \frac{z^2}{F} + \frac{A}{EF} = 0 \tag{71}$$

und $\frac{A}{EF}$ auch mit $\frac{B}{DF}$ und $\frac{C}{DE}$ vertauschen.

Die doppelte Bedingungs-Gleichung (70) sagt in Verbindung damit, dass $G, H, I, K, L, M$ verschwinden, aus, dass der Complex-Kegel und der Asymptoten-Kegel der Charakteristik, welche den Mittelpunct des Complexes zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, identisch werden. Allgemeiner, wenn die obigen sechs Constanten nicht verschwinden, erhalten wir aus den beiden Gleichungen (50) und (51), um diese Identität auszudrücken, die folgende fünffache Bedingungs-Gleichung:

$$K^2 - EF : L^2 - DF : M^2 - DE : DK - LM : EL - KM : FM - KL$$
$$= \quad A \quad : \quad B \quad : \quad C \quad : \quad G \quad : \quad H \quad : \quad I. \quad (72)$$

Wenn aber die beiden genannten Kegel identisch werden, können wir jedes System zugeordneter Durchmesser derselben zu Coordinaten-Axen, jeden beliebigen Durchmesser als Axe $OX$ nehmen. Die Aequatorialfläche und die Meridianfläche, welche einen beliebigen Durchmesser des Complexes bezüglich zu ihrem Durchmesser oder zu ihrer Doppellinie hat, sind identische Flächen des zweiten Grades.

Betrachten wir diejenigen beiden Meridianflächen, welche, bei der gewählten Coordinaten-Bestimmung, bezüglich $OX$ und $OY$ zur Doppellinie haben, so sind die Durchschnitte dieser beiden Flächen mit den drei Coordinaten-Ebenen identisch. Zunächst ist beiden Flächen die in $XY$ liegende Complex-Curve gemeinsam. Aber auch die Durchschnitts-Curven in $XZ$ und in $YZ$ fallen zusammen, insofern die in jeder der beiden Coordinaten-Ebenen liegende Complex-Curve einmal Meridian-Curve der einen Meridianfläche, dann aber auch Breiten-Curve der mit der anderen Meridianfläche identischen Aequatorialfläche ist. In Folge dessen fallen sämmtliche Meridianflächen und Aequatorialflächen, welche einen beliebigen Durchmesser des Complexes bezüglich zu ihrer Doppellinie oder zu ihrem Durchmesser haben, in dieselbe Fläche zweiten Grades zusammen.

Alle Linien eines so particularisirten Complexes zweiten Grades, der nunmehr nur noch von neun Constanten abhängt, umhüllen eine Fläche des zweiten Grades. Wir können sagen, dass diese Fläche durch die Gleichung des Complexes dargestellt werde.

Erst dadurch, dass der allgemeine Complex einer zehnfachen Beschränkung unterworfen wird, geht derselbe in einen solchen über, dessen Linien eine Fläche zweiten Grades umhüllen. Diese Beschränkungen können wir geometrisch darin zusammenfassen, dass erstens alle Durchmesser des Complexes in demselben Puncte sich schneiden, und dass zweitens der

Complex-Kegel und der Asymptoten-Kegel der Charakteristik des Complexes, die diesen Punct zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, identisch dieselben sind. Der ersten Voraussetzung entsprechen fünf Bedingungs-Gleichungen, die sich in allgemeinster Form ergeben, wenn wir zwischen den acht Gleichungen, die wir durch Annullirung der acht letzten Coefficienten der auf den neuen Anfangspunct $(x^0, y^0, z^0)$ bezogenen Complex-Gleichung (VI) erhalten, die drei Coordinaten $x^0$, $y^0$, $z^0$ eliminiren. Der zweiten Voraussetzung entsprechen die fünf Bedingungs-Gleichungen (72).

Wenn wir, in anderer Reihenfolge, dieselben Bedingungs-Gleichungen befriedigen, gelangen wir, durch andere Particularisationen, zu demselben Resultate.

261. Wir wollen uns nochmals zu der Gleichung (52) zurückwenden und diejenigen halben Durchmesser der Curven des Complexes in den drei Coordinaten-Ebenen $YZ$, $ZX$, $XY$, welche bezüglich in $OY$ und $OZ$, $OX$ und $OZ$, $OZ$ und $OY$ fallen, durch $b_1$ und $c_1$, $a_2$ und $c_2$, $a_3$ und $b_3$ bezeichnen. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} b_1^2 &= -\frac{C}{D}, \quad c_1^2 = -\frac{B}{D}, \\ a_2^2 &= -\frac{C}{E}, \quad c_2^2 = -\frac{A}{E}, \\ a_3^2 &= -\frac{B}{F}, \quad b_3^2 = -\frac{A}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Dieselben sechs Grössen, in folgender Weise zusammengestellt:

$$b_3 \text{ und } c_2, \quad a_3 \text{ und } c_1, \quad a_2 \text{ und } b_1,$$

sind zugleich die, bezüglich in $OY$ und $OZ$, $OX$ und $OZ$, $OX$ und $OY$ fallenden Halbdurchmesser der Basen in $YZ$, $XZ$, $XY$ derjenigen drei Complex-Cylinder, deren Seiten mit $OX$, $OY$, $OZ$ parallel sind. Wir erhalten:

$$a_3^2\, b_1^2\, c_2^2 = a_2^2\, b_3^2\, c_1^2. \tag{74}$$

Wenn zwischen den sechs Constanten der Gleichung (69) die doppelte Bedingungs-Gleichung (70):

$$AD = BE = CF$$

besteht, schneiden die drei Complex-Curven in den drei Coordinaten-Ebenen die drei Coordinaten-Axen in denselben Puncten. Diese drei Complex-Curven fallen mit den Basen der drei Complex-Cylinder zusammen. Dann erhalten wir, wenn wir die Marken von $a$, $b$, $c$ unterdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \frac{C}{E} = \frac{B}{F} &= -a^2, \\ \frac{C}{D} = \frac{A}{F} &= -b^2, \\ \frac{B}{D} = \frac{A}{E} &= -c^2. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Wir können eine der sechs Constanten der Complex-Gleichung (52) beliebig annehmen. Setzen wir:

$$C = a^2 b^2,$$

so geben die letzten Gleichungen:

$$A = b^2 c^2, \; B = a^2 c^2,$$
$$D = -a^2, E = -b^2, F = -c^2.$$

Die fragliche Gleichung geht alsdann in die folgende über:

$$b^2 c^2 r^2 + a^2 c^2 s^2 + a^2 b^2 = a^2 \sigma^2 + b^2 \varrho^2 + c^2 \eta^2. \tag{76}$$

Sie stellt einen Complex dar, dessen Linie eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunct umhüllen; sie stellt diese Fläche selbst dar.

Die Gleichung derselben Fläche in Punct-Coordinaten ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{77}$$

und in Ebenen-Coordinaten:

$$a^2 t^2 + b^2 u^2 + c^2 v^2 = w^2. \tag{78}$$

262. Um eine gegebene Fläche des zweiten Grades, für deren allgemeine Gleichung in Punct-Coordinaten wir die folgende nehmen wollen:

$$\begin{aligned} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz + 2cx \\ + 2c'y + 2c''z + d = 0, \end{aligned} \tag{79}$$

durch eine Complex-Gleichung darzustellen, brauchen wir bloss die Gleichung des der Fläche umschriebenen Kegels zu bestimmen, welcher irgend einen gegebenen Punct $(x'; y', z')$ zu seinem Mittelpuncte hat. Für diese Gleichung erhalten wir, wie bekannt*):

*) Die Gleichung des Textes leitet sich auf die folgende Weise ab.

Die Gleichung einer jeden Fläche zweiten Grades, die eine gegebene Fläche zweiten Grades:

$$\Omega = 0$$

längs der Durchschnitts-Curve mit einer Ebene:

$$p = 0$$

berührt, fällt unter die Form

$$\lambda \Omega - p^2 = 0,$$

wo $\lambda$ eine willkürliche Constante bezeichnet. Für $p$ ist hier die Polar-Ebene des Punctes $(x', y', z')$ mit Bezug auf die gegebene Fläche $(\Omega)$ genommen, und $\lambda$ ist so bestimmt, dass die neue Fläche durch den Punct $(x', y', z')$ hindurch geht.

$$(ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z + d)$$
$$(ax'^2 + a'y'^2 + a''z'^2 + 2b''x'y' + 2b'x'z' + 2by'z' + 2cx' + 2c'y' + 2c''z' + d)$$
$$= [(ax + b''y + b'z + c)x' + (b''x + a'y + bz + c')y' + (b'x + by + a''z + c'')z' + (cx + c'y + c''z + d)]^2 \tag{80}$$

Die Gleichung dieses Kegels ist, wenn wir $x', y', z'$ neben $x, y, z$ als veränderlich betrachten, die Complex-Gleichung der Fläche. Wir können sie wirklich unter der allgemeinen Form schreiben:

$$\begin{aligned} A(x-x')^2 + B(y-y')^2 + C(z-z')^2 \\ + D(yz'-y'z)^2 + E(x'z-xz')^2 + F(xy'-x'y)^2 \\ + 2G(y-y')(z-z') + 2H(x-x')(z-z') + 2I(x-x')(y-y') \\ + 2K(xy'-x'y)(x'z-xz') + 2L(xy'-x'y)(yz'-y'z) + 2M(x'z-xz')(yz'-y'z) \\ + 2N'(x-x')(yz'-y'z) + 2O'(y-y')(x'z-xz') + 2V'(z-z')(xy'-x'y) \\ + 2P(x-x')(x'z-xz') + 2Q(x-x')(xy'-x'z) \\ + 2R(y-y')(xy'-x'y) + 2S(y-y')(yz'-y'z) \\ + 2T(z-z')(yz'-y'z) + 2U(z-z')(x'z-xz') = 0, \end{aligned}$$

indem wir

$$\left.\begin{array}{lll} ad - c^2 = A, & a'd - c'^2 = B, & a''d - c''^2 = C, \\ a'a'' - b^2 = D, & aa'' - b'^2 = E, & aa' - b''^2 = F, \\ bd - c'c'' = G, & b'd - cc'' = H, & b''d - cc' = I, \\ b'b'' - ab = K, & bb'' - a'b' = L, & bb' - a''b'' = M, \\ b''c'' - b'c' = N', & bc - b''c'' = O', & b'c' - bc = V', \\ b'c - ac'' = P, & ac' - b''c = Q, & \\ b''c' - a'c = R, & a'c'' - bc' = S, & \\ bc'' - a''c' = T, & a''c - b'c'' = U & \end{array}\right\} \tag{81}$$

setzen.

Dabei ist:

$$N' + O' + V' = 0, \tag{82}$$

und:

$$\left.\begin{array}{l} N = N' - V' = b''c'' - 2b'c' + bc, \\ O = O' - V' = -b''c'' + 2bc - b'c'. \end{array}\right\} \tag{83}$$

263. Um die Fläche zweiten Grades zu bestimmen, wenn ihre Complex-Gleichung gegeben ist, erhalten wir aus den vorstehenden Gleichungen (81) unmittelbar eine Reihe solcher Relationen, in welche die Constanten der Gleichung des Complexes und der Fläche linear eingehen. Beispielsweise ergeben sich aus den sechs Gleichungen:

$$a'a'' - b^2 = D, \qquad aa'' - b'^2 = E, \qquad aa' - b''^2 = F,$$
$$b'b'' - ab = K, \qquad bb'' - a'b' = L, \qquad bb' - a''b'' = M$$

die folgenden sechs zur Bestimmung der Verhältnisse von $a, a', a'', b, b', b''$:

$$\left.\begin{aligned} aL + b'F + b''K &= 0\,, \\ aM + b'K + b''E &= 0\,, \\ a'M + b''D + bL &= 0\,, \\ a'K + b''L + bF &= 0\,, \\ a''K + bE + b'M &= 0\,, \\ a''L + bM + b'D &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

Wir unterlassen es, diese Relationen, aus denen sich durch Elimination der Grössen $a, a'$ u. s. w. auch unmittelbar die Bedingungen ergeben, welche die Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung zu erfüllen haben, damit die Complexlinien eine Fläche des zweiten Grades umhüllen, vollständig hinzuschreiben.

264. So wie, wenn wir uns der Punct-Coordinaten $x$, $y$, $z$ bedienen, die Gleichung der einer gegebenen Fläche zweiten Grades umschriebenen Kegelfläche, indem wir die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ seines Mittelpunctes ebenfalls als veränderlich betrachten, die Complex-Gleichung der Fläche in Strahlen-Coordinaten ist, so ist, wenn wir uns der Plan-Coordinaten $t$, $u$, $v$ bedienen, die Gleichung der Durchschnitts-Curve einer Fläche zweiten Grades mit einer beliebigen schneidenden Ebene $(t', u', v')$, wenn wir die Coordinaten derselben ebenfalls als veränderlich betrachten, die Complex-Gleichung dieser Fläche in Axen-Coordinaten. In ganz analoger Weise, wie wir von der Complex-Gleichung einer gegebenen Fläche zweiten Grades in Strahlen-Coordinaten zu ihrer gewöhnlichen Gleichung in Punct-Coordinaten übergehen, können wir von der Complex-Gleichung derselben Fläche in Axen-Coordinaten sogleich zur Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten übergehen. Da überhaupt, wenn eine der beiden Gleichungen eines Complexes in Strahlen- und in Axen-Coordinaten gegeben ist, es beide zugleich sind, so ist in dem Vorstehenden auch der einfachste Weg angezeigt, um von einer der beiden Gleichungen einer Fläche zweiten Grades in Punct- und in Plan-Coordinaten zu der anderen derselben überzugehen.

265. Der Grund der Darstellbarkeit einer Fläche zweiten Grades durch eine Complex-Gleichung liegt in der Eigenschaft dieser Flächen, dass jede Ebene dieselbe in einer Curve der zweiten Classe schneidet und jeder

Punct für dieselbe der Mittelpunct eines Umhüllungs-Kegels der zweiten Ordnung ist.

Die Fläche kann einerseits in eine Kegelfläche, andererseits in eine ebene Curve ausarten. In beiden Fällen lässt sich dieselbe durch eine Gleichung zwischen Linien-Coordinaten darstellen.

In dem ersten Falle arten sämmtliche Complex-Kegel in Systeme von zwei Ebenen aus, welche die dargestellte Kegelfläche berühren. Alle durch den Mittelpunct der Fläche gehenden geraden Linien gehören dem Complexe an.

In dem zweiten Falle artet die Complex-Curve in einer beliebigen Ebene in ein System zweier Puncte aus, in denen die dargestellte Curve von der gegebenen Ebene geschnitten wird. Alle in der Ebene der Curve liegenden geraden Linien sind Linien des Complexes.

Während in Punct-Coordinaten sich eine ebene Curve, in Ebenen-Coordinaten sich eine Kegelfläche nicht durch eine Gleichung darstellen lässt, finden beide geometrische Gebilde ihre Darstellung in Linien-Coordinaten. Während aber eine Kegelfläche, durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen Punct-Coordinaten bestimmt, von der zweiten Ordnung, und eine ebene Curve, durch eine Gleichung zwischen Ebenen-Coordinaten gegeben, von der zweiten Classe ist, kann ein Complex zweiten Grades nur einen Kegel der zweiten Classe und eine Curve der zweiten Ordnung darstellen.

Ein Kegel zweiter Classe kann sich auflösen in zwei sich in seinem Mittelpuncte schneidende Axen; eine Curve zweiter Ordnung in zwei in ihrer Ebene liegende Strahlen. Kegel und Curve sind nach dieser Particularisation identisch dasselbe und finden, nach wie vor, ihre Darstellung in einer Gleichung zwischen Linien-Coordinaten.

Noch von einer anderen Seite kommen wir auf dieselbe Particularisation des Complexes zweiten Grades. Die Gleichung desselben kann sich in lineare Factoren auflösen und diese Factoren wiederum können der Bedingung genügen, Complexe ersten Grades von der besonderen Art darzustellen, deren sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden. Wenn die beiden auf diese Art dargestellten geraden Linien durch denselben Punct hindurchgehen, oder, was dasselbe heisst, in derselben Ebene liegen, so haben wir einmal den particularisirten Kegel zweiter Classe, das andere Mal die particularisirte Curve zweiter Ordnung.