Abschnitt II.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Complexe des zweiten Grades.

§ 1.

Durchmesser der Complexe. Systeme dreier zugeordneter Durchmesser. Die drei Axen Systeme zugeordneter Complex-Cylinder. Central-Parallelepipede. Mittelpunct des Complexes.

234. Die Gleichung (IV) gibt unmittelbar für jede gegebene Ebene (t', u', v'), indem wir t', u', v' als constant, t, u, v als veränderlich betrachten, die Complex-Curve, welche diese Ebene enthält, im Raume durch Plan-Coordinaten dargestellt. Wenn wir $\frac{t'}{w'}, \frac{u'}{w'}, \frac{v'}{w'}$, statt t', u', v' und $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ statt t, u, v einführen, so können wir die angezogene Gleichung unter der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned}
&(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w^2 \\
&-2(Dt'w' + Lv'w' + Mu'w' - Ou'v' - Rv'^2 - St'v' + Tt'u' + Uu'^2)tw \\
&-2(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')uw \\
&-2(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)vw \\
&-2(Au'v' - Kw'^2 + Gt'^2 - Ht'u' - Jt'v' - Ot'w' + Pu'w' - Qv'w')uv \\
&-2(Bt'v' - Lw'^2 - Gt'u' + Hu'^2 - Ju'v' + Nu'w' + Rv'w' - St'w')tv \\
&-2(Ct'u' - Mw'^2 - Gt'v' - Hu'v' + Jv'^2 - (N-O)v'w' + Tt'w' - Uu'w')tu \\
&\quad + (Dw'^2 + Bv'^2 + Cu'^2 - 2Gu'v' - 2Sv'w' + 2Tu'w')t^2 \\
&\quad + (Ew'^2 + Av'^2 + Ct'^2 - 2Ht'v' + 2Pv'w' - 2Ut'w')u^2 \\
&\quad + (Fw'^2 + Au'^2 + Bt'^2 - 2Jt'u' - 2Qu'w' + 2Rt'w')v^2 = 0. \qquad (X)
\end{aligned}$$

Für die Gleichung des Mittelpunctes der Curve erhalten wir, indem wir die Gleichung der Curve in Beziehung auf w differentiiren, die folgende:

$$\begin{aligned}&(Dt'^2+Eu'^2+Fv'^2+2Ku'v'+2Lt'v'+2Mt'u')w\\ &-(Dt'w'+Lv'w'+Mu'w'-Ou'v'-Rv'^2-St'v'+Tt'u'+Uu'^2)t\\ &-(Eu'w'+Kv'w'+Mt'w'+Nt'v'+Pu'v'+Qv'^2-Tt'^2-Ut'u')u\\ &-(Fv'w'+Ku'w'+Lt'w'-(N-O)t'u'-Pu'^2-Qu'v'+Rt'v'+St'^2)v=0.^{*)}\end{aligned}\tag{1}$$

Die drei Coordinaten des Mittelpunctes der Curve sind hiernach, wenn wir zugleich, der Kürze wegen,

$$Dt'^2+Eu'^2+Fv'^2+2Ku'v'+2Lt'v'+2Mt'u'=\Xi'$$

setzen:

$$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{Dt'+Lv'+Mu'}{\Xi'}\cdot w'+\frac{Ou'v'+Rv'^2+St'v'-Tt'u'-Uu'^2}{\Xi'},\\ y&=-\frac{Eu'+Kv'+Mt'}{\Xi'}\cdot w'+\frac{-Nt'v'-Pu'v'-Qv'^2+Tt'^2+Ut'u'}{\Xi'},\\ z&=-\frac{Fv'+Ku'+Lt'}{\Xi'}\cdot w'+\frac{(N-O)t'u'+Pu'^2+Qu'v'-Rt'v'-St'^2}{\Xi'}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Die Gleichung der Ebene $\left(\frac{t'}{w'}, \frac{u'}{w'}, \frac{v'}{w'}\right)$ ist:

$$t'x+u'y+v'z+w'=0,\tag{3}$$

und wird durch die vorstehenden Coordinaten-Werthe befriedigt.

235. Wenn wir t', u', v' als constant, w' als veränderlich betrachten, rückt die Ebene (3) parallel mit sich selbst fort, während in ihr die Complex-Curve sich fortwährend ändert. Lassen wir insbesondere w' verschwinden, so erhalten wir für den Mittelpunct der Curve in der bezüglichen durch den Anfangspunct gehenden Ebene von der gegebenen Richtung, deren Gleichung ist:

$$t'x+u'y+v'z=0,$$

die folgenden Coordinaten-Werthe, die wir zur Unterscheidung accentuiren wollen:

$$\left.\begin{aligned}x'&=\frac{Ou'v'+Rv'^2+St'v'-Tt'u'-Uu'^2}{\Xi'},\\ y'&=\frac{-Nt'v'-Pu'v'-Qv'^2+Tt'^2+Ut'u'}{\Xi'},\\ z'&=\frac{(N-O)t'u'+Pu'^2+Qu'v'-Rt'v'-St'^2}{\Xi'}.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

*) Die Complex-Curve tritt in der Darstellungsweise des Textes als Fläche zweiter Classe auf, und ihr Mittelpunct wird wie der Mittelpunct einer solchen Fläche bestimmt. Geometrie des Raumes. S. 192.

Wir können hiernach die früheren allgemeinen Coordinaten-Werthe (2) in der folgenden Weise schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= \frac{Dt' + Lv' + Mu'}{\Xi'}, \\ y - y' &= \frac{Eu' + Kv' + Mt'}{\Xi'}, \\ z - z' &= \frac{Fv' + Ku' + Lt'}{\Xi'}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Hiernach ergibt sich die nachstehende Doppel-Gleichung:

$$\frac{x - x'}{Dt' + Lv' + Mu'} = \frac{y - y'}{Eu' + Kv' + Mt'} = \frac{z - z'}{Fv' + Ku' + Lt'}, \qquad (6)$$

der wir auch die folgende Form geben können:

$$\frac{x - x'}{\dfrac{d\Xi'}{dt}} = \frac{y - y'}{\dfrac{d\Xi'}{du}} = \frac{z - z'}{\dfrac{d\Xi'}{dv}}. \qquad (7)$$

Die vorstehenden Doppel-Gleichungen stellen, wenn wir in ihnen x, y, z als veränderlich betrachten, eine gerade Linie dar. Aus ihnen ist w' eliminirt. Die dargestellte gerade Linie ist also der geometrische Ort für die Mittelpuncte der Complex-Curven in parallelen Ebenen, welche, bei willkürlicher Annahme von w', durch die Gleichung (3) dargestellt werden. Wir nennen diese Linie einen Durchmesser des Complexes und sagen, dass er, in dem Complexe, dem Systeme der parallelen Ebenen und insbesondere jeder dieser Ebenen zugeordnet sei.

In einem Complexe des zweiten Grades ist jedem Systeme paralleler Ebenen im Allgemeinen ein einziger Durchmesser zugeordnet, welcher die Mittelpuncte aller Curven zweiter Classe enthält, die in den parallelen Ebenen liegen.

Die Complex-Curven in parallelen Ebenen bilden eine Aequatorialfläche: der Durchmesser der Fläche ist ein Durchmesser des Complexes.

236. Wenn der durch (6) dargestellte Durchmesser des Complexes auf der Ebene (3), welcher er conjugirt ist, senkrecht stehen soll, so erhalten wir die folgenden beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Dt' + Lv' + Mu'}{Fv' + Ku' + Lt'} &= \frac{t'}{v'}, \\ \frac{Eu' + Kv' + Mt'}{Fv' + Ku' + Lt'} &= \frac{u'}{v'}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

welche wir in der Doppel-Gleichung:

$$\frac{t'}{\frac{d\Xi'}{dt'}} = \frac{u'}{\frac{d\Xi'}{du'}} = \frac{v'}{\frac{d\Xi'}{dv'}} \tag{9}$$

zusammenfassen können. Der Durchmesser ist in diesem Falle eine Axe des Complexes. Die letzte Doppel-Gleichung ist mit derjenigen identisch, die wir zur Bestimmung der Richtung der drei Hauptschnitte einer Fläche zweiter Classe erhalten, welche, indem wir $\frac{t'}{w'}$, $\frac{u'}{w'}$, $\frac{v'}{w'}$ als Plan-Coordinaten und als veränderlich betrachten und durch k eine willkürliche Constante bezeichnen, durch die Gleichung

$$\Xi' + kw'^2 = 0$$

dargestellt wird.*)

237. Diese Fläche hängt lediglich von den sechs Complex-Constanten D, E, F, K, L, M ab. Da diese Constanten dieselben bleiben, wenn der Anfangspunct der Coordinaten seine Lage beliebig ändert (Nr. 157.), so können wir die Fläche, parallel mit sich selbst, verschieben, ohne ihre Beziehung zum Complexe zu ändern. Der willkürlichen Annahme von k entsprechend, können sich die Dimensionen derselben in jedem beliebigen Verhältnisse ändern. Wenn wir den Coordinaten-Axen eine andere Richtung geben, so erhalten in dem neuen Coordinaten-Systeme die obigen sechs Complex-Constanten andere Werthe und dieselben Werthe entsprechen den sechs Constanten der Fläche, wenn wir auch diese auf die neuen Coordinaten-Axen beziehen.

Die so definirte Fläche, deren Mittelpunct und deren Dimensionen beliebig angenommen werden können, wollen wir die Characteristik des Complexes nennen. Die Gleichung des Complexes wollen wir wieder in folgender Weise schreiben:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs + 2Ks\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{gathered} \tag{I}$$

Für die Gleichung der Characteristik des Complexes erhalten wir, wenn wir den Anfangspunct zum Mittelpuncte dieser Fläche nehmen, nach Unterdrückung der Accente die folgende:

---

*) Siehe Geometrie des Raumes Nr. 103 und Nr. 152.

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu + w^2$$
$$\equiv \Xi + w^2 = 0. \tag{10}$$

Wir haben in dieser Gleichung, unbeschadet der Allgemeinheit, k der Einheit gleich gesetzt.

Die Characteristik eines Complexes überhebt uns jeder analytischen Discussion über die Richtung der Durchmesser desselben. Einem Systeme paralleler Ebenen ist ein Durchmesser der Characteristik zugeordnet und diesem Durchmesser ist derjenige parallel, welcher in dem Complexe denselben Ebenen zugeordnet ist. Dreien zugeordneten Durchmessern der Characteristik sind drei Durchmesser des Complexes parallel, die wir ihrerseits als drei zugeordnete Durchmesser des Complexes bezeichnen wollen. Wir können jeden gegebenen Durchmesser des Complexes für einen dreier zugeordneter Durchmesser desselben nehmen, dann sind die beiden andern denjenigen Ebenen parallel, denen der gegebene zugeordnet ist. Jeder von drei zugeordneten Durchmessern ist denjenigen Ebenen zugeordnet, welchen die jedesmaligen beiden andern parallel sind.

Ein Complex hat im Allgemeinen ein einziges System von drei Axen, die auf einander senkrecht stehen. Die Ebenen, welche diesen Axen, paarweise genommen, parallel sind, wollen wir als Hauptschnitte des Complexes bezeichnen. Die Axen sind den Hauptschnitten zugeordnet.

Zum Behuf der Bestimmung der zugeordneten Durchmesser eines Complexes können wir an die Stelle der Characteristik den Asymptotenkegel derselben setzen, und diesen Kegel, parallel mit sich selbst, beliebig verschieben. Nehmen wir den Anfangspunct der Coordinaten als seinen Mittelpunct, so wird derselbe in Plan-Coordinaten durch die beiden Gleichungen:

$$\Xi = 0, \qquad w = 0$$

dargestellt, in Punct-Coordinaten durch die einzige Gleichung:

$$(K^2 - EF)x^2 + (L^2 - DF)y^2 + (M^2 - DE)z^2$$
$$+ 2(DK - LM)yz + 2(EL - KM)xz + 2(FM - KL)xy = 0. \tag{11}$$

Drei zugeordnete Durchmesser eines Complexes haben gegen einander eine wesentlich verschiedene Richtung, je nachdem die Characteristik des Complexes ein (ein- oder zweischaliges) Hyperboloid mit reellem Asymptotenkegel oder ein (reelles oder imaginäres) Ellipsoid ist, dessen Asymptotenkegel auf einen ellipsoidischen Punct sich reducirt. Der letztere Fall ist dadurch angezeigt, dass die drei Ausdrücke

$$K^2 - EF, \qquad L^2 - DF, \qquad M^2 - DE \tag{12}$$

im Zeichen übereinstimmen, während im erstern Falle diese Uebereinstimmung nicht stattfindet.

238. Wenn insbesondere die Characteristik eine Umdrehungsfläche ist, so hat der Complex, wie diese Fläche, eine Hauptaxe und daneben unendlich viele Axen, die sämmtlich gegen die Hauptaxe und, paarweise genommen, auch gegen einander senkrecht gerichtet sind. Dieser besondere Fall ist, unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, dadurch bezeichnet, dass

$$D - \frac{LM}{K} = E - \frac{KM}{L} = F - \frac{KL}{M}, \tag{13}$$

und dann bestimmt die folgende Doppel-Gleichung:

$$Kx = Ly = Mz \tag{14}$$

die Richtung der Hauptaxe.*)

Ein mehr untergeordneter Fall ist derjenige, dass die Characteristik in eine Kugel übergeht, dem entsprechend, dass die doppelte Bedingungs-Gleichung (13) in die folgenden Gleichungen sich auflöset:

$$K = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0,$$
$$D = E = F.$$

Dann sind alle den Raum durchziehenden Ebenen Hauptschnitte des Complexes, auf welchen die zugeordneten Durchmesser senkrecht stehen. Jeder Durchmesser des Complexes ist eine Axe desselben.

239. Wenn wir die Coordinaten-Axen, auf welche die allgemeine Gleichung (I) des Complexes zweiten Grades bezogen ist, irgend dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel nehmen, so verschwinden aus dieser allgemeinen Gleichung, wie aus der Gleichung der Characteristik, drei Constanten. Dann ist nämlich:

$$K = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0.$$

Es geschieht dieses insbesondere, wenn rechtwinklige Coordinaten-Axen den Axen des Complexes parallel genommen werden. Es kann diess unendlich oft geschehen, wenn die Characteristik eine Rotationsaxe, der Complex eine Hauptaxe hat. Eine der drei Coordinaten-Axen ist dann der Hauptaxe parallel zu nehmen, während irgend zwei gerade Linien, welche auf einander und auf der Hauptaxe senkrecht sind, für die beiden anderen Coordinaten-Axen genommen werden können. Wenn nach einander OX, OY, OZ der

*) Geometrie des Raumes. Nr. 154.

Hauptaxe parallel genommen werden, so werden bezüglich die Coefficienten E und F, D und F, D und E einander gleich. Aus der Gleichung eines Complexes, welcher nur rechtwinklige zugeordnete Durchmesser hat und auf ein beliebiges System rechtwinkliger Coordinaten-Axen bezogen wird, verschwinden K, L, M und die drei Coefficienten D, E, F werden einander gleich.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen auf den allgemeinen Fall beschränken, dass die Characteristik eine Fläche zweiter Classe mit einem Mittelpuncte ist. Diejenigen Fälle, wo das Verschwinden von K, L, M das gleichzeitige Verschwinden einer der drei Constanten D, E, F zur Folge hat, bleiben hiernach einstweilen von der Discussion noch ausgeschlossen.

240. Wir haben für denjenigen Durchmesser, der solchen Ebenen, die einer gegebenen Ebene:

$$t'x + u'y + v'z = 0$$

parallel sind, zugeordnet ist, die folgende Doppel-Gleichung:

$$\frac{x - x'}{Dt' + Lv' + Mu'} = \frac{y - y'}{Eu' + Kv' + Mt'} = \frac{z - z'}{Fv' + Ku' + Lt'} \tag{6}$$

erhalten. Der successiven Annahme entsprechend, dass

$$\begin{aligned} u' &= 0 \quad \text{und} \quad v' = 0, \\ t' &= 0 \quad \text{-} \quad v' = 0, \\ t' &= 0 \quad \text{-} \quad u' = 0, \end{aligned}$$

ist nach der 234. Nummer bezüglich:

$$\begin{aligned} \Xi' &= Dt'^2, & x' &= 0, & y' &= \frac{T}{D}, & z' &= -\frac{S}{D}, \\ \Xi' &= Eu'^2, & x' &= -\frac{U}{E}, & y' &= 0, & z' &= \frac{P}{E}, \\ \Xi' &= Fv'^2, & x' &= \frac{R}{F}, & y' &= -\frac{Q}{F}, & z' &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Hiernach löst sich die vorstehende Doppel-Gleichung nach einander in die folgenden drei Paare von Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} Mx - Dy + T &= 0, & Lx - Dz - S &= 0, \\ My - Ex - U &= 0, & Ky - Ez + P &= 0, \\ Lz - Fx + R &= 0, & Kz - Fy - Q &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

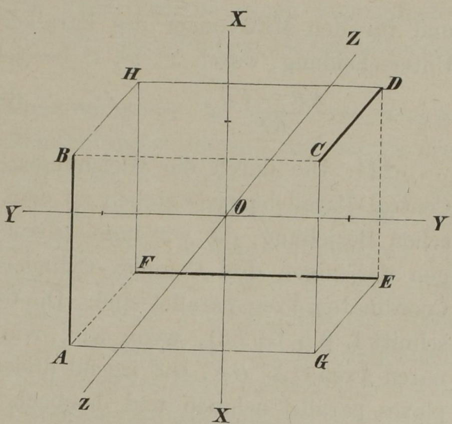
welche diejenigen Durchmesser des Complexes darstellen, die bezüglich den mit YZ, XZ, XY parallelen Ebenen zugeordnet sind.

Wenn wir die drei Coordinaten-Axen insbesondere so annehmen, dass sie irgend dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind, so verschwinden die drei Constanten K, L, M und wir erhalten zur Bestimmung der absoluten Lage dieser drei den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallelen Durchmesser die folgenden drei Gleichungen-Paare:

$$\begin{aligned} y &= +\frac{T}{D}, & z &= -\frac{S}{D}, \\ x &= -\frac{U}{E}, & z &= +\frac{P}{E}, \\ x &= +\frac{R}{F}, & y &= -\frac{Q}{F}. \end{aligned} \tag{17}$$

Drei zugeordnete Durchmesser schneiden sich also, paarweise genommen, im Allgemeinen nicht. Sie bestimmen aber, wie überhaupt irgend drei gerade Linien, welche sich nicht schneiden, ein Parallelepiped, das wir hier, weil es für den Complex bezeichnend ist, näher betrachten und ein Central-Parallelepiped des Complexes nennen wollen.

Die vorstehenden sechs Gleichungen (17) stellen, einzeln genommen, die sechs Seitenebenen eines Central-Parallelepipeds dar. Jede von zwei gegenüberliegenden Seitenebenen geht durch einen von zwei der drei zugeordneten Durchmesser und ist dem anderen der zwei parallel. Drei sich nicht schneidende Kanten des Parallelepipeds sind die drei zugeordneten Durchmesser, für welche wir in der 12. Figur AB, CD, EF nehmen wollen. Wir können dieselben sechs Gleichungen (17), die, paarweise genommen, die drei zugeordneten Durchmesser des Complexes darstellen, auch noch in folgender Weise zusammenordnen:



Figur 12.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{Q}{F}, & z &= +\frac{P}{E}, \\ x &= +\frac{R}{F}, & z &= -\frac{S}{D}, \\ x &= -\frac{U}{E}, & y &= +\frac{T}{D}. \end{aligned} \tag{18}$$

Dann stellen die drei Paare von Gleichungen diejenigen drei Kanten des Parallelepipeds dar, welcher den drei zugeordneten Durchmessern gegenüberstehen. Diese drei Kanten DE, FA, BC, die auch ihrerseits sich nicht schneiden, bilden mit den drei in die zugeordneten Durchmesser fallenden Kanten ein räumliches Sechseck ABCDEF. Die Eckpuncte des Sechsecks sind sechs der acht Eckpuncte des Parallelepipeds. Drei Diagonalen des Parallelepipeds sind die drei Diagonalen des Sechsecks, die beiden Puncte G, H, welche die vierte Diagonale verbindet, haben zu Coordinaten

$$\begin{array}{lll} x = +\dfrac{R}{F}, & y = +\dfrac{T}{D}, & z = +\dfrac{P}{E}, \\ x = -\dfrac{U}{E}, & y = -\dfrac{Q}{F}, & z = -\dfrac{S}{D}. \end{array} \tag{19}$$

Für die Längen der Kanten, welche bezüglich den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel sind, ergibt sich

$$\frac{ER+FU}{EF}, \qquad \frac{DQ+FT}{DF}, \qquad \frac{DP+ES}{DE}, \tag{20}$$

und für den Mittelpunct des Parallelepipeds, dessen Coordinaten wir, zur Unterscheidung, durch x^0, y^0, z^0 bezeichnen wollen:

$$x^0 = \frac{ER-FU}{EF}, \qquad y^0 = -\frac{DQ-FT}{DF}, \qquad z^0 = \frac{DP-ES}{DE}. \tag{21}$$

241. Die durch die Gleichungen-Paare (18) dargestellten Kanten des Central-Parallelepipeds stehen zu dem Complexe in einer einfachen geometrischen Beziehung, die wir unmittelbar erhalten, wenn wir zu den Gleichungen derjenigen drei Complex-Cylinder zurückgehen, deren Seiten den drei Coordinaten-Axen parallel sind. Die Gleichungen dieser Cylinder werden (Abschnitt I. § 5 Gl. 32), wenn wir, wie in der vorigen Nummer, die Coordinaten-Axen OX, OY, OZ irgend dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel nehmen und demnach K, L, M gleich Null setzen, die folgenden:

$$\left.\begin{array}{r} Fy^2 + Ez^2 + 2Qy - 2Pz = 0, \\ Fx^2 + Dz^2 - 2Rx + 2Sz = 0, \\ Ex^2 + Dy^2 + 2Ux - 2Ty = 0. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Die drei Axen dieser Cylinder werden durch die drei Gleichungen-Paare (18) dargestellt. Während drei Kanten des Central-Parallelepipeds, AB, CD, EF, in drei zugeordnete Durchmesser des Complexes fallen, fallen die drei gegenüberliegenden Kanten desselben, DE, FA, BC, in die Axen derjenigen drei Cylinder, deren Seiten den drei zugeordneten Durchmessern parallel sind.

242. Wenn ein Complex zweiten Grades gegeben ist und wir eine Ebenen-

richtung willkürlich annehmen, so ist jeder Linienrichtung, die dieser Ebenenrichtung parallel ist, eine zweite solche Linienrichtung zugeordnet. Jeder gegebenen Ebenenrichtung (jedem Systeme paralleler Ebenen) ist eine einzige Linienrichtung zugeordnet und gegenseitig jeder gegebenen Linienrichtung eine einzige Ebenenrichtung. Jeder gegebenen Linienrichtung sind unendlich viele Paare von Linienrichtungen zugeordnet, welche der der gegebenen Linienrichtung zugeordneten Ebenenrichtung parallel sind. So gibt es unendlich viele Systeme dreier zugeordneter Linienrichtungen, in der Art, dass jeder gegebenen Linienrichtung einerseits unendlich viele Paare zugeordneter Linienrichtungen entsprechen, welche der zugeordneten Ebenenrichtung parallel sind, und andererseits die Ebenenrichtung, welche irgend zweien dreier zugeordneter Linienrichtungen parallel ist, der dritten dieser Richtungen zugeordnet ist. Es gibt endlich unendlich viele Systeme dreier zugeordneter Ebenenrichtungen: sie sind je zweien von drei zugeordneten Linienrichtungen parallel.

Es gibt einerseits drei zugeordnete Durchmesser des Complexes, welche die Richtung dreier zugeordneter Linienrichtungen haben, andrerseits drei Axen von Complex-Cylindern, welche dieselben Richtungen haben, und die wir ihrerseits als drei conjugirte Cylinderaxen bezeichnen können. Die drei zugeordneten Durchmesser und die drei zugeordneten Cylinderaxen bilden ein räumliches Sechseck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind. Die Seiten desselben sind abwechselnd Durchmesser und Cylinderaxen. Jeder Durchmesser wird von zwei Cylinderaxen geschnitten, welche derjenigen Ebenenrichtung parallel sind, die der Richtung des Durchmessers zugeordnet ist. Jede Cylinderaxe wird von zwei Durchmessern geschnitten, welche derjenigen Ebenenrichtung parallel sind, die der Richtung der Cylinderaxe zugeordnet ist.

Einer gegebenen Ebene sind unendlich viele Durchmesser des Complexes und die Axen unendlich vieler Complex-Cylinder parallel. Einerseits bilden jene Durchmesser, andrerseits diese Cylinderaxen eine Linienfläche. Der gegebenen Ebene ist ein Durchmesser des Complexes zugeordet, so wie ihr die Axe eines Complex-Cylinders zugeordnet ist. Jener Durchmesser ist dieser Cylinderaxe parallel. Die Axen aller Complex-Cylinder, welche der gegebenen Ebene parallel sind, schneiden die zugeordneten Durchmesser, alle Durchmesser des Complexes, welche der Ebene parallel sind, schneiden die zugeordnete Cylinderaxe.

243. Es erscheint zweckmässig, die vorstehenden geometrischen Betrachtungen durch einige analytische Entwicklungen zu bestätigen und zu vervollständigen.

Die Gesammtheit aller Curven, welche in Ebenen liegen, welche der Ebene YZ parallel sind und somit eine Aequatorialfläche bilden, wird (Abschn. I, § 2 Nr. 163) durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$Dw^2 + 2(Lx - S)vw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2$$
$$+ 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Mx + C)u^2 = 0. \quad (23)$$

Die Ebene der Curve ist durch x bestimmt und dann die Curve in ihrer Ebene durch die Linien-Coordinaten $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$. Wenn die Axe OX die der Ebene YZ zugeordnete Richtung haben soll, so verschwindet L und M; wenn sie mit dem dieser Ebene zugeordneten Durchmesser des Complexes zusammenfallen soll, so müssen auf ihr die Mittelpuncte aller Curven liegen. Diess fordert, neben:

$$L = 0, \qquad M = 0,$$

überdiess noch:

$$S = 0, \qquad T = 0.$$

Dann vereinfacht sich die vorstehende Gleichung folgendergestalt:

$$Dw^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \quad (24)$$

Dieselbe Aequatorialfläche, welche durch die vorstehende Gleichung vermittelst ihrer Breitencurven dargestellt wird, wird (Abschn. I, § 5 Gl. 30) unter Berücksichtigung, dass L, M, S und T verschwinden, durch die folgende Gleichung:

$$(Fv^2 + 2Kuv + Eu^2)x^2 + Dv^2z^2$$
$$+ 2(Rv^2 + Ouv - Uu^2)x + (Bv^2 - 2Guv + Cu^2) = 0 \quad (25)$$

vermittelst ihrer umschriebenen Complex-Cylinder, deren Axen der Coordinaten-Ebene YZ parallel sind, dargestellt. Nachdem wir durch willkürliche Annahme von $\frac{v}{u}$ die Axenrichtung eines dieser umschriebenen Complex-Cylinder bestimmt haben, stellt die letzte Gleichung in XZ die Curve zweiter Ordnung dar, nach welcher der bezügliche Cylinder diese Coordinaten-Ebene schneidet. Die mit YZ parallele Axe des Cylinders geht durch den Mittelpunct dieser Durchschnitts-Curve, welcher auf der Coordinaten-Axe OX liegt, und auf dieser Axe durch den Coordinaten-Werth

$$x = \frac{Rv^2 + Ouv - Uu^2}{Fv^2 + 2Kuv + Eu^2} \quad (26)$$

bestimmt ist. Beziehen wir die Coordinaten y und z auf irgend einen Punct irgend einer mit YZ parallelen Cylinderaxe, so ist

$$\frac{v}{u} = -\frac{y}{z},$$

und wir erhalten

$$x = \frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 - 2Kyz + Ez^2}, \tag{27}$$

als Gleichung des geometrischen Ortes für die der Ebene YZ parallelen Axen von Complex-Cylindern.

In der letzten Gleichung ist ausgesprochen, dass in jeder durch einen gegebenen Durchmesser gelegten Ebene eine einzige Cylinderaxe liegt, welche der dem Durchmesser zugeordneten Ebenenrichtung parallel ist; während in jeder Ebene, welche diese Richtung hat, zwei auf dem Durchmesser sich schneidende Cylinderaxen liegen.

244. Es gibt einen andern Weg zur Bestimmung der beiden Cylinderaxen, die in einer gegebenen Ebene, welche wir hier der Coordinaten-Ebene YZ parallel genommen haben, enthalten sind. Wenn wir nämlich die Gleichung (24) in Beziehung auf x differentiiren, kommt:

$$(Fx - R)v^2 + (2Kx - O)uv + (Ex + U)u^2 = 0.$$

Diese Gleichung gibt sofort den eben gefundenen Werth von x in v und u (26). Die Richtung der beiden Cylinderaxen in der Ebene YZ selbst ist durch die Wurzeln der folgenden Gleichung gegeben:

$$Rv^2 + Ouv - Uu^2 = 0.$$

Ein Complex-Cylinder, dessen Axe in einer gegebenen Ebene liegt, hat zu zweien seiner Seiten zwei parallele Tangenten derjenigen Complex-Curve zweiter Classe, welche in dieser Ebene liegt. Die Axe des Cylinders geht also durch den Mittelpunct der Complex-Curve. Projiciren wir auf die gegebene Ebene die Complex-Curve in der ihr parallelen benachbarten Ebene nach derjenigen Richtung, die diesen Ebenen conjugirt ist, so wird auch diese Projection von den beiden Cylinderseiten berührt; mit andern Worten, die beiden unter sich parallelen Ebenen, welche den Cylinder nach diesen Seiten berühren, berühren gleichzeitig die Aequatorialfläche, welche OX zum Durchmesser hat. Es handelt sich hiernach darum, diejenigen Puncte der Complex-Curve in der gegebenen Ebene zu bestimmen, in welchen die Aequatorialfläche von solchen Ebenen berührt wird, die dem Durchmesser dieser Fläche parallel sind. Der der Aequatorialfläche umschriebene Cylinder, dessen Seiten dem Durchmesser derselben parallel sind, berührt die

Fläche nach einer räumlichen Curve, welche von einer Ebene in vier Puncten geschnitten wird. Sie wird insbesondere von der gegebenen Ebene, welche eine Breitenebene der Fläche ist, in solchen vier Puncten geschnitten, welche die Scheitel zweier Durchmesser der Complex-Curve in der gegebenen Ebene sind. Die beiden, diesen Durchmessern zugeordneten Durchmesser der Complex-Curve sind die beiden zu construirenden, in der gegebenen Ebene liegenden Cylinderaxen.

245. Wir wollen die Axe OX, welche nach der bisherigen Annahme mit irgend einem Durchmesser des Complexes zusammenfiel, nunmehr so verschieben, dass sie mit der diesem Durchmesser parallelen Axe eines Complex-Cylinders zusammenfällt. Die Gleichung desjenigen Cylinders, dessen Axe der Coordinaten-Axe OX parallel ist, hat überhaupt zur Gleichung (Nr. 249):

$$Fy^2 - 2Kyz + Ez^2 + 2Qy - 2Pz + A = 0.$$

Damit die Axe des Cylinders mit OX zusammenfalle, erhalten wir die beiden Bedingungen:

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Die allgemeine Gleichung der Complex-Curven in Plan-Coordinaten (X), welche wir an die Spitze der Entwicklungen dieses Paragraphen gestellt haben, stellt dann insbesondere die in einer beliebigen, durch die Cylinderaxe gelegten Ebene:

$$u'y + v'z = 0,$$

enthaltene Complex-Curve dar, wenn wir in derselben t' und w' gleich Null setzen. Unter Berücksichtigung, dass P und Q verschwinden, erhalten wir für diese Curve die Gleichung:

$$\begin{aligned}(Eu'^2 + 2Ku'v' + Fv'^2)w^2 &- 2(Uu'^2 - Ou'v' - Rv'^2)tw \\ - 2(Hu'^2 - Ju'v')tv &+ 2(Hu'v' - Jv'^2)tu \\ + (Cu'^2 &- 2Gu'v' + Bv'^2)t^2 \\ + A(u'v &- v'u)^2 = 0. \qquad (28)\end{aligned}$$

Der Mittelpunct dieser Curve liegt auf der Coordinaten-Axe OX, und ist auf dieser Axe durch den Coordinaten-Werth:

$$x = \frac{Rv'^2 + Ou'v' - Uu'^2}{Fv'^2 + 2Ku'v' + Eu'^2} \qquad (29)$$

bestimmt.

Die vorstehende Gleichung (28) stellt, wenn wir in derselben $\frac{v'}{u'}$ als veränderlich betrachten, eine Meridianfläche dar, welche die Axe eines Complex-

Cylinders zu ihrer Doppellinie hat. Sie ist dadurch characterisirt, dass die Mittelpuncte ihrer sämmtlichen Meridiancurven auf der Doppellinie liegen.

246. Nach Vertauschung von $\frac{v'}{u'}$ und $\frac{v}{u}$ werden die beiden Gleichungen (27) und (29) identisch. Wenn wir daher durch $\frac{v'}{u'}$ die Richtung einer Cylinderaxe bestimmen, welche der Ebene YZ parallel ist und demnach denjenigen Durchmesser des Complexes, der mit OX parallel ist, schneidet, so liegt diese in einer Ebene, welche die Cylinderaxe OX in dem durch (29) bestimmten Puncte schneidet. Diejenige gerade Linie, welche in dieser Ebene liegt und durch diesen Punct geht und deren Richtung der Richtung der durch $\frac{v'}{u'}$ bestimmten Ebene der Complex-Curve und also auch der Richtung der durch $\frac{v}{u}$ bestimmten Cylinderaxe conjugirt ist, ist der gesuchte Durchmesser des Complexes.

Um hiernach den fraglichen durch den Mittelpunct der Curve (28) gehenden Durchmesser des Complexes zu construiren, bedienen wir uns der Characteristik der Fläche. Wir wollen die bisher unbestimmt gebliebenen Richtungen der beiden Coordinaten-Axen OY und OZ, der Einfachheit wegen, mit irgend zwei zugeordneten Durchmessern der Durchschnitts-Curve der Characteristik mit der Coordinaten-Ebene YZ zusammenfallen lassen. Dann verschwindet K aus der Gleichung des Complexes, und die Gleichung dieser Durchschnitts-Curve wird:

$$Fv^2 + Eu^2 + kw^2 = 0.$$

Zur Bestimmung der Richtung, welche der Richtung $\frac{v'}{u'}$ zugeordnet ist, die wir durch $\frac{v}{u}$ bezeichnen wollen, erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{v'}{u'} \cdot \frac{v}{u} + \frac{E}{F} = 0. \tag{30}$$

Wenn wir vermittelst dieser Gleichung in (29) $\frac{v}{u}$ statt $\frac{v'}{u'}$ einführen, kommt:

$$x = -\frac{F^2Uv^2 + EFOuv - E^2Ru^2}{EF(Fv^2 + Eu^2)}. \tag{31}$$

Wenn wir endlich y und z auf irgend einen Punct des fraglichen mit YZ parallelen Durchmessers des Complexes beziehen, erhalten wir:

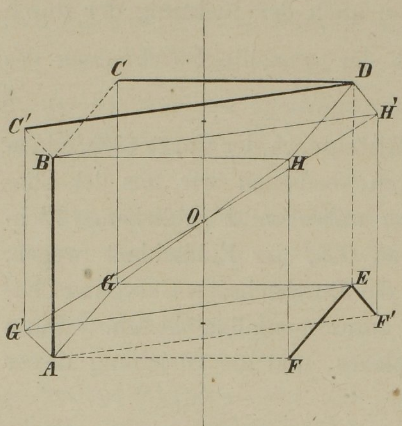
$$\frac{v}{u} = -\frac{y}{z},$$

und hiernach

$$x = \frac{-F^2Uy^2 + EFOyz + E^2Rz^2}{EF(Fy^2 + Ez^2)}. \tag{32}$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir x, y, z als veränderlich betrachten, den geometrischen Ort für diejenigen Durchmesser des gegebenen Complexes dar, welche der Ebene YZ parallel sind.

Sie sagt aus, dass in jeder durch die Axe eines gegebenen Complex-Cylinders gelegten Ebene ein einziger Durchmesser des Complexes liegt, welcher der der Cylinderaxe zugeordneten Ebenenrichtung parallel ist, während in jeder Ebene von dieser Richtung zwei Durchmesser liegen, welche auf der Axe des gegebenen Cylinders sich schneiden.



Figur 13.

Eine beliebige Ebene A F F′ E G G′ A schneidet den Durchmesser AB des Complexes und die Axe DE des Complex-Cylinders, deren Richtung ihr zugeordnet ist, in zwei Puncten A und E. In dieser Ebene liegen zwei Cylinderaxen AF und AF′, die den Durchmesser AB in A, und zwei Complex-Durchmesser EF und EF′, welche die Cylinderaxe DE in E schneiden. Die Richtungen der beiden Durchmesser in dieser Ebene sind bezüglich den Richtungen der beiden Cylinderaxen in derselben conjugirt. Die Ebene gehört gleichzeitig zweien Central-Parallelepipeden an, welche zwei gegenüberliegende Kanten, die in den Durchmesser AB und die ihm parallele Cylinderaxe DE fallen, gemein haben. Die gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds fallen in dieselbe Ebene BC′CDH′HB. Die beiden in dieser zweiten Ebene liegenden Durchmesser des Complexes, CD und CD′, sind die den beiden Cylinderaxen in der ersten Ebene, so wie die beiden Cylinderaxen in der zweiten, BC und BC′, die den beiden Durchmessern in der ersten Ebene gegenüberliegenden Kanten der beiden Parallelepipede. Der gemeinsame Mittelpunct der beiden Central-Parallelepipede liegt in einer Ebene, welche parallel mit den beiden gegenüberliegenden Seitenflächen, die wir ihrerseits, wie bisher, der Coordinaten-Ebene YZ parallel nehmen wollen, in der Mitte zwischen beiden hindurchgeht. Sie halbirt also den Abstand eines Durchmessers und einer Cylinderaxe des Complexes, welche unter sich und mit YZ parallel sind. Dadurch, dass wir, parallel mit YZ, die gemeinschaftliche Richtung beider von vorneherein annehmen, sind die beiden gegenüberliegenden Seitenflächen eines Parallelepipeds in linearer Weise bestimmt.

Wenn wir die Gleichung (27), wie die Gleichung (32), auf Coordinaten-Axen OY und OZ beziehen, welche zweien zugeordneten Durchmessern des Complexes oder, was dasselbe heisst, zweien zugeordneten Cylinderaxen desselben parallel sind, so verschwindet auch aus ihr K und es kommt:

$$x = \frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 + Ez^2}. \tag{33}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\frac{y}{z}$ in der vorstehenden Gleichung (33) und der Gleichung (32) derselbe Werth beigelegt werde, bedeutet x in den beiden Gleichungen die Abstände einer Cylinderaxe des Complexes und eines Durchmessers desselben, deren Richtung dieselbe und durch $\frac{y}{z}$ gegeben ist, von der Coordinaten-Ebene YZ. Die halbe Summe dieser Abstände, welche wir durch x^0 bezeichnen wollen, gibt also den Abstand des Mittelpunctes des bezüglichen Central-Parallelepipeds von derselben Coordinaten-Ebene. Wenn wir die fraglichen Gleichungen (32) und (33) addiren, so kommt in Uebereinstimmung mit (21):

$$x^0 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{R}{F} - \frac{U}{E}\right\}. \tag{34}$$

Der Werth von x^0 ist unabhängig von dem beliebig angenommenen Werth von $\frac{y}{z}$. Ueberdiess liegen die Mittelpuncte aller Central-Parallelepipede, deren gegenüberliegende Kanten in den YZ zugeordneten Durchmesser und die dieser Ebene zugeordneten Cylinderaxen fallen, auf der Mittellinie zwischen dieser Cylinderaxe und jenem Durchmesser. Wir ziehen hieraus den Schluss, dass alle Central-Parallelepipede, deren eine Kante in einen gegebenen Durchmesser des Complexes und deren gegenüberliegende Kante demnach in die dem Durchmesser parallele Cylinderaxe fällt, einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben.

Der vorstehende Satz gibt uns unmittelbar neue Reihen von Central-Parallelepipeden, welche unter sich und mit den Parallelepipeden der ersten Reihe denselben Punct zum Mittelpuncte haben. Wir brauchen bloss zu diesem Ende an die Stelle des gegebenen Durchmessers irgend einen neuen zu setzen, der demselben zugeordnet ist, und, so fortfahrend, den jedesmaligen neuen durch irgend einen ihm zugeordneten zu ersetzen. Einem gegebenen Durchmesser der Characteristik des Complexes ist aber jeder Durchmesser, welcher in der gegebenen zugeordneten Diametralebene liegt, zugeordnet. Zwei gegebene Durchmesser haben also beide denjenigen zum zugeordneten Durchmesser, nach welchem die beiden Diametralebenen, welche den beiden gegebenen Durchmessern zugeordnet sind, sich schneiden. So können wir also auch von jedem gegebenen Durchmesser eines Complexes zu jedem zweiten gegebenen Durchmesser desselben in der Art übergehen, dass wir an die Stelle des ersten gegebenen Durchmessers zunächst einen demselben zugeordneten dritten Durchmesser setzen und dann, an die Stelle dieses dritten, den zweiten gegebenen, der seinerseits diesem zugeordnet ist. Wir gelangen somit zu dem folgenden Satze:

Alle Central-Parallelepipede eines gegebenen Complexes haben denselben Punct zu ihrem Mittelpuncte.

Den gemeinschaftlichen Mittelpunct aller Central-Parallelepipede wollen wir den Mittelpunct des Complexes, jede Ebene, welche durch denselben geht, eine Centralebene, jede durch ihn gehende gerade Linie eine Centrallinie desselben nennen.

Ein Complex des zweiten Grades hat im Allgemeinen einen Mittelpunct.

Eine Ebene, welche parallel mit irgend zweien zugeordneten Durchmessern oder mit irgend zweien zugeordneten Cylinderaxen eines Complexes in der Mitte zwischen denselben hindurchgeht, ist eine Centralebene des Complexes.

Jedem Durchmesser eines Complexes ist die Axe eines Cylinders desselben parallel: die Mittellinie zwischen beiden ist eine Centrallinie des Complexes.

247. Wenn wir für YZ eine Centralebene des Complexes und für die Axe OX einmal den ihr zugeordneten Durchmesser, das andere Mal die ihr zugeordnete Cylinderaxe nehmen, so werden die beiden Linienflächen, von welchen die eine alle durch den zugeordneten Durchmesser gehenden, mit YZ parallelen Cylinderaxen, die andere alle durch die zugeordnete Cylinderaxe gehenden, mit YZ parallelen Durchmesser des Complexes enthält, durch folgende beide Gleichungen dargestellt:

$$x = \frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 + Ez^2},$$

$$x = -\frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 + Ez^2}.$$

Wenn wir die beiden Linienflächen und mit ihnen zugleich die bezügliche Coordinaten-Axe OX parallel mit sich selbst und mit der Centralebene verschieben, ändern sich ihre beiden Gleichungen nicht. Wenn, nach der Verschiebung, der conjugirte Durchmesser mit der conjugirten Cylinderaxe zusammenfällt, stellen die vorstehenden Gleichungen die beiden Flächen, auf dasselbe Coordinaten-System bezogen, dar. In ihnen ist dann die geometrische Beziehung derselben zu einander unmittelbar ausgesprochen.

Wir können hierbei immer voraussetzen, dass in YZ die beiden Coordinaten-Axen OY und OZ, welche irgend zweien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind, auf einander senkrecht stehen. Wenn wir insbesondere für die gegebene Centralebene einen der drei Hauptschnitte des Complexes, die durch den Mittelpunct desselben gehen, nehmen, so steht auch OX auf OY und OZ senkrecht. Dann ist, wenn wir die Centalebene als spiegelnde Ebene betrachten, eine der beiden Linienflächen, nach schicklicher gegenseitiger Verschiebung derselben, das Spiegelbild der andern.

248. Wenn wir den Mittelpunct des Complexes zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und durch denselben die drei Coordinaten-Axen parallel mit irgend dreien zugeordneten Durchmessern und Cylinderaxen legen, so wird die Gleichung des Complexes, indem wir K, L, M gleich Null setzen:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

wobei die folgenden drei Bedingungs-Gleichungen (Nr. 240) erfüllt sind:

$$\frac{R}{F} = \frac{U}{E}, \qquad \frac{Q}{F} = \frac{T}{D}, \qquad \frac{P}{E} = \frac{S}{D}, \tag{36}$$

aus welchen die folgende sich ableitet:

$$PRT = QSU. \tag{36a}$$

Dann bestimmen die drei Coordinaten-Paare:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{T}{D} = \frac{Q}{F}, & z &= -\frac{S}{D} = -\frac{P}{E}, \\ x &= -\frac{U}{E} = -\frac{R}{F}, & z &= \frac{P}{E} = \frac{S}{D}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$x = \frac{R}{F} = \frac{U}{E}, \qquad y = -\frac{Q}{F} = -\frac{T}{D}$$

die Lage der drei zugeordneten Durchmesser, und dieselben drei Coordinaten-Paare, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die Lage der drei zugeordneten Cylinderaxen.

Die Coordinaten-Axen werden rechtwinklige, wenn wir sie den drei Axen des Complexes parallel nehmen. Dann ist auch das durch diese bestimmte Central-Parallelepiped ein rechtwinkliges. Die Quadratlänge der Hälfte seiner vier Diagonalen ist:

$$\left(\frac{R}{F}\right)^2 + \left(\frac{P}{E}\right)^2 + \left(\frac{T}{D}\right)^2 = \left(\frac{Q}{F}\right)^2 + \left(\frac{U}{E}\right)^2 + \left(\frac{S}{D}\right)^2. \tag{38}$$

Unter diesen vier Diagonalen ist eine ausgezeichnete, welche keine der drei Axen des Complexes und keine der drei zu denselben parallelen Cylinderaxen schneidet. Wenn wir die Winkel, welche dieselbe mit den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ bildet, durch α, β, γ bezeichnen, ist:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{U}{E} : \frac{Q}{F} : \frac{S}{D} = \frac{R}{F} : \frac{T}{D} : \frac{P}{E}. \tag{39}$$

Der achte Theil des Inhaltes des Centralparallelepipeds ist:

$$\frac{PRT}{DEF} = \frac{QSU}{DEF}. \tag{40}$$

249. Nachdem wir die sechs Constanten der Lage in Abrechnung gebracht haben, beträgt die Anzahl der Constanten des Complexes nur noch dreizehn, die sich, wenn wir die Bedingungs-Gleichungen (36) berücksichtigen, in der Gleichung (35) wiederfinden. Die einzige Bedingung, die befriedigt werden muss, wenn wir der Gleichung des Complexes die vorstehende Form geben wollen, besteht darin, dass keine der drei Constanten D, E, F gleichzeitig mit K, L und M verschwindet. Dann können wir, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, im Allgemeinen in einziger Weise den Complex durch die Gleichung (35) darstellen.

Die besonderen Fälle, dass eine oder mehrere der drei Constanten D, E, F gleichzeitig mit K, L, M verschwinden, werden wir später (§ 3) behandeln.