Abschnitt II.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Complexe des zweiten Grades.

§ 1.

Durchmesser der Complexe. Systeme dreier zugeordneter Durchmesser. Die drei Axen Systeme zugeordneter Complex-Cylinder. Central-Parallelepipede. Mittelpunct des Complexes.

234. Die Gleichung (IV) gibt unmittelbar für jede gegebene Ebene (t', u', v'), indem wir t', u', v' als constant, t, u, v als veränderlich betrachten, die Complex-Curve, welche diese Ebene enthält, im Raume durch Plan-Coordinaten dargestellt. Wenn wir $\frac{t'}{w'}, \frac{u'}{w'}, \frac{v'}{w'}$, statt t', u', v' und $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ statt t, u, v einführen, so können wir die angezogene Gleichung unter der folgenden Form schreiben:

$$
\begin{aligned}
&(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w^2 \\
&-2(Dt'w' + Lv'w' + Mu'w' - Ou'v' - Rv'^2 - St'v' + Tt'u' + Uu'^2)tw \\
&-2(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')uw \\
&-2(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)vw \\
&-2(Au'v' - Kw'^2 + Gt'^2 - Ht'u' - Jt'v' - Ot'w' + Pu'w' - Qv'w')uv \\
&-2(Bt'v' - Lw'^2 - Gt'u' + Hu'^2 - Ju'v' + Nu'w' + Rv'w' - St'w')tv \\
&-2(Ct'u' - Mw'^2 - Gt'v' - Hu'v' + Jv'^2 - (N-O)v'w' + Tt'w' - Uu'w')tu \\
&\qquad + (Dw'^2 + Bv'^2 + Cu'^2 - 2Gu'v' - 2Sv'w' + 2Tu'w')t^2 \\
&\qquad + (Ew'^2 + Av'^2 + Ct'^2 - 2Ht'v' + 2Pv'w' - 2Ut'w')u^2 \\
&\qquad + (Fw'^2 + Au'^2 + Bt'^2 - 2Jt'u' - 2Qu'w' + 2Rt'w')v^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{X}
$$

Für die Gleichung des Mittelpunctes der Curve erhalten wir, indem wir die Gleichung der Curve in Beziehung auf w differentiiren, die folgende:

$$\begin{aligned}
&(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w \\
&-(Dt'w' + Lv'w' + Mu'w' - Ou'v' - Rv'^2 - St'v' + Tt'u' + Uu'^2)t \\
&-(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w' + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')u \\
&-(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)v = 0.^{*)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Die drei Coordinaten des Mittelpunctes der Curve sind hiernach, wenn wir zugleich, der Kürze wegen,

$$Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u' \equiv \Xi'$$

setzen:

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{Dt' + Lv' + Mu'}{\Xi'} \cdot w' + \frac{Ou'v' + Rv'^2 + St'v' - Tt'u' - Uu'^2}{\Xi'}, \\
y &= -\frac{Eu' + Kv' + Mt'}{\Xi'} \cdot w' + \frac{-Nt'v' - Pu'v' - Qv'^2 + Tt'^2 + Ut'u'}{\Xi'}, \\
z &= -\frac{Fv' + Ku' + Lt'}{\Xi'} \cdot w' + \frac{(N-O)t'u' + Pu'^2 + Qu'v' - Rt'v' - St'^2}{\Xi'}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die Gleichung der Ebene $\left(\frac{t'}{w'}, \frac{u'}{w'}, \frac{v'}{w'}\right)$ ist:

$$t'x + u'y + v'z + w' = 0, \qquad (3)$$

und wird durch die vorstehenden Coordinaten-Werthe befriedigt.

235. Wenn wir t', u', v' als constant, w' als veränderlich betrachten, rückt die Ebene (3) parallel mit sich selbst fort, während in ihr die Complex-Curve sich fortwährend ändert. Lassen wir insbesondere w' verschwinden, so erhalten wir für den Mittelpunct der Curve in der bezüglichen durch den Anfangspunct gehenden Ebene von der gegebenen Richtung, deren Gleichung ist:

$$t'x + u'y + v'z = 0,$$

die folgenden Coordinaten-Werthe, die wir zur Unterscheidung accentuiren wollen:

$$\left.\begin{aligned}
x' &= \frac{Ou'v' + Rv'^2 + St'v' - Tt'u' - Uu'^2}{\Xi'}, \\
y' &= \frac{-Nt'v' - Pu'v' - Qv'^2 + Tt'^2 + Ut'u'}{\Xi'}, \\
z' &= \frac{(N-O)t'u' + Pu'^2 + Qu'v' - Rt'v' - St'^2}{\Xi'}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

---

*) Die Complex-Curve tritt in der Darstellungsweise des Textes als Fläche zweiter Classe auf, und ihr Mittelpunct wird wie der Mittelpunct einer solchen Fläche bestimmt. Geometrie des Raumes. S. 192.

Wir können hiernach die früheren allgemeinen Coordinaten-Werthe (2) in der folgenden Weise schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= \frac{Dt' + Lv' + Mu'}{\Xi'}, \\ y - y' &= \frac{Eu' + Kv' + Mt'}{\Xi'}, \\ z - z' &= \frac{Fv' + Ku' + Lt'}{\Xi'}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hiernach ergibt sich die nachstehende Doppel-Gleichung:

$$\frac{x - x'}{Dt' + Lv' + Mu'} = \frac{y - y'}{Eu' + Kv' + Mt'} = \frac{z - z'}{Fv' + Ku' + Lt'}, \tag{6}$$

der wir auch die folgende Form geben können:

$$\frac{x - x'}{\dfrac{d\Xi'}{dt}} = \frac{y - y'}{\dfrac{d\Xi'}{du}} = \frac{z - z'}{\dfrac{d\Xi'}{dv}}. \tag{7}$$

Die vorstehenden Doppel-Gleichungen stellen, wenn wir in ihnen x, y, z als veränderlich betrachten, eine gerade Linie dar. Aus ihnen ist w' eliminirt. Die dargestellte gerade Linie ist also der geometrische Ort für die Mittelpuncte der Complex-Curven in parallelen Ebenen, welche, bei willkürlicher Annahme von w', durch die Gleichung (3) dargestellt werden. Wir nennen diese Linie einen Durchmesser des Complexes und sagen, dass er, in dem Complexe, dem Systeme der parallelen Ebenen und insbesondere jeder dieser Ebenen zugeordnet sei.

In einem Complexe des zweiten Grades ist jedem Systeme paralleler Ebenen im Allgemeinen ein einziger Durchmesser zugeordnet, welcher die Mittelpuncte aller Curven zweiter Classe enthält, die in den parallelen Ebenen liegen.

Die Complex-Curven in parallelen Ebenen bilden eine Aequatorialfläche: der Durchmesser der Fläche ist ein Durchmesser des Complexes.

236. Wenn der durch (6) dargestellte Durchmesser des Complexes auf der Ebene (3), welcher er conjugirt ist, senkrecht stehen soll, so erhalten wir die folgenden beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Dt' + Lv' + Mu'}{Fv' + Ku' + Lt'} &= \frac{t'}{v'}, \\ \frac{Eu' + Kv' + Mt'}{Fv' + Ku' + Lt'} &= \frac{u'}{v'}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

welche wir in der Doppel-Gleichung:

$$\frac{t'}{\frac{d\Xi'}{dt'}} = \frac{u'}{\frac{d\Xi'}{du'}} = \frac{v'}{\frac{d\Xi'}{dv'}} \tag{9}$$

zusammenfassen können. Der Durchmesser ist in diesem Falle eine Axe des Complexes. Die letzte Doppel-Gleichung ist mit derjenigen identisch, die wir zur Bestimmung der Richtung der drei Hauptschnitte einer Fläche zweiter Classe erhalten, welche, indem wir $\frac{t'}{w'}$, $\frac{u'}{w'}$, $\frac{v'}{w'}$ als Plan-Coordinaten und als veränderlich betrachten und durch k eine willkürliche Constante bezeichnen, durch die Gleichung

$$\Xi' + kw'^2 = 0$$

dargestellt wird.*)

237. Diese Fläche hängt lediglich von den sechs Complex-Constanten D, E, F, K, L, M ab. Da diese Constanten dieselben bleiben, wenn der Anfangspunct der Coordinaten seine Lage beliebig ändert (Nr. 157.), so können wir die Fläche, parallel mit sich selbst, verschieben, ohne ihre Beziehung zum Complexe zu ändern. Der willkürlichen Annahme von k entsprechend, können sich die Dimensionen derselben in jedem beliebigen Verhältnisse ändern. Wenn wir den Coordinaten-Axen eine andere Richtung geben, so erhalten in dem neuen Coordinaten-Systeme die obigen sechs Complex-Constanten andere Werthe und dieselben Werthe entsprechen den sechs Constanten der Fläche, wenn wir auch diese auf die neuen Coordinaten-Axen beziehen.

Die so definirte Fläche, deren Mittelpunct und deren Dimensionen beliebig angenommen werden können, wollen wir die Characteristik des Complexes nennen. Die Gleichung des Complexes wollen wir wieder in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs + 2Ks\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Für die Gleichung der Characteristik des Complexes erhalten wir, wenn wir den Anfangspunct zum Mittelpuncte dieser Fläche nehmen, nach Unterdrückung der Accente die folgende:

*) Siehe Geometrie des Raumes Nr. 103 und Nr. 152.

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu + w^2$$
$$\equiv \Xi + w^2 = 0. \tag{10}$$

Wir haben in dieser Gleichung, unbeschadet der Allgemeinheit, k der Einheit gleich gesetzt.

Die Characteristik eines Complexes überhebt uns jeder analytischen Discussion über die Richtung der Durchmesser desselben. Einem Systeme paralleler Ebenen ist ein Durchmesser der Characteristik zugeordnet und diesem Durchmesser ist derjenige parallel, welcher in dem Complexe denselben Ebenen zugeordnet ist. Dreien zugeordneten Durchmessern der Characteristik sind drei Durchmesser des Complexes parallel, die wir ihrerseits als drei zugeordnete Durchmesser des Complexes bezeichnen wollen. Wir können jeden gegebenen Durchmesser des Complexes für einen dreier zugeordneter Durchmesser desselben nehmen, dann sind die beiden andern denjenigen Ebenen parallel, denen der gegebene zugeordnet ist. Jeder von drei zugeordneten Durchmessern ist denjenigen Ebenen zugeordnet, welchen die jedesmaligen beiden andern parallel sind.

Ein Complex hat im Allgemeinen ein einziges System von drei Axen, die auf einander senkrecht stehen. Die Ebenen, welche diesen Axen, paarweise genommen, parallel sind, wollen wir als Hauptschnitte des Complexes bezeichnen. Die Axen sind den Hauptschnitten zugeordnet.

Zum Behuf der Bestimmung der zugeordneten Durchmesser eines Complexes können wir an die Stelle der Characteristik den Asymptotenkegel derselben setzen, und diesen Kegel, parallel mit sich selbst, beliebig verschieben. Nehmen wir den Anfangspunct der Coordinaten als seinen Mittelpunct, so wird derselbe in Plan-Coordinaten durch die beiden Gleichungen:

$$\Xi = 0, \qquad w = 0$$

dargestellt, in Punct-Coordinaten durch die einzige Gleichung:

$$(K^2 - EF)x^2 + (L^2 - DF)y^2 + (M^2 - DE)z^2$$
$$+ 2(DK - LM)yz + 2(EL - KM)xz + 2(FM - KL)xy = 0. \tag{11}$$

Drei zugeordnete Durchmesser eines Complexes haben gegen einander eine wesentlich verschiedene Richtung, je nachdem die Characteristik des Complexes ein (ein- oder zweischaliges) Hyperboloid mit reellem Asymptotenkegel oder ein (reelles oder imaginäres) Ellipsoid ist, dessen Asymptotenkegel auf einen ellipsoidischen Punct sich reducirt. Der letztere Fall ist dadurch angezeigt, dass die drei Ausdrücke

$$K^2 - EF, \qquad L^2 - DF, \qquad M^2 - DE \tag{12}$$

im Zeichen übereinstimmen, während im erstern Falle diese Uebereinstimmung nicht stattfindet.

238. Wenn insbesondere die Characteristik eine Umdrehungsfläche ist, so hat der Complex, wie diese Fläche, eine Hauptaxe und daneben unendlich viele Axen, die sämmtlich gegen die Hauptaxe und, paarweise genommen, auch gegen einander senkrecht gerichtet sind. Dieser besondere Fall ist, unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, dadurch bezeichnet, dass

$$D - \frac{LM}{K} = E - \frac{KM}{L} = F - \frac{KL}{M}, \tag{13}$$

und dann bestimmt die folgende Doppel-Gleichung:

$$Kx = Ly = Mz \tag{14}$$

die Richtung der Hauptaxe.*)

Ein mehr untergeordneter Fall ist derjenige, dass die Characteristik in eine Kugel übergeht, dem entsprechend, dass die doppelte Bedingungs-Gleichung (13) in die folgenden Gleichungen sich auflöset:

$$K = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0,$$
$$D = E = F.$$

Dann sind alle den Raum durchziehenden Ebenen Hauptschnitte des Complexes, auf welchen die zugeordneten Durchmesser senkrecht stehen. Jeder Durchmesser des Complexes ist eine Axe desselben.

239. Wenn wir die Coordinaten-Axen, auf welche die allgemeine Gleichung (I) des Complexes zweiten Grades bezogen ist, irgend dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel nehmen, so verschwinden aus dieser allgemeinen Gleichung, wie aus der Gleichung der Characteristik, drei Constanten. Dann ist nämlich:

$$K = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0.$$

Es geschieht dieses insbesondere, wenn rechtwinklige Coordinaten-Axen den Axen des Complexes parallel genommen werden. Es kann diess unendlich oft geschehen, wenn die Characteristik eine Rotationsaxe, der Complex eine Hauptaxe hat. Eine der drei Coordinaten-Axen ist dann der Hauptaxe parallel zu nehmen, während irgend zwei gerade Linien, welche auf einander und auf der Hauptaxe senkrecht sind, für die beiden anderen Coordinaten-Axen genommen werden können. Wenn nach einander OX, OY, OZ der

*) Geometrie des Raumes. Nr. 154.

Hauptaxe parallel genommen werden, so werden bezüglich die Coefficienten E und F, D und F, D und E einander gleich. Aus der Gleichung eines Complexes, welcher nur rechtwinklige zugeordnete Durchmesser hat und auf ein beliebiges System rechtwinkliger Coordinaten-Axen bezogen wird, verschwinden K, L, M und die drei Coefficienten D, E, F werden einander gleich.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen auf den allgemeinen Fall beschränken, dass die Characteristik eine Fläche zweiter Classe mit einem Mittelpuncte ist. Diejenigen Fälle, wo das Verschwinden von K, L, M das gleichzeitige Verschwinden einer der drei Constanten D, E, F zur Folge hat, bleiben hiernach einstweilen von der Discussion noch ausgeschlossen.

240. Wir haben für denjenigen Durchmesser, der solchen Ebenen, die einer gegebenen Ebene:

$$t'x + u'y + v'z = 0$$

parallel sind, zugeordnet ist, die folgende Doppel-Gleichung:

$$\frac{x - x'}{Dt' + Lv' + Mu'} = \frac{y - y'}{Eu' + Kv' + Mt'} = \frac{z - z'}{Fv' + Ku' + Lt'} \tag{6}$$

erhalten. Der successiven Annahme entsprechend, dass

$$\begin{aligned} u' &= 0 \quad \text{und} \quad v' = 0, \\ t' &= 0 \quad \text{-} \quad v' = 0, \\ t' &= 0 \quad \text{-} \quad u' = 0, \end{aligned}$$

ist nach der 234. Nummer bezüglich:

$$\begin{array}{llll} \Xi' = Dt'^2, & x' = 0, & y' = \frac{T}{D}, & z' = -\frac{S}{D}, \\ \Xi' = Eu'^2, & x' = -\frac{U}{E}, & y' = 0, & z' = \frac{P}{E}, \\ \Xi' = Fv'^2, & x' = \frac{R}{F}, & y' = -\frac{Q}{F}, & z' = 0. \end{array} \tag{15}$$

Hiernach löst sich die vorstehende Doppel-Gleichung nach einander in die folgenden drei Paare von Gleichungen auf:

$$\begin{array}{ll} Mx - Dy + T = 0, & Lx - Dz - S = 0, \\ My - Ex - U = 0, & Ky - Ez + P = 0, \\ Lz - Fx + R = 0, & Kz - Fy - Q = 0, \end{array} \tag{16}$$

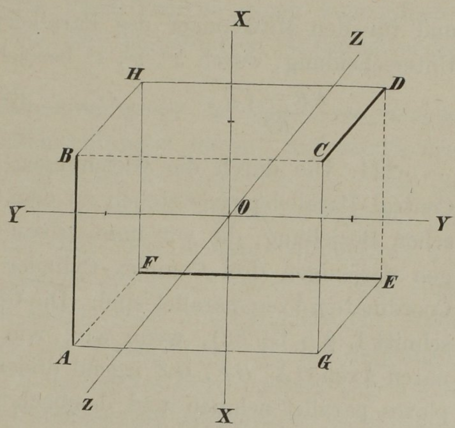
welche diejenigen Durchmesser des Complexes darstellen, die bezüglich den mit YZ, XZ, XY parallelen Ebenen zugeordnet sind.

Wenn wir die drei Coordinaten-Axen insbesondere so annehmen, dass sie irgend dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind, so verschwinden die drei Constanten K, L, M und wir erhalten zur Bestimmung der absoluten Lage dieser drei den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallelen Durchmesser die folgenden drei Gleichungen-Paare:

$$y = +\frac{T}{D}, \qquad z = -\frac{S}{D},$$
$$x = -\frac{U}{E}, \qquad z = +\frac{P}{E}, \tag{17}$$
$$x = +\frac{R}{F}, \qquad y = -\frac{Q}{F}.$$

Drei zugeordnete Durchmesser schneiden sich also, paarweise genommen, im Allgemeinen nicht. Sie bestimmen aber, wie überhaupt irgend drei gerade Linien, welche sich nicht schneiden, ein Parallelepiped, das wir hier, weil es für den Complex bezeichnend ist, näher betrachten und ein Central-Parallelepiped des Complexes nennen wollen.

Die vorstehenden sechs Gleichungen (17) stellen, einzeln genommen, die sechs Seitenebenen eines Central-Parallelepipeds dar. Jede von zwei gegenüberliegenden Seitenebenen geht durch einen von zwei der drei zugeordneten Durchmesser und ist dem anderen der zwei parallel. Drei sich nicht schneidende Kanten des Parallelepipeds sind die drei zugeordneten Durchmesser, für welche wir in der 12. Figur AB, CD, EF nehmen wollen. Wir können dieselben sechs Gleichungen (17), die, paarweise genommen, die drei zugeordneten Durchmesser des Complexes darstellen, auch noch in folgender Weise zusammenordnen:



Figur 12.

$$y = -\frac{Q}{F}, \qquad z = +\frac{P}{E},$$
$$x = +\frac{R}{F}, \qquad z = -\frac{S}{D}, \tag{18}$$
$$x = -\frac{U}{E}, \qquad y = +\frac{T}{D}.$$

Dann stellen die drei Paare von Gleichungen diejenigen drei Kanten des Parallelepipeds dar, welcher den drei zugeordneten Durchmessern gegenüberstehen. Diese drei Kanten DE, FA, BC, die auch ihrerseits sich nicht schneiden, bilden mit den drei in die zugeordneten Durchmesser fallenden Kanten ein räumliches Sechseck ABCDEF. Die Eckpuncte des Sechsecks sind sechs der acht Eckpuncte des Parallelepipeds. Drei Diagonalen des Parallelepipeds sind die drei Diagonalen des Sechsecks, die beiden Puncte G, H, welche die vierte Diagonale verbindet, haben zu Coordinaten

$$\begin{aligned} x &= +\frac{R}{F}, & y &= +\frac{T}{D}, & z &= +\frac{P}{E}, \\ x &= -\frac{U}{E}, & y &= -\frac{Q}{F}, & z &= -\frac{S}{D}. \end{aligned} \tag{19}$$

Für die Längen der Kanten, welche bezüglich den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel sind, ergibt sich

$$\frac{ER+FU}{EF}, \qquad \frac{DQ+FT}{DF}, \qquad \frac{DP+ES}{DE}, \tag{20}$$

und für den Mittelpunct des Parallelepipeds, dessen Coordinaten wir, zur Unterscheidung, durch x^0, y^0, z^0 bezeichnen wollen:

$$x^0 = \frac{ER-FU}{EF}, \qquad y^0 = -\frac{DQ-FT}{DF}, \qquad z^0 = \frac{DP-ES}{DE}. \tag{21}$$

241. Die durch die Gleichungen-Paare (18) dargestellten Kanten des Central-Parallelepipeds stehen zu dem Complexe in einer einfachen geometrischen Beziehung, die wir unmittelbar erhalten, wenn wir zu den Gleichungen derjenigen drei Complex-Cylinder zurückgehen, deren Seiten den drei Coordinaten-Axen parallel sind. Die Gleichungen dieser Cylinder werden (Abschnitt I. § 5 Gl. 32), wenn wir, wie in der vorigen Nummer, die Coordinaten-Axen OX, OY, OZ irgend dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel nehmen und demnach K, L, M gleich Null setzen, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} Fy^2 + Ez^2 + 2Qy - 2Pz &= 0, \\ Fx^2 + Dz^2 - 2Rx + 2Sz &= 0, \\ Ex^2 + Dy^2 + 2Ux - 2Ty &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die drei Axen dieser Cylinder werden durch die drei Gleichungen-Paare (18) dargestellt. Während drei Kanten des Central-Parallelepipeds, AB, CD, EF, in drei zugeordnete Durchmesser des Complexes fallen, fallen die drei gegenüberliegenden Kanten desselben, DE, FA, BC, in die Axen derjenigen drei Cylinder, deren Seiten den drei zugeordneten Durchmessern parallel sind.

242. Wenn ein Complex zweiten Grades gegeben ist und wir eine Ebenen-

richtung willkürlich annehmen, so ist jeder Linienrichtung, die dieser Ebenenrichtung parallel ist, eine zweite solche Linienrichtung zugeordnet. Jeder gegebenen Ebenenrichtung (jedem Systeme paralleler Ebenen) ist eine einzige Linienrichtung zugeordnet und gegenseitig jeder gegebenen Linienrichtung eine einzige Ebenenrichtung. Jeder gegebenen Linienrichtung sind unendlich viele Paare von Linienrichtungen zugeordnet, welche der der gegebenen Linienrichtung zugeordneten Ebenenrichtung parallel sind. So gibt es unendlich viele Systeme dreier zugeordneter Linienrichtungen, in der Art, dass jeder gegebenen Linienrichtung einerseits unendlich viele Paare zugeordneter Linienrichtungen entsprechen, welche der zugeordneten Ebenenrichtung parallel sind, und andererseits die Ebenenrichtung, welche irgend zweien dreier zugeordneter Linienrichtungen parallel ist, der dritten dieser Richtungen zugeordnet ist. Es gibt endlich unendlich viele Systeme dreier zugeordneter Ebenenrichtungen: sie sind je zweien von drei zugeordneten Linienrichtungen parallel.

Es gibt einerseits drei zugeordnete Durchmesser des Complexes, welche die Richtung dreier zugeordneter Linienrichtungen haben, andrerseits drei Axen von Complex-Cylindern, welche dieselben Richtungen haben, und die wir ihrerseits als drei conjugirte Cylinderaxen bezeichnen können. Die drei zugeordneten Durchmesser und die drei zugeordneten Cylinderaxen bilden ein räumliches Sechseck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind. Die Seiten desselben sind abwechselnd Durchmesser und Cylinderaxen. Jeder Durchmesser wird von zwei Cylinderaxen geschnitten, welche derjenigen Ebenenrichtung parallel sind, die der Richtung des Durchmessers zugeordnet ist. Jede Cylinderaxe wird von zwei Durchmessern geschnitten, welche derjenigen Ebenenrichtung parallel sind, die der Richtung der Cylinderaxe zugeordnet ist.

Einer gegebenen Ebene sind unendlich viele Durchmesser des Complexes und die Axen unendlich vieler Complex-Cylinder parallel. Einerseits bilden jene Durchmesser, andrerseits diese Cylinderaxen eine Linienfläche. Der gegebenen Ebene ist ein Durchmesser des Complexes zugeordet, so wie ihr die Axe eines Complex-Cylinders zugeordnet ist. Jener Durchmesser ist dieser Cylinderaxe parallel. Die Axen aller Complex-Cylinder, welche der gegebenen Ebene parallel sind, schneiden die zugeordneten Durchmesser, alle Durchmesser des Complexes, welche der Ebene parallel sind, schneiden die zugeordnete Cylinderaxe.

243. Es erscheint zweckmässig, die vorstehenden geometrischen Betrachtungen durch einige analytische Entwicklungen zu bestätigen und zu vervollständigen.

Die Gesammtheit aller Curven, welche in Ebenen liegen, welche der Ebene YZ parallel sind und somit eine Aequatorialfläche bilden, wird (Abschn. I, § 2 Nr. 163) durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$\begin{aligned} &Dw^2 + 2(Lx - S)vw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 \\ &+ 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Mx + C)u^2 = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Die Ebene der Curve ist durch x bestimmt und dann die Curve in ihrer Ebene durch die Linien-Coordinaten $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$. Wenn die Axe OX die der Ebene YZ zugeordnete Richtung haben soll, so verschwindet L und M; wenn sie mit dem dieser Ebene zugeordneten Durchmesser des Complexes zusammenfallen soll, so müssen auf ihr die Mittelpuncte aller Curven liegen. Diess fordert, neben:

$$L = 0, \qquad M = 0,$$

überdiess noch:

$$S = 0, \qquad T = 0.$$

Dann vereinfacht sich die vorstehende Gleichung folgendergestalt:

$$Dw^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \tag{24}$$

Dieselbe Aequatorialfläche, welche durch die vorstehende Gleichung vermittelst ihrer Breitencurven dargestellt wird, wird (Abschn. I, § 5 Gl. 30) unter Berücksichtigung, dass L, M, S und T verschwinden, durch die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &(Fv^2 + 2Kuv + Eu^2)x^2 + Dv^2z^2 \\ &+ 2(Rv^2 + Ouv - Uu^2)x + (Bv^2 - 2Guv + Cu^2) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

vermittelst ihrer umschriebenen Complex-Cylinder, deren Axen der Coordinaten-Ebene YZ parallel sind, dargestellt. Nachdem wir durch willkürliche Annahme von $\frac{v}{u}$ die Axenrichtung eines dieser umschriebenen Complex-Cylinder bestimmt haben, stellt die letzte Gleichung in XZ die Curve zweiter Ordnung dar, nach welcher der bezügliche Cylinder diese Coordinaten-Ebene schneidet. Die mit YZ parallele Axe des Cylinders geht durch den Mittelpunct dieser Durchschnitts-Curve, welcher auf der Coordinaten-Axe OX liegt, und auf dieser Axe durch den Coordinaten-Werth

$$x = \frac{Rv^2 + Ouv - Uu^2}{Fv^2 + 2Kuv + Eu^2} \tag{26}$$

bestimmt ist. Beziehen wir die Coordinaten y und z auf irgend einen Punct irgend einer mit YZ parallelen Cylinderaxe, so ist

$$\frac{v}{u} = -\frac{y}{z},$$

und wir erhalten

$$x = \frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 - 2Kyz + Ez^2}, \tag{27}$$

als Gleichung des geometrischen Ortes für die der Ebene YZ parallelen Axen von Complex-Cylindern.

In der letzten Gleichung ist ausgesprochen, dass in jeder durch einen gegebenen Durchmesser gelegten Ebene eine einzige Cylinderaxe liegt, welche der dem Durchmesser zugeordneten Ebenenrichtung parallel ist; während in jeder Ebene, welche diese Richtung hat, zwei auf dem Durchmesser sich schneidende Cylinderaxen liegen.

244. Es gibt einen andern Weg zur Bestimmung der beiden Cylinderaxen, die in einer gegebenen Ebene, welche wir hier der Coordinaten-Ebene YZ parallel genommen haben, enthalten sind. Wenn wir nämlich die Gleichung (24) in Beziehung auf x differentiiren, kommt:

$$(Fx - R)v^2 + (2Kx - O)uv + (Ex + U)u^2 = 0.$$

Diese Gleichung gibt sofort den eben gefundenen Werth von x in v und u (26). Die Richtung der beiden Cylinderaxen in der Ebene YZ selbst ist durch die Wurzeln der folgenden Gleichung gegeben:

$$Rv^2 + Ouv - Uu^2 = 0.$$

Ein Complex-Cylinder, dessen Axe in einer gegebenen Ebene liegt, hat zu zweien seiner Seiten zwei parallele Tangenten derjenigen Complex-Curve zweiter Classe, welche in dieser Ebene liegt. Die Axe des Cylinders geht also durch den Mittelpunct der Complex-Curve. Projiciren wir auf die gegebene Ebene die Complex-Curve in der ihr parallelen benachbarten Ebene nach derjenigen Richtung, die diesen Ebenen conjugirt ist, so wird auch diese Projection von den beiden Cylinderseiten berührt; mit andern Worten, die beiden unter sich parallelen Ebenen, welche den Cylinder nach diesen Seiten berühren, berühren gleichzeitig die Aequatorialfläche, welche OX zum Durchmesser hat. Es handelt sich hiernach darum, diejenigen Puncte der Complex-Curve in der gegebenen Ebene zu bestimmen, in welchen die Aequatorialfläche von solchen Ebenen berührt wird, die dem Durchmesser dieser Fläche parallel sind. Der der Aequatorialfläche umschriebene Cylinder, dessen Seiten dem Durchmesser derselben parallel sind, berührt die

Fläche nach einer räumlichen Curve, welche von einer Ebene in vier Puncten geschnitten wird. Sie wird insbesondere von der gegebenen Ebene, welche eine Breitenebene der Fläche ist, in solchen vier Puncten geschnitten, welche die Scheitel zweier Durchmesser der Complex-Curve in der gegebenen Ebene sind. Die beiden, diesen Durchmessern zugeordneten Durchmesser der Complex-Curve sind die beiden zu construirenden, in der gegebenen Ebene liegenden Cylinderaxen.

245. Wir wollen die Axe OX, welche nach der bisherigen Annahme mit irgend einem Durchmesser des Complexes zusammenfiel, nunmehr so verschieben, dass sie mit der diesem Durchmesser parallelen Axe eines Complex-Cylinders zusammenfällt. Die Gleichung desjenigen Cylinders, dessen Axe der Coordinaten-Axe OX parallel ist, hat überhaupt zur Gleichung (Nr. 249):

$$Fy^2 - 2Kyz + Ez^2 + 2Qy - 2Pz + A = 0.$$

Damit die Axe des Cylinders mit OX zusammenfalle, erhalten wir die beiden Bedingungen:

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Die allgemeine Gleichung der Complex-Curven in Plan-Coordinaten (X), welche wir an die Spitze der Entwicklungen dieses Paragraphen gestellt haben, stellt dann insbesondere die in einer beliebigen, durch die Cylinderaxe gelegten Ebene:

$$u'y + v'z = 0,$$

enthaltene Complex-Curve dar, wenn wir in derselben t' und w' gleich Null setzen. Unter Berücksichtigung, dass P und Q verschwinden, erhalten wir für diese Curve die Gleichung:

$$\begin{aligned}(Eu'^2 + 2Ku'v' + Fv'^2)w^2 &- 2(Uu'^2 - Ou'v' - Rv'^2)tw \\ &- 2(Hu'^2 - Ju'v')tv + 2(Hu'v' - Jv'^2)tu \\ &+ (Cu'^2 - 2Gu'v' + Bv'^2)t^2 \\ &+ A(u'v - v'u)^2 = 0. \qquad (28)\end{aligned}$$

Der Mittelpunct dieser Curve liegt auf der Coordinaten-Axe OX, und ist auf dieser Axe durch den Coordinaten-Werth:

$$x = \frac{Rv'^2 + Ou'v' - Uu'^2}{Fv'^2 + 2Ku'v' + Eu'^2} \qquad (29)$$

bestimmt.

Die vorstehende Gleichung (28) stellt, wenn wir in derselben $\frac{v'}{u'}$ als veränderlich betrachten, eine Meridianfläche dar, welche die Axe eines Complex-

Cylinders zu ihrer Doppellinie hat. Sie ist dadurch characterisirt, dass die Mittelpuncte ihrer sämmtlichen Meridiancurven auf der Doppellinie liegen.

246. Nach Vertauschung von $\frac{v'}{u'}$ und $\frac{v}{u}$ werden die beiden Gleichungen (27) und (29) identisch. Wenn wir daher durch $\frac{v'}{u'}$ die Richtung einer Cylinderaxe bestimmen, welche der Ebene YZ parallel ist und demnach denjenigen Durchmesser des Complexes, der mit OX parallel ist, schneidet, so liegt diese in einer Ebene, welche die Cylinderaxe OX in dem durch (29) bestimmten Puncte schneidet. Diejenige gerade Linie, welche in dieser Ebene liegt und durch diesen Punct geht und deren Richtung der Richtung der durch $\frac{v'}{u'}$ bestimmten Ebene der Complex-Curve und also auch der Richtung der durch $\frac{v}{u}$ bestimmten Cylinderaxe conjugirt ist, ist der gesuchte Durchmesser des Complexes.

Um hiernach den fraglichen durch den Mittelpunct der Curve (28) gehenden Durchmesser des Complexes zu construiren, bedienen wir uns der Characteristik der Fläche. Wir wollen die bisher unbestimmt gebliebenen Richtungen der beiden Coordinaten-Axen OY und OZ, der Einfachheit wegen, mit irgend zwei zugeordneten Durchmessern der Durchschnitts-Curve der Characteristik mit der Coordinaten-Ebene YZ zusammenfallen lassen. Dann verschwindet K aus der Gleichung des Complexes, und die Gleichung dieser Durchschnitts-Curve wird:

$$Fv^2 + Eu^2 + kw^2 = 0.$$

Zur Bestimmung der Richtung, welche der Richtung $\frac{v'}{u'}$ zugeordnet ist, die wir durch $\frac{v}{u}$ bezeichnen wollen, erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{v'}{u'} \cdot \frac{v}{u} + \frac{E}{F} = 0. \qquad (30)$$

Wenn wir vermittelst dieser Gleichung in (29) $\frac{v}{u}$ statt $\frac{v'}{u'}$ einführen, kommt:

$$x = -\frac{F^2Uv^2 + EFOuv - E^2Ru^2}{EF(Fv^2 + Eu^2)}. \qquad (31)$$

Wenn wir endlich y und z auf irgend einen Punct des fraglichen mit YZ parallelen Durchmessers des Complexes beziehen, erhalten wir:

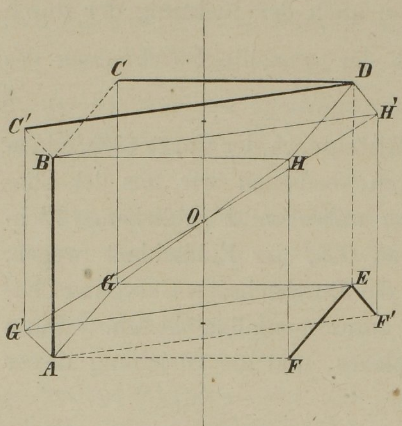
$$\frac{v}{u} = -\frac{y}{z},$$

und hiernach

$$x = \frac{-F^2Uy^2 + EFOyz + E^2Rz^2}{EF(Fy^2 + Ez^2)}. \tag{32}$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir x, y, z als veränderlich betrachten, den geometrischen Ort für diejenigen Durchmesser des gegebenen Complexes dar, welche der Ebene YZ parallel sind.

Sie sagt aus, dass in jeder durch die Axe eines gegebenen Complex-Cylinders gelegten Ebene ein einziger Durchmesser des Complexes liegt, welcher der der Cylinderaxe zugeordneten Ebenenrichtung parallel ist, während in jeder Ebene von dieser Richtung zwei Durchmesser liegen, welche auf der Axe des gegebenen Cylinders sich schneiden.



Figur 13.

Eine beliebige Ebene AFF′EGG′A schneidet den Durchmesser AB des Complexes und die Axe DE des Complex-Cylinders, deren Richtung ihr zugeordnet ist, in zwei Puncten A und E. In dieser Ebene liegen zwei Cylinderaxen AF und AF′, die den Durchmesser AB in A, und zwei Complex-Durchmesser EF und EF′, welche die Cylinderaxe DE in E schneiden. Die Richtungen der beiden Durchmesser in dieser Ebene sind bezüglich den Richtungen der beiden Cylinderaxen in derselben conjugirt. Die Ebene gehört gleichzeitig zweien Central-Parallelepipeden an, welche zwei gegenüberliegende Kanten, die in den Durchmesser AB und die ihm parallele Cylinderaxe DE fallen, gemein haben. Die gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds fallen in dieselbe Ebene BC′CDH′HB. Die beiden in dieser zweiten Ebene liegenden Durchmesser des Complexes, CD und CD′, sind die den beiden Cylinderaxen in der ersten Ebene, so wie die beiden Cylinderaxen in der zweiten, BC und BC′, die den beiden Durchmessern in der ersten Ebene gegenüberliegenden Kanten der beiden Parallelepipede. Der gemeinsame Mittelpunct der beiden Central-Parallelepipede liegt in einer Ebene, welche parallel mit den beiden gegenüberliegenden Seitenflächen, die wir ihrerseits, wie bisher, der Coordinaten-Ebene YZ parallel nehmen wollen, in der Mitte zwischen beiden hindurchgeht. Sie halbirt also den Abstand eines Durchmessers und einer Cylinderaxe des Complexes, welche unter sich und mit YZ parallel sind. Dadurch, dass wir, parallel mit YZ, die gemeinschaftliche Richtung beider von vorneherein annehmen, sind die beiden gegenüberliegenden Seitenflächen eines Parallelepipeds in linearer Weise bestimmt.

Wenn wir die Gleichung (27), wie die Gleichung (32), auf Coordinaten-Axen OY und OZ beziehen, welche zweien zugeordneten Durchmessern des Complexes oder, was dasselbe heisst, zweien zugeordneten Cylinderaxen desselben parallel sind, so verschwindet auch aus ihr K und es kommt:

$$x = \frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 + Ez^2}. \tag{33}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\frac{y}{z}$ in der vorstehenden Gleichung (33) und der Gleichung (32) derselbe Werth beigelegt werde, bedeutet x in den beiden Gleichungen die Abstände einer Cylinderaxe des Complexes und eines Durchmessers desselben, deren Richtung dieselbe und durch $\frac{y}{z}$ gegeben ist, von der Coordinaten-Ebene YZ. Die halbe Summe dieser Abstände, welche wir durch x^0 bezeichnen wollen, gibt also den Abstand des Mittelpunctes des bezüglichen Central-Parallelepipeds von derselben Coordinaten-Ebene. Wenn wir die fraglichen Gleichungen (32) und (33) addiren, so kommt in Uebereinstimmung mit (21):

$$x^0 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{R}{F} - \frac{U}{E}\right\}. \tag{34}$$

Der Werth von x^0 ist unabhängig von dem beliebig angenommenen Werth von $\frac{y}{z}$. Ueberdiess liegen die Mittelpuncte aller Central-Parallelepipede, deren gegenüberliegende Kanten in den YZ zugeordneten Durchmesser und die dieser Ebene zugeordneten Cylinderaxen fallen, auf der Mittellinie zwischen dieser Cylinderaxe und jenem Durchmesser. Wir ziehen hieraus den Schluss, dass alle Central-Parallelepipede, deren eine Kante in einen gegebenen Durchmesser des Complexes und deren gegenüberliegende Kante demnach in die dem Durchmesser parallele Cylinderaxe fällt, einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben.

Der vorstehende Satz gibt uns unmittelbar neue Reihen von Central-Parallelepipeden, welche unter sich und mit den Parallelepipeden der ersten Reihe denselben Punct zum Mittelpuncte haben. Wir brauchen bloss zu diesem Ende an die Stelle des gegebenen Durchmessers irgend einen neuen zu setzen, der demselben zugeordnet ist, und, so fortfahrend, den jedesmaligen neuen durch irgend einen ihm zugeordneten zu ersetzen. Einem gegebenen Durchmesser der Characteristik des Complexes ist aber jeder Durchmesser, welcher in der gegebenen zugeordneten Diametralebene liegt, zugeordnet. Zwei gegebene Durchmesser haben also beide denjenigen zum zugeordneten Durchmesser, nach welchem die beiden Diametralebenen, welche den beiden gegebenen Durchmessern zugeordnet sind, sich schneiden. So können wir also auch von jedem gegebenen Durchmesser eines Complexes zu jedem zweiten gegebenen Durchmesser desselben in der Art übergehen, dass wir an die Stelle des ersten gegebenen Durchmessers zunächst einen demselben zugeordneten dritten Durchmesser setzen und dann, an die Stelle dieses dritten, den zweiten gegebenen, der seinerseits diesem zugeordnet ist. Wir gelangen somit zu dem folgenden Satze:

Alle Central-Parallelepipede eines gegebenen Complexes haben denselben Punct zu ihrem Mittelpuncte.

Den gemeinschaftlichen Mittelpunct aller Central-Parallelepipede wollen wir den Mittelpunct des Complexes, jede Ebene, welche durch denselben geht, eine Centralebene, jede durch ihn gehende gerade Linie eine Centrallinie desselben nennen.

Ein Complex des zweiten Grades hat im Allgemeinen einen Mittelpunct.

Eine Ebene, welche parallel mit irgend zweien zugeordneten Durchmessern oder mit irgend zweien zugeordneten Cylinderaxen eines Complexes in der Mitte zwischen denselben hindurchgeht, ist eine Centralebene des Complexes.

Jedem Durchmesser eines Complexes ist die Axe eines Cylinders desselben parallel: die Mittellinie zwischen beiden ist eine Centrallinie des Complexes.

247. Wenn wir für YZ eine Centralebene des Complexes und für die Axe OX einmal den ihr zugeordneten Durchmesser, das andere Mal die ihr zugeordnete Cylinderaxe nehmen, so werden die beiden Linienflächen, von welchen die eine alle durch den zugeordneten Durchmesser gehenden, mit YZ parallelen Cylinderaxen, die andere alle durch die zugeordnete Cylinderaxe gehenden, mit YZ parallelen Durchmesser des Complexes enthält, durch folgende beide Gleichungen dargestellt:

$$x = \frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 + Ez^2},$$

$$x = -\frac{Ry^2 - Oyz - Uz^2}{Fy^2 + Ez^2}.$$

Wenn wir die beiden Linienflächen und mit ihnen zugleich die bezügliche Coordinaten-Axe OX parallel mit sich selbst und mit der Centralebene verschieben, ändern sich ihre beiden Gleichungen nicht. Wenn, nach der Verschiebung, der conjugirte Durchmesser mit der conjugirten Cylinderaxe zusammenfällt, stellen die vorstehenden Gleichungen die beiden Flächen, auf dasselbe Coordinaten-System bezogen, dar. In ihnen ist dann die geometrische Beziehung derselben zu einander unmittelbar ausgesprochen.

Wir können hierbei immer voraussetzen, dass in YZ die beiden Coordinaten-Axen OY und OZ, welche irgend zweien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind, auf einander senkrecht stehen. Wenn wir insbesondere für die gegebene Centralebene einen der drei Hauptschnitte des Complexes, die durch den Mittelpunct desselben gehen, nehmen, so steht auch OX auf OY und OZ senkrecht. Dann ist, wenn wir die Centalebene als spiegelnde Ebene betrachten, eine der beiden Linienflächen, nach schicklicher gegenseitiger Verschiebung derselben, das Spiegelbild der andern.

248. Wenn wir den Mittelpunct des Complexes zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und durch denselben die drei Coordinaten-Axen parallel mit irgend dreien zugeordneten Durchmessern und Cylinderaxen legen, so wird die Gleichung des Complexes, indem wir K, L, M gleich Null setzen:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0, \end{gathered} \tag{35}$$

wobei die folgenden drei Bedingungs-Gleichungen (Nr. 240) erfüllt sind:

$$\frac{R}{F} = \frac{U}{E}, \qquad \frac{Q}{F} = \frac{T}{D}, \qquad \frac{P}{E} = \frac{S}{D}, \tag{36}$$

aus welchen die folgende sich ableitet:

$$PRT = QSU. \tag{36a}$$

Dann bestimmen die drei Coordinaten-Paare:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{T}{D} = \frac{Q}{F}, & z &= -\frac{S}{D} = -\frac{P}{E}, \\ x &= -\frac{U}{E} = -\frac{R}{F}, & z &= \frac{P}{E} = \frac{S}{D}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$x = \frac{R}{F} = \frac{U}{E}, \qquad y = -\frac{Q}{F} = -\frac{T}{D}$$

die Lage der drei zugeordneten Durchmesser, und dieselben drei Coordinaten-Paare, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die Lage der drei zugeordneten Cylinderaxen.

Die Coordinaten-Axen werden rechtwinklige, wenn wir sie den drei Axen des Complexes parallel nehmen. Dann ist auch das durch diese bestimmte Central-Parallelepiped ein rechtwinkliges. Die Quadratlänge der Hälfte seiner vier Diagonalen ist:

$$\left(\frac{R}{F}\right)^2 + \left(\frac{P}{E}\right)^2 + \left(\frac{T}{D}\right)^2 = \left(\frac{Q}{F}\right)^2 + \left(\frac{U}{E}\right)^2 + \left(\frac{S}{D}\right)^2. \tag{38}$$

Unter diesen vier Diagonalen ist eine ausgezeichnete, welche keine der drei Axen des Complexes und keine der drei zu denselben parallelen Cylinderaxen schneidet. Wenn wir die Winkel, welche dieselbe mit den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ bildet, durch α, β, γ bezeichnen, ist:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{U}{E} : \frac{Q}{F} : \frac{S}{D} = \frac{R}{F} : \frac{T}{D} : \frac{P}{E}. \tag{39}$$

Der achte Theil des Inhaltes des Centralparallelepipeds ist:

$$\frac{PRT}{DEF} = \frac{QSU}{DEF}. \tag{40}$$

249. Nachdem wir die sechs Constanten der Lage in Abrechnung gebracht haben, beträgt die Anzahl der Constanten des Complexes nur noch dreizehn, die sich, wenn wir die Bedingungs-Gleichungen (36) berücksichtigen, in der Gleichung (35) wiederfinden. Die einzige Bedingung, die befriedigt werden muss, wenn wir der Gleichung des Complexes die vorstehende Form geben wollen, besteht darin, dass keine der drei Constanten D, E, F gleichzeitig mit K, L und M verschwindet. Dann können wir, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, im Allgemeinen in einziger Weise den Complex durch die Gleichung (35) darstellen.

Die besonderen Fälle, dass eine oder mehrere der drei Constanten D, E, F gleichzeitig mit K, L, M verschwinden, werden wir später (§ 3) behandeln.

§ 2.

Particularisirung der Complexe, die einen Mittelpunct haben. Complexe, deren Linien eine Fläche zweiten Grades umhüllen.

250. Die zwanzig Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung (I):

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0, \end{gathered}$$

welche, wenn wir durch eine beliebige derselben die übrigen dividiren, die neunzehn Constanten geben, welche zur Bestimmung des Complexes und seiner Lage nothwendig sind, ordnen sich zu den folgenden sechs Gruppen zusammen:

$$\begin{gathered} A,\ B,\ C \quad \text{und} \quad G,\ H,\ J, \\ D,\ E,\ F \quad \text{-} \quad K,\ L,\ M, \\ N,\ O, \\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U. \end{gathered}$$

Die sechs Constanten der letzten Gruppe ordnen sich ihrerseits wieder in verschiedener Weise zusammen, zweimal zu drei Paaren:

$$\begin{array}{lll} P \text{ und } Q, & R \text{ und } S, & T \text{ und } U, \\ P \ \text{ - } \ U, & R \ \text{ - } \ Q, & T \ \text{ - } \ S, \end{array}$$

und einmal zu zwei Gruppen von drei:

$$P,\ R,\ T \quad \text{und} \quad Q,\ S,\ U.$$

251. Wir haben im ersten Paragraphen nachgewiesen, dass, wenn die drei Constanten K, L, M verschwinden, die drei Coordinaten-Axen dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Dann können wir durch schickliche Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten überdiess noch drei neue Constanten aus der Gleichung des Complexes ausfallen lassen. Wenn x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des neuen Anfangspunctes sind, so erhalten die sechs Constanten der letzten Gruppe die folgenden neuen Werthe, die wir durch P_0, Q_0, R_0, S_0, T_0, U_0 unterscheiden wollen (Nr. 157):

$$\begin{array}{ll} P_0 = P + Ez_0, & Q_0 = Q - Fy_0, \\ R_0 = R + Fx_0, & S_0 = S - Dz_0, \\ T_0 = T + Dy_0, & U_0 = U - Ex_0. \end{array} \tag{41}$$

Wenn wir eine der acht Ecken des bezüglichen Central-Parallelepipeds zum Anfangspuncte nehmen, verschwinden drei der neuen Constanten. Je nachdem (Fig. 12) diese Ecke eine derjenigen sechs ist, in welcher sich ein Durchmesser und eine Cylinderaxe schneiden, oder eine der beiden noch übrigen Ecken, durch welche weder einer der drei conjugirten Durchmesser, noch eine der drei, denselben parallelen, conjugirten Cylinderaxen gehen, verschwinden bezüglich:

$$S_0,\ T_0,\ U_0, \qquad R_0,\ S_0,\ T_0, \qquad Q_0,\ R_0,\ S_0,$$
$$P_0,\ Q_0,\ R_0, \qquad U_0,\ P_0,\ Q_0, \qquad T_0,\ U_0,\ P_0,$$

und

$$S_0,\ Q_0,\ U_0, \qquad P_0,\ R_0,\ T_0.$$

Die sechs neuen Constanten können nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn zwischen den ursprünglichen die folgenden drei Relationen bestehen:

$$\frac{R}{F} + \frac{U}{E} = 0, \qquad \frac{T}{D} + \frac{Q}{F} = 0, \qquad \frac{P}{E} + \frac{S}{D} = 0. \tag{42}$$

Die Folge des Verschwindens der neuen Constanten ist, dass die drei neuen Coordinaten-Axen mit drei zugeordneten Durchmessern des Complexes zusammenfallen. Der neue Anfangspunct ist der Mittelpunct des Complexes. Die Complex-Curven in den drei Coordinaten-Ebenen haben denselben auch zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte, und zugleich sind die drei Coordinaten-Axen die Axen dreier Complex-Cylinder. Weil das Coordinaten-System noch von drei willkürlichen Constanten abhängt, so gibt es, im Allgemeinen, in jedem Complexe ein System dreier zugeordneter Durchmesser, welche sich im Mittelpuncte desselben schneiden. Wenn wir den Complex auf die drei sich schneidenden Durchmesser als Coordinaten-Axen beziehen, wird seine Gleichung:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Diese Gleichung enthält zehn von einander unabhängige Constante, indem das Coordinaten-System durch neun Bedingungen particularisirt ist.

Die Coordinaten des Mittelpunctes der Complex-Curve in einer beliebigen durch den Mittelpunct des Complexes gehenden Ebene:

$$t'x + u'y + v'z = 0$$

sind in Gemässheit der Gleichungen (2):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Ou'v'}{Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2}, \\ y &= \frac{-Nt'v'}{Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2}, \\ z &= \frac{(N-O)t'u'}{Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Da die Werthe der drei Coordinaten x, y, z nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn gleichzeitig zwei der drei Coordinaten der Ebene t', u', v' verschwinden, so gibt es, ausser den drei zugeordneten Durchmessern, die zu Coordinaten-Axen genommen worden sind, im Allgemeinen sonst keinen Durchmesser des Complexes, der durch den Mittelpunct desselben geht.

Die drei vorstehenden Gleichungen geben, wenn wir zwischen denselben t', u', v' eliminiren:

$$DO^2y^2z^2 + EN^2x^2z^2 + F(N-O)^2x^2y^2 - NO(N-O)xyz = 0. \qquad (45)$$

Diese Gleichung stellt den geometrischen Ort für den Mittelpunct der Complex-Curve in einer Ebene dar, welche durch den Durchschnitt der drei zugeordneten Durchmesser geht und um diesen Punct beliebig gedreht wird.*)

252. Eine Particularisirung des Complexes tritt ein, wenn wir neben den sechs Constanten der letzten Gruppe eine der drei Constanten:

$$N, \qquad O, \qquad N-O$$

verschwinden lassen. Ist O die verschwindende Constante, so geben die drei Gleichungen (44):

$$x = 0, \qquad u'y + v'z = 0.$$

Dann liegt also in jeder durch den Anfangspunct gehenden Ebene:

$$t'x + u'y + v'z = 0,$$

der Mittelpunct der Complex-Curve auf derjenigen geraden Linie, in welcher die Coordinaten-Ebene YZ von dieser Ebene geschnitten wird, und rückt auf dieser Linie fort, wenn die Ebene um diese Linie sich dreht. Wenn diese Ebene insbesondere durch die Coordinaten-Axe OX geht, verschwindet t', und in Folge davon werden y und z gleichzeitig mit x gleich Null: der Mittelpunct der Curve fällt also mit dem Anfangspuncte zusammen, oder, mit andern Worten, alle der Coordinaten-Axe OX zugeordneten Durchmesser gehen durch den Anfangspunct, und liegen in der Ebene YZ. Jede Linie dieser Ebene, welche durch den Anfangspunct geht, ist ein Durchmesser des Complexes, so wie sie die Axe eines Complex-Cylinders ist.

Wenn neben den sechs Constanten der letzten Gruppe gleichzeitig die beiden Constanten N und O der vorhergehenden Gruppe verschwinden, so ver-

*) Die durch die Gleichung (45) dargestellte Fläche ist eine Complexfläche, die sich in der Art particularisirt hat, dass sie drei, sich in einem Puncte schneidende Doppellinien besitzt: die drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ. Dem entsprechend kann dieselbe auf dreifache Weise durch Drehung eines veränderlichen Kegelschnitts um eine feste Axe erzeugt werden.

schwinden die Werthe von x, y, z in den Gleichungen (44). Dann gehen alle Durchmesser des Complexes durch den Mittelpunct desselben. Sie sind zugleich die Axen der Complex-Cylinder. Jede Complex-Curve, deren Ebene durch den Mittelpunct des Complexes geht, hat diesen Punct auch zu ihrem Mittelpuncte.

Die allgemeine Gleichung (I) wird in diesem Falle:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Jrs = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Sie stellt einen Complex dar, der dadurch, dass sämmtliche Durchmesser desselben in seinem Mittelpuncte sich schneiden, fünf seiner Constanten verloren hat und nur noch, ausser von den sechs Constanten der Lage, von acht Constanten abhängt, die in seiner Gleichung sich wiederfinden. Er ist auf irgend drei zugeordnete Durchmesser als Coordinaten-Axen bezogen, für welche wir, unbeschadet der Allgemeinheit, auch die drei Axen desselben nehmen können.

253. Wenn alle Durchmesser des Complexes in dem Mittelpuncte desselben sich schneiden und irgend drei dieser Durchmesser, welche einander zugeordnet sind, zu Coordinaten-Axen genommen werden, gehen die Gleichungen (3), (30), (12), (21) des vorigen Abschnitts in die folgenden über:

$$Dw^2 + (Fx^2 + B)v^2 - 2Guv + (Ex^2 + C)u^2 = 0, \tag{46}$$

$$\left(E\frac{u^2}{v^2} + F\right)x^2 + Dz^2 + \left(C\frac{u^2}{v^2} - 2G\frac{u}{v} + B\right) = 0, \tag{47}$$

$$\left(F\frac{y^2}{z^2} + E\right)w^2 + \left(B\frac{y^2}{z^2} + 2G\frac{y}{z} + C\right)t^2 - 2\left(J\frac{y}{z} + H\right)tv + Av^2 = 0, \tag{48}$$

$$\left(B\frac{t^2}{w^2} + F\right)y^2 + \left(C\frac{t^2}{w^2} + E\right)z^2 + 2J\frac{t}{w}y + 2H\frac{t}{w}z + A = 0. \tag{49}$$

Durch die beiden ersten der vorstehenden Gleichungen, (46) und (47), wird in gemischten Coordinaten diejenige Aequatorialfläche dargestellt, welche OX zu ihrem Durchmesser hat, einmal vermittelst ihrer Breiten-Curven, deren jedesmalige Ebene durch x bestimmt ist, das andere Mal vermittelst ihrer umhüllenden Complex-Cylinder, deren Axen mit XZ Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten gleich $\left(-\frac{u}{v}\right)$ sind. Aus der Gleichung (47) folgt, dass die Axen sämmtlicher umhüllender Complex-Cylinder in YZ liegen und die Coordinaten-Axe OX im Anfangspuncte schneiden.

Die beiden letzten der vorstehenden Gleichungen, (48) und (49), stellen in gemischten Coordinaten diejenige Meridianfläche dar, welche die Coordinaten-

Axe OX zur Doppellinie hat, einmal vermittelst ihrer Meridian-Curven, deren jedesmalige Ebene durch $\frac{y}{z}$, die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den sie mit XZ bildet, bestimmt ist; das andere Mal vermittelst ihrer umhüllenden Complex-Kegel, deren jedesmaliger Mittelpunct auf OX liegt, in einem Abstande $\left(-\frac{w}{t}\right)$ vom Anfangspuncte der Coordinaten. Wie die Gleichung (48) zeigt, haben alle Meridian-Curven einen Mittelpunct, der mit dem Mittelpuncte des Complexes zusammenfällt und als ein Mittelpunct der Fläche selbst zu betrachten ist.

254. Wenn zugleich mit den früheren elf Constanten auch noch die Constante G der Gruppe

$$G, H, I$$

verschwindet, so zeigt die Gleichung (46), dass alle Breiten-Curven der bezüglichen Aequatorialfläche, deren Durchmesser OX ist, zwei zugeordnete Durchmesser haben, die zweien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Durch das Verschwinden von H und I particularisiren sich die Aequatorialflächen, deren Durchmesser OY und OZ sind, in gleicher Weise, wie sich durch das Verschwinden von G die Aequatorialfläche particularisirt, deren Durchmesser OX ist.

Wenn H und I gleichzeitig verschwinden, schneiden alle Complex-Kegel, deren Mittelpunkte auf der Doppellinie der Fläche liegen, die ihr conjugirte Diametral-Ebene in Curven, deren Mittelpuncte mit dem Mittelpuncte des Complexes zusammenfallen (49).

Wenn die drei Constanten G, H, I gleichzeitig verschwinden, so sind solche drei zugeordnete Durchmesser des Complexes zu Coordinaten-Axen gewählt worden, dass alle Kegel des Complexes, deren Mittelpuncte auf einem dieser drei zugeordneten Durchmesser liegen, die Ebene der jedesmaligen beiden anderen in Curven zweiter Ordnung schneiden, deren Mittelpuncte sämmtlich mit dem Mittelpuncte des Complexes zusammenfallen.

255. Die sechs Constanten

$$G, H, I, K, L, M$$

verschwinden gleichzeitig, wenn zu Coordinaten-Axen solche drei Durchmesser des Complex-Kegels, dessen Mittelpunkt in den Anfangspunct fällt, genommen werden, welche dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Dieser Bedingung kann, für einen gegebenen Complex, im Allgemeinen in einziger Weise entsprochen werden. Denn je zwei concentrische Flächen zweiter Ordnung, insbesondere zwei Kegel mit demselben Mittelpuncte, haben ein einziges System dreier zugeordneter Durchmesser gemein*). Für die beiden Kegel nehmen wir den Kegel des Complexes:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gyz + 2Hxz + 2Ixy = 0, \tag{50}$$

dessen Mittelpunct in den Anfangspunct fällt, und den Asymptotenkegel der Characteristik, dessen Mittelpunct wir ebenfalls in den Anfangspunct legen (11):

$$(K^2 - EF)x^2 + (L^2 - DF)y^2 + (M^2 - DE)z^2$$
$$+ 2(DK - LM)\,yz + 2(EL - KM)\,xz + 2(FM - KL)xy = 0. \tag{51}$$

Das System der beiden gemeinschaftlichen drei conjugirten Durchmesser ist das zu bestimmende Coordinaten-System.

256. In dem Falle, dass alle Durchmesser des Complexes in dem Mittelpuncte desselben sich schneiden, und wir diejenigen drei Durchmesser desselben, welche sowohl in Beziehung auf den Complex als auch in Beziehung auf den Complex-Kegel, der den Mittelpunct des Complexes zu seinem Mittelpuncte hat, einander zugeordnet sind, zu Coordinaten-Axen nehmen, wird die Gleichung des Complexes:

$$Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 = 0. \tag{52}$$

Diese Gleichung enthält fünf von einander unabhängige Constanten, die mit den neun Constanten der Lage die vierzehn Constanten geben, von denen der Complex nur noch abhängt.

257. Nach dem Verschwinden von G, H, I gehen die Gleichungen der Aequatorialfläche in gemischten Coordinaten, (46) und (47), in die folgenden über:

$$w^2 + \frac{Fx^2 + B}{D} \cdot v^2 + \frac{Ex^2 + C}{D} \cdot u^2 = 0, \tag{53}$$

$$\frac{E\dfrac{u^2}{v^2} + F}{C\dfrac{u^2}{v^2} + B} \cdot x^2 + \frac{D}{C\dfrac{u^2}{v^2} + B} \cdot z^2 + 1 = 0, \tag{54}$$

und lassen sich unmittelbar in die folgenden verwandeln, welche dieselbe Aequatorialfläche bezüglich in Punct- und Plan-Coordinaten darstellen:

$$\frac{Dz^2}{Fx^2 + B} + \frac{Dy^2}{Ex^2 + C} + 1 = 0, \tag{55}$$

$$\frac{C\dfrac{u^2}{v^2} + B}{E\dfrac{u^2}{v^2} + F} \cdot t^2 + \frac{C}{D}\,u^2 + \frac{B}{D}\,v^2 + w^2 = 0. \tag{56}$$

*) Siehe Geometrie des Raumes. Nr. 262.

Die Meridianfläche, deren Doppellinie OX ist, wird in dem fraglichen Falle durch die folgenden Gleichungen in gemischten Coordinaten dargestellt:

$$w^2 + \frac{B\frac{y^2}{z^2} + C}{F\frac{y^2}{z^2} + E} \cdot t^2 + \frac{A}{F\frac{y^2}{z^2} + E} \cdot v^2 = 0, \tag{57}$$

$$\frac{B\frac{t^2}{w^2} + F}{A} \cdot y^2 + \frac{C\frac{t^2}{w^2} + E}{A} \cdot z^2 + 1 = 0. \tag{58}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir unmittelbar die Gleichungen derselben Meridianfläche bezüglich in Punct- und Plan-Coordinaten:

$$\frac{F\frac{y^2}{z^2} + E}{B\frac{y^2}{z^2} + C} \cdot x^2 + \frac{F}{A} \cdot y^2 + \frac{E}{A} \cdot z^2 + 1 = 0, \tag{59}$$

$$\frac{A}{B\frac{t^2}{w^2} + F} \cdot u^2 + \frac{A}{C\frac{t^2}{w^2} + E} \cdot v^2 + w^2 = 0. \tag{60}$$

Die Aequatorialfläche, die OX zum Durchmesser, und die Meridianfläche, die OX zur Doppellinie hat, bleiben auch nach der Particularisation von der vierten Ordnung und der vierten Classe.

258. Wenn die neue Bedingungs-Gleichung:

$$BE = CF \tag{61}$$

besteht, wonach:

$$\frac{Fx^2 + B}{Ex^2 + C} = \frac{F}{E} = \frac{B}{C},$$

werden alle Breiten-Curven der Aequatorialfläche (55) ähnliche und ähnlich-liegende Curven des zweiten Grades. Die Gleichung derselben:

$$D(Fx^2 + B)\,y^2 + D\,(Ex^2 + C)\,z^2 + (Fx^2 + B)\,(Ex^2 + C) = 0$$

verwandelt sich, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor

$$DE\,(Fx^2 + B) = DF\,(Ex^2 + C)$$

vernachlässigen, in die folgende:

$$\frac{x^2}{D} + \frac{y^2}{E} + \frac{z^2}{F} + \frac{C}{DE} = 0. \tag{62}$$

Die Aequatorialfläche reducirt sich also, indem wir von den beiden Ebenen:

$$E\,(Fx^2 + B) = F\,(Ex^2 + C) = 0, \tag{63}$$

die sich auf der unendlich weit liegenden Doppellinie der Fläche schneiden und die Fläche auf der Axe OX berühren, absehen, auf eine Fläche des zweiten Grades und verliert ihren, in YZ unendlich weit liegenden Doppelstrahl.

Die beiden Ebenen, welche durch die Gleichung (63) dargestellt werden, sind solche zwei Ebenen, in denen sich die von Linien des Complexes umhüllte Curve der zweiten Classe in zwei Puncte aufgelöst hat, die in einen zusammenfallen.

In ähnlicher Weise verwandelt sich die Gleichung (56), wenn wir dieselbe mit $\frac{DE}{C}$ multipliciren und berücksichtigen, dass in Folge der Bedingungs-Gleichung (61):

$$\frac{C\frac{u^2}{v^2}+B}{E\frac{u^2}{v^2}+F}=\frac{C}{E}=\frac{B}{F},$$

in die folgende:

$$Dt^2+Eu^2+Fv^2+\frac{DE}{C}\cdot w^2=0, \tag{64}$$

die Gleichung derselben Fläche des zweiten Grades in Ebenen-Coordinaten, welche wir eben (62) durch ihre Gleichung in Punct-Coordinaten dargestellt haben.

Wir vernachlässigen hierbei zwei Puncte:

$$Eu^2+Fv^2=0, \tag{65}$$

welche auf der unendlich weit liegenden Doppelaxe liegen, die dadurch ebenfalls verschwindet. Diese beiden Puncte sind solche zwei, für welche sich der von Complexlinien gebildete Kegel der zweiten Ordnung in zwei Ebenen aufgelöst hat, die in eine zusammenfallen.

Die Gleichung der Meridianfläche in Punct-Coordinaten (59) reducirt sich, wenn wir mit $\frac{A}{EF}$ multipliciren, in Folge der Bedingungs-Gleichung (61), auf:

$$\frac{A}{CF}x^2+\frac{y^2}{E}+\frac{z^2}{F}+\frac{A}{EF}=0. \tag{66}$$

Die Gleichung derselben Fläche in Plan-Coordinaten (60) geht, wenn wir mit

$$\frac{F}{A}(Ct^2+Ew^2)=\frac{E}{A}(Bt^2+Fw^2)$$

multipliciren, in die folgende über:

$$\frac{CF}{A}t^2+Eu^2+Fv^2+\frac{EF}{A}w^2=0. \tag{67}$$

Die Meridianfläche reducirt sich, in Folge der Bedingungs-Gleichung (61), auf den zweiten Grad und verliert ihre Doppellinie. Wenn wir sie als den geometrischen Ort von Puncten betrachten und demgemäss, nach der Reduction, durch die Gleichung (66) darstellen, liegt der Grund dieser Reduction darin, dass wir von den beiden Ebenen:

$$B(Fy^2 + Ez^2) = F(By^2 + Cz^2) = 0, \tag{68}$$

die dem vernachlässigten Factor entsprechen, absehen. Diese beiden Ebenen schneiden sich auf OX und sind diejenigen beiden Tangential-Ebenen der Fläche, welche sich durch OX an dieselbe legen lassen. Die Complex-Curve in jeder derselben hat sich in ein System zweier Puncte aufgelöst, die in einen zusammenfallen. Wenn wir die Meridianfläche als von Ebenen umhüllt betrachten und nach der Reduction durch die Gleichung (67) darstellen, ist diese Reduction Folge davon, dass wir von den beiden Puncten:

$$E(Bt^2 + Fw^2) = F(Ct^2 + Ew^2) = 0 \tag{69}$$

absehen, welchen der vernachlässigte Factor entspricht. Diese beiden Puncte sind diejenigen beiden, in welchen die Fläche von der Axe OX geschnitten wird. Der Complex-Kegel, welcher einen beliebigen dieser beiden Puncte zum Mittelpuncte hat, artet in ein System zweier Ebenen aus, die in eine zusammenfallen.

259. Indem wir eine Fläche des zweiten Grades als Aequatorialfläche betrachten, ist zugleich ein Durchmesser derselben bestimmt, der einer gegebenen Ebenen-Richtung zugeordnet ist; indem wir sie als Meridianfläche betrachten, ist unmittelbar ein Durchmesser derselben, der früheren Doppellinie entsprechend, gegeben.

260. In Folge der Bedingungs-Gleichung (61):

$$BE = CF$$

gehen die Aequatorial- und die Meridian-Fläche, welche OX bezüglich zum Durchmesser und zur Doppellinie haben, beide in Flächen zweiten Grades über. Wenn die doppelte Bedingungs-Gleichung:

$$AD = BE = CF \tag{70}$$

befriedigt wird, werden diese beiden Flächen identisch dieselben. Für ihre gemeinschaftliche Gleichung in Punct-Coordinaten können wir die folgende nehmen:

$$\frac{x^2}{D} + \frac{y^2}{E} + \frac{z^2}{F} + \frac{A}{EF} = 0 \tag{71}$$

und $\frac{A}{EF}$ auch mit $\frac{B}{DF}$ und $\frac{C}{DE}$ vertauschen.

Die doppelte Bedingungs-Gleichung (70) sagt in Verbindung damit, dass G, H, I, K, L, M verschwinden, aus, dass der Complex-Kegel und der Asymptoten-Kegel der Charakteristik, welche den Mittelpunct des Complexes zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, identisch werden. Allgemeiner, wenn die obigen sechs Constanten nicht verschwinden, erhalten wir aus den beiden Gleichungen (50) und (51), um diese Identität auszudrücken, die folgende fünffache Bedingungs-Gleichung:

$$\begin{aligned} & K^2 - EF : L^2 - DF : M^2 - DE : DK - LM : EL - KM : FM - KL \\ & = \quad A \quad : \quad B \quad : \quad C \quad : \quad G \quad : \quad H \quad : \quad I. \end{aligned} \tag{72}$$

Wenn aber die beiden genannten Kegel identisch werden, können wir jedes System zugeordneter Durchmesser derselben zu Coordinaten-Axen, jeden beliebigen Durchmesser als Axe OX nehmen. Die Aequatorialfläche und die Meridianfläche, welche einen beliebigen Durchmesser des Complexes bezüglich zu ihrem Durchmesser oder zu ihrer Doppellinie hat, sind identische Flächen des zweiten Grades.

Betrachten wir diejenigen beiden Meridianflächen, welche, bei der gewählten Coordinaten-Bestimmung, bezüglich OX und OY zur Doppellinie haben, so sind die Durchschnitte dieser beiden Flächen mit den drei Coordinaten-Ebenen identisch. Zunächst ist beiden Flächen die in XY liegende Complex-Curve gemeinsam. Aber auch die Durchschnitts-Curven in XZ und in YZ fallen zusammen, insofern die in jeder der beiden Coordinaten-Ebenen liegende Complex-Curve einmal Meridian-Curve der einen Meridianfläche, dann aber auch Breiten-Curve der mit der anderen Meridianfläche identischen Aequatorialfläche ist. In Folge dessen fallen sämmtliche Meridianflächen und Aequatorialflächen, welche einen beliebigen Durchmesser des Complexes bezüglich zu ihrer Doppellinie oder zu ihrem Durchmesser haben, in dieselbe Fläche zweiten Grades zusammen.

Alle Linien eines so particularisirten Complexes zweiten Grades, der nunmehr nur noch von neun Constanten abhängt, umhüllen eine Fläche des zweiten Grades. Wir können sagen, dass diese Fläche durch die Gleichung des Complexes dargestellt werde.

Erst dadurch, dass der allgemeine Complex einer zehnfachen Beschränkung unterworfen wird, geht derselbe in einen solchen über, dessen Linien eine Fläche zweiten Grades umhüllen. Diese Beschränkungen können wir geometrisch darin zusammenfassen, dass erstens alle Durchmesser des Complexes in demselben Puncte sich schneiden, und dass zweitens der

Complex-Kegel und der Asymptoten-Kegel der Charakteristik des Complexes, die diesen Punct zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, identisch dieselben sind. Der ersten Voraussetzung entsprechen fünf Bedingungs-Gleichungen, die sich in allgemeinster Form ergeben, wenn wir zwischen den acht Gleichungen, die wir durch Annullirung der acht letzten Coefficienten der auf den neuen Anfangspunct (x^0, y^0, z^0) bezogenen Complex-Gleichung (VI) erhalten, die drei Coordinaten x^0, y^0, z^0 eliminiren. Der zweiten Voraussetzung entsprechen die fünf Bedingungs-Gleichungen (72).

Wenn wir, in anderer Reihenfolge, dieselben Bedingungs-Gleichungen befriedigen, gelangen wir, durch andere Particularisationen, zu demselben Resultate.

261. Wir wollen uns nochmals zu der Gleichung (52) zurückwenden und diejenigen halben Durchmesser der Curven des Complexes in den drei Coordinaten-Ebenen YZ, ZX, XY, welche bezüglich in OY und OZ, OX und OZ, OZ und OY fallen, durch b_1 und c_1, a_2 und c_2, a_3 und b_3 bezeichnen. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} b_1^2 = -\frac{C}{D},\ c_1^2 = -\frac{B}{D}, \\ a_2^2 = -\frac{C}{E},\ c_2^2 = -\frac{A}{E}, \\ a_3^2 = -\frac{B}{F},\ b_3^2 = -\frac{A}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Dieselben sechs Grössen, in folgender Weise zusammengestellt:

$$b_3 \text{ und } c_2,\ a_3 \text{ und } c_1,\ a_2 \text{ und } b_1,$$

sind zugleich die, bezüglich in OY und OZ, OX und OZ, OX und OY fallenden Halbdurchmesser der Basen in YZ, XZ, XY derjenigen drei Complex-Cylinder, deren Seiten mit OX, OY, OZ parallel sind. Wir erhalten:

$$a_3^2\, b_1^2\, c_2^2 = a_2^2\, b_3^2\, c_1^2. \tag{74}$$

Wenn zwischen den sechs Constanten der Gleichung (69) die doppelte Bedingungs-Gleichung (70):

$$AD = BE = CF$$

besteht, schneiden die drei Complex-Curven in den drei Coordinaten-Ebenen die drei Coordinaten-Axen in denselben Puncten. Diese drei Complex-Curven fallen mit den Basen der drei Complex-Cylinder zusammen. Dann erhalten wir, wenn wir die Marken von a, b, c unterdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \frac{C}{E} &= \frac{B}{F} = -a^2, \\ \frac{C}{D} &= \frac{A}{F} = -b^2, \\ \frac{B}{D} &= \frac{A}{E} = -c^2. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Wir können eine der sechs Constanten der Complex-Gleichung (52) beliebig annehmen. Setzen wir:

$$C = a^2 b^2,$$

so geben die letzten Gleichungen:

$$A = b^2 c^2, \; B = a^2 c^2,$$
$$D = -a^2, E = -b^2, F = -c^2.$$

Die fragliche Gleichung geht alsdann in die folgende über:

$$b^2 c^2 r^2 + a^2 c^2 s^2 + a^2 b^2 = a^2 \sigma^2 + b^2 \varrho^2 + c^2 \eta^2. \tag{76}$$

Sie stellt einen Complex dar, dessen Linie eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunct umhüllen; sie stellt diese Fläche selbst dar.

Die Gleichung derselben Fläche in Punct-Coordinaten ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{77}$$

und in Ebenen-Coordinaten:

$$a^2 t^2 + b^2 u^2 + c^2 v^2 = w^2. \tag{78}$$

262. Um eine gegebene Fläche des zweiten Grades, für deren allgemeine Gleichung in Punct-Coordinaten wir die folgende nehmen wollen:

$$\begin{aligned} a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2 b'' xy + 2 b' xz + 2 b yz + 2 c x \\ + 2 c' y + 2 c'' z + d = 0, \end{aligned} \tag{79}$$

durch eine Complex-Gleichung darzustellen, brauchen wir bloss die Gleichung des der Fläche umschriebenen Kegels zu bestimmen, welcher irgend einen gegebenen Punct $(x'; y', z')$ zu seinem Mittelpuncte hat. Für diese Gleichung erhalten wir, wie bekannt*):

---

*) Die Gleichung des Textes leitet sich auf die folgende Weise ab.

Die Gleichung einer jeden Fläche zweiten Grades, die eine gegebene Fläche zweiten Grades:

$$\Omega = 0$$

längs der Durchschnitts-Curve mit einer Ebene:

$$p = 0$$

berührt, fällt unter die Form

$$\lambda \Omega - p^2 = 0,$$

wo λ eine willkürliche Constante bezeichnet. Für p ist hier die Polar-Ebene des Punctes (x', y', z') mit Bezug auf die gegebene Fläche (Ω) genommen, und λ ist so bestimmt, dass die neue Fläche durch den Punct (x', y', z') hindurch geht.

$$\begin{gathered}(ax^2+a'y^2+a''z^2+2b''xy+2b'xz+2byz+2cx+2c'y+2c''z+d)\\(ax'^2+a'y'^2+a''z'^2+2b''x'y'+2b'x'z'+2by'z'+2cx'+2c'y'+2c''z'+d)\\=[(ax+b''y+b'z+c)x'+(b''x+a'y+bz+c')y'+(b'x+by+a''z+c'')z'\\+(cx+c'y+c''z+d)]^2\end{gathered}\tag{80}$$

Die Gleichung dieses Kegels ist, wenn wir x', y', z' neben x, y, z als veränderlich betrachten, die Complex-Gleichung der Fläche. Wir können sie wirklich unter der allgemeinen Form schreiben:

$$\begin{gathered}A(x-x')^2+B(y-y')^2+C(z-z')^2\\+D(yz'-y'z)^2+E(x'z-xz')^2+F(xy'-x'y)^2\\+2G(y-y')(z-z')+2H(x-x')(z-z')+2I(x-x')(y-y')\\+2K(xy'-x'y)(x'z-xz')+2L(xy'-x'y)(yz'-y'z)+2M(x'z-xz')(yz'-y'z)\\+2N'(x-x')(yz'-y'z)+2O'(y-y')(x'z-xz')+2V'(z-z')(xy'-x'y)\\+2P(x-x')(x'z-xz')+2Q(x-x')(xy'-x'z)\\+2R(y-y')(xy'-x'y)+2S(y-y')(yz'-y'z)\\+2T(z-z')(yz'-y'z)+2U(z-z')(x'z-xz')=0,\end{gathered}$$

indem wir

$$\left.\begin{array}{lll}ad-c^2=A, & a'd-c'^2=B, & a''d-c''^2=C,\\ a'a''-b^2=D, & aa''-b'^2=E, & aa'-b''^2=F,\\ bd-c'c''=G, & b'd-cc''=H, & b''d-cc'=I,\\ b'b''-ab=K, & bb''-a'b'=L, & bb'-a''b''=M,\\ b''c''-b'c'=N', & bc-b''c''=O', & b'c'-bc=V',\\ b'c-ac''=P, & ac'-b''c=Q, & \\ b''c'-a'c=R, & a'c''-bc'=S, & \\ bc''-a''c'=T, & a''c-b'c''=U & \end{array}\right\}\tag{81}$$

setzen.

Dabei ist:

$$N'+O'+V'=0,\tag{82}$$

und:

$$\left.\begin{array}{l}N=N'-V'=b''c''-2b'c'+bc,\\ O=O'-V'=-b''c''+2bc-b'c'.\end{array}\right\}\tag{83}$$

263. Um die Fläche zweiten Grades zu bestimmen, wenn ihre Complex-Gleichung gegeben ist, erhalten wir aus den vorstehenden Gleichungen (81) unmittelbar eine Reihe solcher Relationen, in welche die Constanten der Gleichung des Complexes und der Fläche linear eingehen. Beispielsweise ergeben sich aus den sechs Gleichungen:

$$a'a'' - b^2 = D, \qquad aa'' - b'^2 = E, \qquad aa' - b''^2 = F,$$
$$b'b'' - ab = K, \qquad bb'' - a'b' = L, \qquad bb' - a''b'' = M$$

die folgenden sechs zur Bestimmung der Verhältnisse von a, a', a'', b, b', b'':

$$\left.\begin{aligned} aL + b'F + b''K &= 0\,, \\ aM + b'K + b''E &= 0\,, \\ a'M + b''D + bL &= 0\,, \\ a'K + b''L + bF &= 0\,, \\ a''K + bE + b'M &= 0\,, \\ a''L + bM + b'D &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

Wir unterlassen es, diese Relationen, aus denen sich durch Elimination der Grössen a, a' u. s. w. auch unmittelbar die Bedingungen ergeben, welche die Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung zu erfüllen haben, damit die Complexlinien eine Fläche des zweiten Grades umhüllen, vollständig hinzuschreiben.

264. So wie, wenn wir uns der Punct-Coordinaten x, y, z bedienen, die Gleichung der einer gegebenen Fläche zweiten Grades umschriebenen Kegelfläche, indem wir die Coordinaten x', y', z' seines Mittelpunctes ebenfalls als veränderlich betrachten, die Complex-Gleichung der Fläche in Strahlen-Coordinaten ist, so ist, wenn wir uns der Plan-Coordinaten t, u, v bedienen, die Gleichung der Durchschnitts-Curve einer Fläche zweiten Grades mit einer beliebigen schneidenden Ebene (t', u', v'), wenn wir die Coordinaten derselben ebenfalls als veränderlich betrachten, die Complex-Gleichung dieser Fläche in Axen-Coordinaten. In ganz analoger Weise, wie wir von der Complex-Gleichung einer gegebenen Fläche zweiten Grades in Strahlen-Coordinaten zu ihrer gewöhnlichen Gleichung in Punct-Coordinaten übergehen, können wir von der Complex-Gleichung derselben Fläche in Axen-Coordinaten sogleich zur Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten übergehen. Da überhaupt, wenn eine der beiden Gleichungen eines Complexes in Strahlen- und in Axen-Coordinaten gegeben ist, es beide zugleich sind, so ist in dem Vorstehenden auch der einfachste Weg angezeigt, um von einer der beiden Gleichungen einer Fläche zweiten Grades in Punct- und in Plan-Coordinaten zu der anderen derselben überzugehen.

265. Der Grund der Darstellbarkeit einer Fläche zweiten Grades durch eine Complex-Gleichung liegt in der Eigenschaft dieser Flächen, dass jede Ebene dieselbe in einer Curve der zweiten Classe schneidet und jeder

Punct für dieselbe der Mittelpunct eines Umhüllungs-Kegels der zweiten Ordnung ist.

Die Fläche kann einerseits in eine Kegelfläche, andererseits in eine ebene Curve ausarten. In beiden Fällen lässt sich dieselbe durch eine Gleichung zwischen Linien-Coordinaten darstellen.

In dem ersten Falle arten sämmtliche Complex-Kegel in Systeme von zwei Ebenen aus, welche die dargestellte Kegelfläche berühren. Alle durch den Mittelpunct der Fläche gehenden geraden Linien gehören dem Complexe an.

In dem zweiten Falle artet die Complex-Curve in einer beliebigen Ebene in ein System zweier Puncte aus, in denen die dargestellte Curve von der gegebenen Ebene geschnitten wird. Alle in der Ebene der Curve liegenden geraden Linien sind Linien des Complexes.

Während in Punct-Coordinaten sich eine ebene Curve, in Ebenen-Coordinaten sich eine Kegelfläche nicht durch eine Gleichung darstellen lässt, finden beide geometrische Gebilde ihre Darstellung in Linien-Coordinaten. Während aber eine Kegelfläche, durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen Punct-Coordinaten bestimmt, von der zweiten Ordnung, und eine ebene Curve, durch eine Gleichung zwischen Ebenen-Coordinaten gegeben, von der zweiten Classe ist, kann ein Complex zweiten Grades nur einen Kegel der zweiten Classe und eine Curve der zweiten Ordnung darstellen.

Ein Kegel zweiter Classe kann sich auflösen in zwei sich in seinem Mittelpuncte schneidende Axen; eine Curve zweiter Ordnung in zwei in ihrer Ebene liegende Strahlen. Kegel und Curve sind nach dieser Particularisation identisch dasselbe und finden, nach wie vor, ihre Darstellung in einer Gleichung zwischen Linien-Coordinaten.

Noch von einer anderen Seite kommen wir auf dieselbe Particularisation des Complexes zweiten Grades. Die Gleichung desselben kann sich in lineare Factoren auflösen und diese Factoren wiederum können der Bedingung genügen, Complexe ersten Grades von der besonderen Art darzustellen, deren sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden. Wenn die beiden auf diese Art dargestellten geraden Linien durch denselben Punct hindurchgehen, oder, was dasselbe heisst, in derselben Ebene liegen, so haben wir einmal den particularisirten Kegel zweiter Classe, das andere Mal die particularisirte Curve zweiter Ordnung.

§ 3.

Die unendlich weit liegenden Linien des Complexes. Eintheilung der Complexe nach diesen Linien.

266. Wenn wir in einer gegebenen Ebene eine gerade Linie beliebig annehmen und, parallel mit sich selbst, immer weiter fortrücken lassen, so verliert sie in unendlicher Entfernung jede Spur ihrer ursprünglichen Richtung in der Ebene. Auch können wir an die Stelle der gegebenen Ebene, welche die unendlich weit gerückte Linie enthielt, jede andere Ebene setzen, die derselben parallel ist. Alle in parallelen Ebenen unendlich weit liegenden geraden Linien fallen im Unendlichen in eine einzige zusammen. Die unendlich weit gerückte gerade Linie ist der Durchschnitt unendlich vieler parallelen Ebenen. Sie hat, im Unendlichen, keine andere Beziehung zum Endlichen behalten, als dass sie einer gegebenen Ebenen-Richtung, einer gegebenen Ebene, parallel ist.

Wenn eine gegebene Ebene, parallel mit sich selbst, immer weiter fortrückt, so verliert sie ihrerseits ihre Richtung. Eine unendlich weit entfernte Ebene ist als jeder gegebenen Ebene parallel zu betrachten. Die in ihr liegenden geraden Linien haben jede Beziehung zum Endlichen und somit jede Bedeutung im gewöhnlichen Sinne verloren.

Diese geometrischen Anschauungen finden ihren unmittelbaren analytischen Ausdruck. Damit eine gerade Linie:

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

in einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0,$$

enthalten sei, ergeben sich die folgenden drei Relationen:

$$tr + us + v = 0,$$
$$t\varrho + u\sigma + w = 0,$$
$$t\eta + v\sigma - ws = 0.$$

Wenn die gerade Linie in der gegebenen Ebene unendlich weit liegt, sind ϱ und σ, und, in Folge davon, auch $\eta \equiv r\sigma - s\varrho$ unendlich gross. Dann geben die beiden letzten der vorstehenden Gleichungen:

$$t : u : v = -\sigma : \varrho : \eta,$$

während die erste Gleichung bloss ausdrückt, dass die unendlich weit gerückte gerade Linie der gegebenen Ebene parallel ist.

Wenn die gegebene Ebene unendlich weit rückt, wird w unendlich gross, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es verschwinden t, u und v. Ihre Gleichung drückt dann ihre Richtung nicht mehr aus und die vorstehenden drei Relationen verlieren ihre Bedeutung.

267. Wenn wir wiederum für die allgemeine Gleichung der Complexe des zweiten Grades die folgende nehmen:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Irs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0, \end{gathered} \qquad (I)$$

und in derselben ϱ, σ, η unendlich gross werden lassen und demnach gegen diese drei Veränderlichen die beiden übrigen, r und s, sowie constante Grössen und endlich gegen zweite Potenzen der erstgenannten drei Veränderlichen erste Potenzen derselben vernachlässigen, so ergibt sich für solche Linien des Complexes, welche unendlich weit liegen:

$$D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma = 0. \qquad (85)$$

Diese Gleichung stellt, wie jede Gleichung in Linien-Coordinaten, einen Complex dar. Wir wollen denselben den Asymptoten-Complex des gegebenen Complexes nennen. Dieser Complex subsumirt sich, nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen, unter diejenigen, welche einen Kegel zweiter Classe darstellen. Der Mittelpunct dieser Kegelfläche fällt mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammen und ihr Durchschnitt mit der unendlich weit liegenden Ebene ist die in dieser Ebene von Linien des Complexes umhüllte Curve zweiter Classe.

Ein jeder Complex des zweiten Grades, in dessen Gleichung die Glieder zweiter Ordnung in ϱ, σ, η mit denselben Constanten D, E, F, K, L, M multiplicirt vorkommen, wie in der Gleichung des gegebenen Complexes, stellt mit gleicher Genauigkeit die im Unendlichen liegenden Linien des gegebenen Complexes dar, als derjenige Complex, dessen Gleichung die vorstehende (85) ist. Es ist der Asymptoten-Complex, der seinerseits wieder zu allen solchen Complexen in gleicher Beziehung, wie zu dem gegebenen, steht, unter ihnen durch die Einfachheit seiner Gleichung und, dem entsprechend, sowohl durch die übersichtliche Gruppirung seiner Linien als durch eine besondere Lage zu dem Coordinaten-Systeme ausgezeichnet.

Der Grad der Annäherung, mit welcher der Asymptoten-Complex die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes darstellt, ist nur der erste, insofern seine Gleichung mit der des gegebenen einzig in den Gliedern zweiter Ordnung der in Betracht kommenden Veränderlichen, nicht aber auch in denen erster Ordnung, übereinstimmt.

268. Wenn wir in der Gleichung (85) für $-\sigma$, ϱ, η bezüglich die obigen Werthe t, u, v, welche diese Coordinaten für unendlich weit entfernte gerade Linien annehmen, einsetzen, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu = 0,$$

zur Bestimmung derjenigen Ebenen-Richtungen, nach welchen Linien des Complexes unendlich weit liegen. Legen wir durch den Coordinaten-Anfangspunct Ebenen, welche diese Richtung haben, so umhüllen dieselben eine Kegelfläche zweiter Classe, dieselbe Kegelfläche, welche durch die Gleichung (85) in Linien-Coordinaten dargestellt wird. Wir können die Kegelfläche und mit ihr den Asymptoten-Complex beliebig parallel mit sich selbst verschieben, ohne die Beziehung zu dem gegebenen Complex zu ändern. Denn bei einer solchen Verschiebung bleiben nach den Coordinaten-Transformationsformeln der 157. Nummer die Coefficienten D, E, F, K, L, M, auf die es hier einzig ankommt, ungeändert. Bei der Verschiebung rücken die Tangential-Ebenen der Kegelfläche parallel mit sich selbst fort. Alle unter sich parallelen Tangential-Ebenen schneiden sich auf einer Linie des gegebenen Complexes, welche unendlich weit liegt.

Wir haben in dem ersten Paragraphen dieses Abschnitts als Characteristik eines Complexes eine Fläche zweiter Classe bezeichnet, deren Mittelpunct und absolute Dimensionen beliebig angenommen werden können, und die, wenn wir ihren Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten legen und durch k eine willkürliche Constante bezeichnen, durch die folgende Gleichung dargestellt wird:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + Mtu + kw^2 = 0.$$

Nach dem Vorstehenden liegen die unendlich weit entfernten Linien des Complexes in den Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels der Characteristik, und dieser Asymptoten-Kegel wird durch die Gleichung (85) in Linien-Coordinaten dargestellt. Eine Ebene, die wir unendlich weit rücken lassen, aber so, dass sie ihre ursprüngliche Richtung noch nicht verliert, schneidet diesen Asymptoten-Kegel, und also auch die Characteristik selbst, nach einer Curve, die von unendlich weit liegenden Linien des Complexes umhüllt wird. Es kommt hierbei auf eine endliche Verschiebung der Characteristik und ihres Asymptoten-Kegels nicht an.

269. Wir können uns der unendlich weit entfernten Ebene, von der wir kaum eine geometrische Vorstellung haben, auf unendlichfach verschiedene Weise nähern, indem wir von einer Ebene mit gegebener Richtung ausgehen, die, diese Richtung beibehaltend, immer weiter fortrückt. In einer solchen beliebigen Ebene liegt einerseits eine Complex-Curve zweiter Classe, andererseits als Durchschnitt mit der Characteristik eine zweite solche Curve: die beiden Curven fallen, wenn ihre Ebene unendlich weit rückt, zusammen; mit anderen Worten, die Curven der sämmtlichen Aequatorialflächen eines gegebenen Complexes in Breiten-Ebenen, die unendlich weit gerückt sind, liegen auf der Characteristik.

Während die Ebene von gegebener Richtung fortrückt, ändert sich in ihr fortwährend die Complex-Curve, welche die Aequatorialfläche beschreibt. Die Richtung der beiden Axen der Curve und ihr Verhältniss nähern sich, wenn die Ebene immer weiter rückt, der Richtung der Ebene entsprechend, einer bestimmten Grenze. Diese Grenze ist gegeben durch die constante Richtung und das constante Verhältniss der Axen der Durchschnitts-Curve der fortrückenden Ebene mit der Characteristik. Da in unendlicher Entfernung Complex-Curven und Durchschnitts-Curven der Characteristik, welche in parallelen Ebenen enthalten sind, zusammenfallen, muss der Durchmesser der bezüglichen Aequatorialfläche des gegebenen Complexes mit demjenigen Durchmesser der Characteristik parallel sein, welcher der parallel mit sich selbst fortrückenden Ebene zugeordnet ist, wie das die analytischen Entwicklungen des ersten Paragraphen bestätigen.

Es bezeichnen die vorstehenden geometrischen Anschauungen die Beziehungen zwischen dem gegebenen Complexe und seiner Characteristik. In Uebereinstimmung mit denselben erhalten wir aus den Gleichungen (7) der 166. Nummer für die drei Complex-Curven in solchen Ebenen, welche den beliebig angenommenen Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY parallel unendlich weit gerückt sind, indem wir erste Potenzen von x, y, z und Constante gegen zweite Potenzen derselben vernachlässigen, die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Dw^2 + 2Lxvw + Fx^2v^2 + 2Mxuw + 2Kx^2uv + Ex^2u^2 = 0, \\ Ew^2 + 2Mytw + Dy^2t^2 + 2Kyvw + 2Ly^2tv + Fy^2v^2 = 0, \\ Fw^2 + 2Kzuw + Ez^2u^2 + 2Lztw + 2Mz^2tu + Dz^2t^2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

die mit den Gleichungen der Durchschnitts-Curven der drei fraglichen Ebenen mit dem Asymptotenkegel der Characteristik zusammenfallen.

270. Die Kegelfläche der zweiten Classe, welche von den Linien des Asymptoten-Complexes umhüllt wird, kann reell oder imaginär sein, und dementsprechend schliesst der gegebene Complex zweiten Grades entweder solche reelle Linien ein, welche unendlich weit liegen, oder nicht. Danach zerfallen die allgemeinen Complexe des zweiten Grades in zwei coordinirte Arten. Complexe der ersten Art wollen wir hyperboloidische, Complexe der zweiten Art ellipsoidische nennen. Wir sehen bei dieser Eintheilung zunächst von allen solchen Complexen ab, deren Asymptoten-Complex sich irgendwie particularisirt hat.

Hyperboloidische Complexe haben eine Characteristik mit einem reellen Asymptotenkegel, und werden demnach analytisch dadurch bezeichnet, dass nur zwei der drei Ausdrücke:

$$D - \frac{LM}{K}, \qquad E - \frac{MK}{L}, \qquad F - \frac{KL}{M}$$

Werthe mit gleichem Vorzeichen haben.

Ellipsoidische Complexe haben eine Characteristik, deren Asymptoten-Kegel sich auf einen ellipsoidischen Punct reducirt; die obigen drei Ausdrücke haben für solche Complexe Werthe, die alle drei im Zeichen übereinstimmen.

271. In hyperboloidischen Complexen bestimmen die Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels der Characteristik die Richtungen derjenigen Ebenen, nach welchen Linien des Complexes unendlich weit liegen. Die Complex-Curven in solchen Ebenen sind Parabeln, welche die unendlich weit liegenden Linien berühren. Bewegt sich eine solche Ebene parallel mit sich selbst, so beschreibt die in ihr liegende, von Linien des Complexes umhüllte Parabel eine parabolische Aequatorialfläche (n. 232). Die Seite, nach welcher der Asymptoten-Kegel der Characteristik von einer Breiten-Ebene der Fläche berührt wird, bestimmt die Richtung, welcher die Richtung der Axe der Parabel sich fortwährend nähert, wenn die Ebene derselben immer weiter fortrückt, was in zweifachem Sinne geschehen kann.

Jede andere Ebenen-Richtung, nach der keine Linie des Complexes unendlich weit liegt, bestimmt eine Aequatorialfläche, deren Breiten-Curven einen Mittelpunct besitzen. Hier heben wir zunächst nur hervor, dass, bei zunehmender Entfernung einer parallel mit sich selbst fortrückenden Ebene die Complex-Curve in ihr entweder eine Hyperbel oder eine Ellipse ist, je nachdem die Ebene den Asymptoten-Kegel in einer Hyperbel oder einer Ellipse schneidet.

Durch eine gegebene gerade Linie lassen sich im Allgemeinen zwei Ebenen legen, in denen eine Linie des hyperboloidischen Complexes unendlich weit liegt. Nehmen wir irgend einen Punct der gegebenen geraden Linie als Mittelpunct des Asymptoten-Kegels der Characteristik, so sind die beiden Tangential-Ebenen, welche durch die gegebene Linie an diesen Kegel sich legen lassen, die beiden fraglichen Ebenen. Sie sind reell oder imaginär, je nachdem die Linie ausserhalb oder innerhalb des Kegels liegt, und fallen, wenn die Linie eine Seite des Kegels ist, in eine Tangential-Ebene desselben zusammen. Dem entsprechend können unter den Meridian-Curven einer Meridianfläche eines hyperboloidischen Complexes zwei Parabeln auftreten. Dieselben können auch zusammenfallen. Es hängt das ab von der Richtung der Doppellinie der Meridianfläche in Beziehung auf den Asymptoten-Kegel der Characteristik des Complexes.

Die der Doppellinie einer Meridianfläche parallelen Linien des Complexes bilden einen der Meridianfläche umschriebenen Complex-Cylinder. Dieser Cylinder ist ein hyperbolischer oder ein elliptischer*), je nachdem die beiden Meridian-Ebenen, in welchen parabolische Complex-Curven liegen, reell oder imaginär sind. Fallen die beiden Ebenen in eine zusammen, so wird der Complex-Cylinder ein parabolischer.

Nach dem Vorstehenden sind also die von den Linien eines hyperboloidischen Complexes gebildeten Cylinder elliptische oder hyperbolische, je nachdem die Richtung der sie erzeugenden Complex-Linien in den Asymptoten-Kegel der Characteristik hineinfällt, oder nicht. Alle Complex-Cylinder, deren Erzeugende einer Seite des Asymptoten-Kegels parallel sind, sind parabolische.

272. In ellipsoidischen Complexen gibt es überhaupt keine parabolischen Complex-Curven. Alle Aequatorialflächen sind zwischen zwei in endlichem Abstande von einander befindliche Ebenen eingeschlossen. Diese Ebenen bezeichnen den Uebergang von solchen Ebenen, in welchen eine reelle Complex-Curve liegt, zu solchen, in denen eine imaginäre Curve von Linien des Complexes umhüllt wird.

*) Wir verstehen hier und im Folgenden unter einem hyperbolischen und einem elliptischen Cylinder einen solchen, der von der unendlich weit entfernten Ebene bezüglich in zwei reellen oder in zwei imaginären geraden Linien geschnitten wird. Danach wird auch der imaginäre Cylinder als ein elliptischer bezeichnet. Insbesondere kann sich der hyperbolische und der elliptische Cylinder in das System zweier sich schneidender, bezüglich reeller oder imaginärer Ebenen auflösen.

Wenn die beiden Durchschnittslinien mit der unendlich entfernten Ebene in eine gerade Linie zusammenfallen, heisst der Cylinder ein parabolischer, auch wenn er sich in ein System zweier paralleler, reeller oder imaginärer, Ebenen particularisirt.

Unter den Meridian-Curven einer beliebigen, dem Complexe angehörigen Meridianfläche finden sich keine Parabeln. Die beiden Meridian-Ebenen, in welchen in dem Falle hyperboloidischer Complexe Parabeln von den Linien des Complexes umhüllt werden, sind bei ellipsoidischen Complexen unabhängig von der Richtung der Doppellinie imaginär. In Folge dessen sind sämmtliche Cylinder, welche von Linien eines ellipsoidischen Complexes gebildet werden, elliptische Cylinder.

273. Wir haben in der 163. Nummer für die Gleichung einer solchen Aequatorialfläche, deren Breiten-Curven der Ebene YZ parallel sind, in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten x, u, v, w, die folgende erhalten:

$$Dw^2 + 2(Lx - S)vw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2$$
$$+ 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \quad (87)$$

Diese Gleichung enthält dreizehn Constante, welche mit den zwei Constanten, durch welche das Coordinaten-System particularisirt ist, die fünfzehn Constanten geben, von denen die Aequatorialfläche abhängt.

Wenn wir die Axe OX so bestimmen, dass sie dem Durchmesser des Complexes, welcher der zu YZ genommenen beliebigen Ebene zugeordnet ist, parallel läuft, so verschwinden die Constanten L und M; wenn sie mit diesem Durchmesser zusammenfällt, so verschwinden gleichzeitig S und T. Es verschwindet K, wenn wir in YZ den beiden Axen OY und OZ eine solche Richtung geben, dass die drei Coordinaten-Axen dreien zugeordneten Durchmessern des Complexes parallel sind. Durch diese Coordinaten-Bestimmung verliert die allgemeine Gleichung der Aequatorialfläche fünf weitere ihrer Constanten, indem sie in die folgende übergeht:

$$Dw^2 + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 - 2(Ox + G)uv$$
$$+ (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \quad (88)$$

Wenn wir die Coordinaten-Ebene YZ parallel mit sich selbst verschieben, bis sie durch den Mittelpunct des Complexes geht, so reducirt sich die Anzahl der Constanten, in Gemässheit der Bedingungs-Gleichung (36):

$$ER = FU,$$

um eine sechste Einheit.

274. Für ellipsoidische Complexe sind alle Aequatorialflächen durch eine Gleichung von der Form der letzten, (88), darstellbar, wie wir auch die Richtung der Ebene YZ wählen mögen. Wenn wir aber bei hyperboloidischen Complexen insbesondere die Breiten-Ebenen der Aequatorialfläche einer Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels der Characteristik parallel

nehmen, so ist der zugeordnete Durchmesser der Characteristik diesen Ebenen parallel und in Folge dessen die vorstehende Coordinaten-Bestimmung nicht mehr möglich. Dann verliert die allgemeine Gleichung der Aequatorialfläche (87) die Constante D, so dass die Fläche nur noch von vierzehn Constanten abhängt. Solche Aequatorialflächen haben wir parabolische genannt.

Dem Verschwinden von D entspricht, dass die Ebene YZ eine Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels der Characteristik ist, als deren Mittelpunct wir den Coordinaten-Anfangspunct genommen haben. Wir wollen die Axe OZ mit derjenigen Seite des Asymptoten-Kegels zusammenfallen lassen, nach welcher derselbe von der Ebene YZ berührt wird. Dann verschwindet in der Gleichung der Aequatorialfläche die Constante M. Im allgemeinen Falle sind die Coordinaten des Mittelpunctes einer beliebigen Breiten-Curve:

$$y = -\frac{Mx + T}{D}, \qquad z = -\frac{Lx - S}{D}.$$

Wenn D verschwindet, rückt der Mittelpunct in der Ebene der Curve unendlich weit, und die Richtung, nach welcher er unendlich weit liegt, ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Mx + T}{Lx - S}$$

bestimmt, in welcher α den Winkel bezeichnet, den diese Richtung, die Axen-Richtung der Parabel, mit OZ bildet. Für die unendlich weit liegende Parabel kommt:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{M}{L}$$

Wenn M verschwindet, ist diese Axen-Richtung mit der Axe OZ parallel.

Die Richtung der Axe OY ist bisher noch unbestimmt geblieben. Wir können dieselbe in YZ senkrecht gegen OZ nehmen. Wenn wir dann durch OY eine zweite Tangential-Ebene an den Asymptoten-Kegel legen und dieselbe als Ebene XY und die Seite des Asymptoten-Kegels, nach welcher sie berührt wird, als Axe OX nehmen, so verschwinden aus der Gleichung der Aequatorialfläche die zwei Constanten F und K. Dann schreibt sich die Gleichung der Fläche unter der folgenden Form:

$$\begin{aligned} 2(Lx - S)vw - (2Rx - B)v^2 + 2Tuw \\ - 2(Ox + G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0. \end{aligned} \qquad (89)$$

Aus dieser Gleichung können wir durch schickliche Wahl des Anfangspunctes noch weitere drei Constante fortschaffen.

275. Wenn sich der Ausdruck:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu,$$

entsprechend der Bedingungs-Gleichung:

$$DEF - DK^2 - EL^2 - FM^2 + 2KLM = 0, \qquad (90)$$

in zwei Factoren des ersten Grades auflöst, so particularisirt sich der Complex, indem er eine seiner neunzehn Constanten verliert.

Die vorstehende Bedingungs-Gleichung kommt darauf hinaus, dass, wenn wir durch eine schickliche Annahme der Richtung der drei Coordinaten-Axen, wie früher, K, L, M verschwinden lassen, dadurch zugleich eine der drei Constanten D, E, F verschwindet. Ist D die verschwindende Constante, so wird die Gleichung des Complexes:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{gathered} \qquad (91)$$

Aus dieser Gleichung, bei welcher wir, unbeschadet der Allgemeinheit, das Coordinaten-System als ein rechtwinkliges annehmen wollen, können wir noch weitere drei Constanten durch die Bestimmung des Anfangspunctes der Coordinaten fortschaffen. Wesentlich bei den folgenden Betrachtungen ist, dass durch die Wahl der Richtung der Coordinaten-Axen ausser D nicht auch noch eine andere der Constanten D, E, F verschwindet.

276. Wir haben durch die Gleichung:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu + kw^2 = 0$$

die Characteristik des Complexes dargestellt. Diese Characteristik ist in dem allgemeinen Falle der hyperboloidischen und ellipsoidischen Complexe eine Fläche des zweiten Grades mit einem Mittelpuncte. Der Mittelpunct dieser Fläche und ihre absoluten Dimensionen, die von der willkürlichen Constante k abhängen, können beliebig angenommen werden. In dem Falle der Complexe besonderer Art, die wir jetzt betrachten und die wir durch die Gleichung (91) dargestellt haben, reducirt sich die Characteristik auf eine Curve zweiten Grades mit einem Mittelpuncte. Wir wollen diese Curve die characteristische Curve des Complexes besonderer Art nennen.

Durch die Ebene der characteristischen Curve ist eine ausgezeichnete Ebenen-Richtung für den Complex gegeben. Nehmen wir dieselbe der Coordinaten-Ebene YZ parallel, so verschwinden D, L, M und die Gleichung der Curve geht in die folgende über:

$$Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + kw^2 = 0.$$

Wenn wir zwei zugeordnete Durchmesser der Curve, insbesondere die beiden Axen derselben, zu Coordinaten-Axen OY und OZ nehmen, so verschwindet K, und dann sind die Coordinaten-Axen dieselben, auf welche der Complex in der Gleichung (91) bezogen ist.

277. Wir haben die Bestimmung der Richtung der zugeordneten Durchmesser eines Complexes der allgemeinen Art auf die Betrachtung der Durchmesser seiner characteristischen Fläche zurückgeführt. Die characteristische Curve eines Complexes der besonderen Art können wir als die Grenze von characteristischen Flächen ansehen, und, in Folge davon, sagen, dass von zwei zugeordneten Durchmessern der Curve jeder zugleich allen Ebenen zugeordnet ist, welche nach beliebiger Richtung durch den jedesmaligen anderen gelegt werden können; dass jede durch den Mittelpunct der Curve hindurchgehende gerade Linie, welche nicht in der Ebene derselben liegt, dieser Ebene zugeordnet sei, und endlich, dass eine beliebige solche gerade Linie und zwei zugeordnete Durchmesser der Curve ein System dreier zugeordneter Durchmesser der Curve bilden.

Diese Relationen übertragen sich unmittelbar auf Complexe der besonderen Art. Einer gegebenen Ebene entspricht ein Durchmesser des Complexes, welcher der Ebene der characteristischen Curve parallel ist und dieser Ebene parallel bleibt, wie auch die Richtung der gegebenen Ebene sich ändern mag; oder, mit anderen Worten, die Durchmesser aller Aequatorialflächen des Complexes sind der Ebene seiner characteristischen Curve parallel.

Wenn sich die gegebene Ebene um ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der characteristischen Curve dreht, so rückt der zugeordnete Durchmesser des Complexes parallel mit sich selbst fort. Es gibt also unendlich viele unter sich parallele Durchmesser des Complexes. Wenn endlich die sich drehende Ebene mit der Ebene der characteristischen Curve zusammenfällt, so wird der Durchmesser unbestimmt. Er verliert seine Richtung, indem er unendlich weit rückt.

In dem allgemeinen Falle der hyperboloidischen und ellipsoidischen Complexe haben wir gezeigt, dass je zwei conjugirte Durchmesser von der Axe desjenigen Complex-Cylinders geschnitten werden, dessen Seiten dem dritten conjugirten Durchmesser parallel sind. In dem Falle der besonderen Complexe, die wir hier betrachten, ist jedesmal der dritte conjugirte Durchmesser unendlich weit gerückt. Aber nach wie vor bestimmen je zwei beliebige, der Central-Ebene parallele, conjugirte Durchmesser durch den Durchschnitt ihrer zugeordneten Ebenen die Richtung der Seiten eines Complex-Cylinders, dessen Axe die beiden Durchmesser schneidet. Wir sagen, dass dieser Cylinder und insbesondere seine Axe dem Systeme der beiden Durchmesser zugeordnet sei.

278. Zur Bestätigung und Erweiterung dieser Resultate wollen wir zu den Gleichungen (5) zurückgehen, welche in dem allgemeinen Falle der Complexe den Durchmesser darstellen, der einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

zugeordnet ist. Diese Gleichungen reduciren sich, wenn wir die Gleichung der Complexe besonderer Art, (91), zu Grunde legen und x', y', z' in der früheren Bedeutung beibehalten, auf:

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= 0, \\ y - y' &= \frac{Eu}{Eu^2 + Fv^2}, \\ z - z' &= \frac{Fv}{Eu^2 + Fv^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Danach ist:

$$(y - y')\,Fv = (z - z')\,Eu. \qquad (93)$$

Der Durchmesser ist, in Gemässheit mit der ersten der drei Gleichungen (92), der Ebene YZ parallel. Die Gleichung (93), in folgender Weise geschrieben:

$$\frac{y - y'}{z - z'} \cdot \frac{v}{u} = \frac{E}{F} \qquad (94)$$

drückt unmittelbar aus, dass der Durchschnitt der gegebenen Ebene YZ und der dieser Ebene zugeordnete Durchmesser des Complexes die Richtung zweier zugeordneter Durchmesser der characteristischen Curve haben, die, nach dem Verschwinden von K, durch die Gleichung:

$$Eu^2 + Fv^2 + kw^2 = 0$$

dargestellt wird.

Die Werthe für x', y', z', welche wir den Gleichungen (92) zu Grunde gelegt haben, sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{Ouv + Rv^2 + Stv - Ttu - Uu^2}{Eu^2 + Fv^2}, \\ y' &= \frac{-Ntv - Puv - Qv^2 + Tt^2 + Utu}{Eu^2 + Fv^2}, \\ z' &= \frac{(N - O)tu + Pu^2 + Quv - Rtv - St^2}{Eu^2 + Fv^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Der Abstand x' des Durchmessers von der Ebene YZ bleibt also für alle Ebenen derselbe, deren Coordinaten die folgende Gleichung befriedigen:

$$(Eu^2 + Fv^2)x' = Ouv + Rv^2 + Stv - Ttu - Uu^2. \tag{95}$$

Alle solche Ebenen umhüllen eine unendlich weit liegende Curve der zweiten Classe. Indem in der vorstehenden Gleichung das Glied mit t^2 fehlt, berührt diese Curve, unabhängig von der Annahme von x', die in YZ unendlich weit liegende gerade Linie. Für den Berührungspunct erhalten wir:

$$Sv - Tu = 0. \tag{96}$$

In dieser Gleichung kommt x' nicht mehr vor. Es ist durch dieselbe eine für den Complex ausgezeichnete Richtung bestimmt.

Wenn u und v gleichzeitig verschwinden, werden die Coordinaten des Punctes x', y', z', durch welchen die Lage des Durchmessers bestimmt wird, unendlich gross. Dabei verliert der Durchmesser, wie die Gleichungen (92) zeigen, in unendlicher Entfernung seine Richtung. Aber der Quotient $\frac{y'}{z'}$ behält einen endlichen und bestimmten Werth. Wir erhalten aus (4), indem wir u und v verschwinden lassen:

$$\frac{y'}{z'} = -\frac{T}{S}. \tag{97}$$

Der Durchmesser ist also in der durch die vorstehende Gleichung bezeichneten Richtung parallel zu YZ unendlich weit gerückt. Diese Richtung fällt mit derjenigen zusammen, welche wir durch die Gleichung (96) bestimmt haben. Wir können sagen, dass die unendlich vielen Durchmesser, welche im Complexe der Ebene der characteristischen Curve zugeordnet sind, diese Ebene in demselben unendlich weit liegenden Puncte schneiden. Dieser Punct ist der Mittelpunct der in der Ebene der characteristischen Curve von Linien des Complexes umhüllten Curve, und bleibt unverändert, wenn die Ebene parallel mit sich fortrückt. Wir werden in den folgenden Nummern die analytische Bestätigung für diese geometrische Folgerung erhalten.

279. Für die Durchschnitte der beiden, den Coordinateu-Ebenen XZ und XY zugeordneten, mit OY und OZ parallelen Durchmesser mit diesen beiden Coordinaten-Ebenen erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{ll} x = -\dfrac{U}{E}, & x = \dfrac{P}{E}, \\[2ex] x = \dfrac{R}{F}, & y = -\dfrac{Q}{F}. \end{array}\right\} \tag{98}$$

Setzen wir: $P = 0, \qquad Q = 0,$

so verschieben wir die Ebenen XZ und XY so, dass, nach der Verschiebung, die beiden diesen Ebenen zugeordneten Durchmesser die Axe OX schneiden.

Von den Gleichungen-Paaren (18) der 240. Nummer, durch welche überhaupt die Axen der drei Complex-Cylinder, deren Seiten den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel sind, dargestellt werden, zeigt das erste:

$$y = -\frac{Q}{F}, \qquad z = \frac{P}{E}, \tag{99}$$

dass eine der drei Cylinder-Axen mit OX zusammenfällt. Die beiden anderen Gleichungen-Paare geben:

$$\left.\begin{array}{ll} x = \dfrac{R}{F}, & z = \infty, \\ x = -\dfrac{U}{E}, & y = \infty. \end{array}\right\} \tag{100}$$

Es sind also die beiden anderen Cylinder-Axen in denselben zu YZ parallelen Ebenen, in welchen die beiden zugeordneten Durchmesser liegen, unendlich weit gerückt.

Von den drei Coordinaten des Mittelpunctes des Centralparallelepipeds, dessen Kanten bezüglich OX, OY, OZ parallel sind, für welche wir in dem allgemeinen Falle erhalten haben:

$$x^0 = \frac{ER - FU}{2EF}, \quad y^0 = -\frac{DQ - FT}{2DF}, \quad z^0 = \frac{DP - ES}{2DE}, \tag{21}$$

bleibt nur x^0 endlich und vollkommen bestimmt, während y^0 und z^0 unendlich gross werden. Das Verhältniss zwischen y^0 und z^0 bleibt ein bestimmtes. Wir erhalten für dasselbe:

$$\frac{y^0}{z^0} = -\frac{T}{S}. \tag{101}$$

Durch diese Gleichung wird dieselbe für den Complex ausgezeichnete Richtung bestimmt, welche wir in der vorigen Nummer erhalten haben (97).

Der Mittelpunct des Centralparallelepipeds, welches wir ausgewählt haben, liegt in einer nicht nur der Richtung, sondern auch der Lage nach bestimmten Ebene in dem durch die Gleichung (101) bestimmten Sinne unendlich weit. Wenn wir die Axe OX als eine Seite des Centralparallelepipeds beibehalten und OY und OZ beliebig zweien conjugirten Durchmessern der characteristischen Curve parallel nehmen, so erhalten wir eine Reihe von Centralparallelepipeden. Dieselben Betrachtungen, welche wir in der 246. Nummer in dem Falle der hyperboloidischen und ellipsoidischen Complexe angestellt haben, zeigen hier, dass der Mittelpunct aller dieser

Centralparallelepipede in derselben Richtung und in derselben zu der Ebene der characteristischen Curve parallelen Ebene unendlich weit gerückt sind.

Wenn wir an Stelle der Axe OX eine andere Cylinder-Axe des Complexes wählen, so erhalten wir eine neue Reihe von Centralparallelepipeden. Der Mittelpunct aller dieser Parallelepipede ist in derselben Richtung, wie vorhin, parallel mit der Ebene der characteristischen Curve unendlich weit gerückt, indem die Bestimmung dieser Richtung von der Wahl der Coordinaten-Axe OX unabhängig war. Dagegen ist die Ebene, in welcher der Mittelpunct des Parallelepipeds unendlich weit gerückt ist, im Allgemeinen eine andere geworden. Denn wenn wir irgend zwei conjugirte Durchmesser des Complexes auswählen und den einen durch einen anderen, ihm parallelen, ersetzen, so ändert sich dabei die in der Mitte zwischen den beiden conjugirten Durchmessern hindurch gehende Central-Ebene.

Wir sind so zu den folgenden Sätzen gekommen:

In den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, ist der Mittelpunct parallel mit der Ebene der characteristischen Curve nach gegebener Richtung:

$$\frac{y}{z} = \frac{y_0}{z_0} = -\frac{T}{S}$$

unendlich weit gerückt.

Alle Central-Parallelepipeda, welche dieselbe im Endlichen liegende Cylinder-Axe zu einer ihrer Kanten haben, besitzen parallel zu der Ebene der characteristischen Curve dieselbe Central-Ebene.

280. Für die Gleichung des Complexes der besonderen Art erhalten wir, wenn wir die Axe irgend eines seiner Cylinder mit der Coordinaten-Axe OX zusammen fallen lassen und OY und OZ irgend zweien Durchmessern der characteristischen Curve parallel annehmen, die folgende:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{aligned} \tag{102}$$

Wir können noch die Bedingungs-Gleichung

$$ER = FU \tag{103}$$

hinzufügen, und bestimmen damit, dass die der Axe OX zugehörige Central-Ebene mit der Coordinaten-Ebene YZ zusammenfällt. Endlich können wir nach Belieben S oder T verschwinden lassen, indem wir eine der beiden Axen OY, OZ der durch die Gleichung (101) bestimmten Richtung parallel nehmen.

Unter Berücksichtigung dieser Vereinfachungen enthält die Gleichung (102) elf von einander unabhängige Constanten. Wenn wir zu denselben die sieben Constanten hinzuzählen, durch welche das Coordinaten-System particularisirt ist, so erhalten wir die achtzehn Constanten des Complexes der besonderen Art.

281. Der Asymptoten-Kegel der characteristischen Fläche eines Complexes der allgemeinen Art wird bei Complexen der besonderen Art, die wir hier betrachten, durch die beiden Asymptoten der characteristischen Curve vertreten.

In dem Falle der allgemeinen Complexe bestimmt die Curve, nach welcher eine gegebene Ebene den Asymptoten-Kegel schneidet, die Natur der Complex-Curve in derjenigen Ebene, welche parallel mit der gegebenen unendlich weit gerückt ist. In Complexen der besonderen Art löst sich diese Curve in die beiden Durchschnittspuncte der gegebenen Ebene mit den Asymptoten auf. Es artet also in der unendlich weit gerückten Ebene die Complex-Curve in ein System von zwei Punkten aus, die nach der Richtung der beiden Asymptoten unendlich weit liegen.

Alle Aequatorialflächen, deren Breiten-Ebenen einer der beiden Asymptoten parallel sind, sind parabolische. Wir erhalten auch dann eine parabolische Aequatorialfläche, wenn wir die Breiten-Ebenen derselben der Ebene der characteristischen Curve parallel nehmen. Die Gleichung dieser Fläche ist:

$$\begin{aligned} & -2Svw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 + 2Tuw \\ & - 2(Ox + G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0, \end{aligned} \tag{104}$$

und demnach die Fläche dadurch particularisirt, dass die Axen der Parabeln in allen Breiten-Ebenen gleich gerichtet sind. Diese Richtung ist, in Uebereinstimmung mit der 278. Nummer, dieselbe, in welcher der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist.

Wenn wir dieselbe Aequatorialfläche, statt durch ihre Breiten-Curven, durch ihre umhüllenden Cylinder-Flächen bestimmen, so erhalten wir nach den Entwicklungen der 182. Nummer die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & (Fy'^2 + Ez'^2)x^2 - 2(Ry'^2 - Oy'z' - Uz'^2)x \\ & + 2(Sy' + Tz')y' \cdot z + (By'^2 + 2Gy'z' + Cz'^2) = 0. \end{aligned} \tag{105}$$

Dieselbe stellt den Durchschnitt mit XZ desjenigen Complex-Cylinders dar, dessen Seiten der durch das Verhältniss $\frac{y'}{z'}$ bestimmten Richtung parallel sind.

In der vorstehenden Gleichung fehlt das Glied mit z^2. Alle Complex-Cylinder also, deren Seiten der Ebene der characteristischen Curve parallel sind, sind parabolische Cylinder. Die Diametral-Ebenen derselben sind mit der genannten Ebene parallel. Insbesondere lösen sich diejenigen beiden Cylinder, deren Seiten einer der beiden Asymptoten der characteristischen Curve parallel sind, in Systeme von zwei Ebenen auf, von denen die eine unendlich weit rückt. In Folge dessen reducirt sich die Gleichung des Cylinders auf den ersten Grad. Wenn wir endlich den Seiten des Cylinders diejenige Richtung geben, in welcher der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist, so kommt:

$$Sy' + Tz' = 0,$$

und der Cylinder zerfällt in zwei Ebenen, welche beide der Ebene der characteristischen Curve parallel sind.

282. Je nachdem die beiden Asymptoten der characteristischen Curve reell oder imaginär sind, wollen wir den Complex der besonderen Art einen h y p e r b o l i s c h e n oder einen e l l i p t i s c h e n nennen.

In beiden Arten von Complexen liegt in solchen Ebenen, welche der Ebene der characteristischen Curve parallel sind, eine Linie des Complexes unendlich weit. In elliptischen Complexen gibt es sonst keine Ebenen, welche unendlich weit liegende Linien des Complexes enthalten. In hyperbolischen Complexen lassen sich durch jede Linie des Raumes zwei reelle Ebenen legen, die bezüglich den beiden Asymptoten der characteristischen Curve parallel sind: die Complex-Curven in diesen Ebenen sind Parabeln. Mit Ausnahme derjenigen Complex-Cylinder, deren Seiten der Ebene der characteristischen Curve parallel verlaufen, sind sämmtliche einem hyperbolischen Complexe angehörige Cylinderflächen hyperbolische, die einem elliptischen Complexe angehörigen elliptische Cylinder.

Wir können sagen, dass sich die in der unendlich weit liegenden Ebene enthaltene Curve des Complexes in dem Falle der hyperbolischen Complexe in ein System von z w e i r e e l l e n, in dem Falle der elliptischen Complexe in ein System von z w e i i m a g i n ä r e n Puncten aufgelöst hat.

283. Wenn wir, um die Gesammtheit der unendlich weit liegenden Linien des Complexes darzustellen, nur die Glieder zweiten Grades in ϱ, σ, η

betrachten, wie wir dies in dem allgemeinen Falle gethan haben (n. 267), so erhalten wir aus der Gleichung (102):

$$E\varrho^2 + F\eta^2 = 0. \tag{106}$$

Diese Gleichung stellt in Linien-Coordinaten die beiden Asymptoten der characteristischen Curve dar.

Mit grösserer Annäherung aber, als es vermittelst der characteristischen Curve geschehen kann, bestimmen wir die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes, wenn wir gegen zweite Potenzen von ϱ und η, nach wie vor, erste Potenzen derselben, sowie die Veränderlichen r, s und Constante vernachlässigen, während wir erste Potenzen von σ beibehalten. Auf diese Art*) erhalten wir die folgende Gleichung:

$$E\varrho^2 + F\eta^2 - 2(Ss + T)\sigma = 0. \tag{107}$$

Ein Glied mit N oder O tritt nicht hinzu. Es ist nämlich:

$$-Nr\sigma + Os\varrho = -N\eta + (O-N)s\varrho,$$

das heisst, es bleibt $r\sigma$ immer von der Ordnung der Glieder mit η und $s\varrho$ und kommt somit nicht in Betracht.

Die vorstehende Gleichung stellt einen neuen Complex dar, welchen wir den Asymptoten-Complex des gegebenen nennen wollen.

Wie in dem allgemeinen Falle, ist die Annäherung des Asymptoten-Complexes an den gegebenen vom ersten Grade, während dieselbe bei Nicht-Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung in σ nur von dem Grade $1/2$ sein würde.

Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten beliebig verschieben, behalten in der Gleichung (91), welche D, K, L, M nicht enthält, die beiden Constanten S und T unverändert dieselben Werthe. Wie wir also den gegebenen Complex und seinen Asymptoten-Complex parallel mit sich selbst gegen einander verschieben mögen, ihre gegenseitige Beziehung zu einander bleibt dieselbe.

Die Gleichung des Asymptoten-Complexes wird befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\varrho = 0, \ \sigma = 0, \ \eta = 0.$$

---

*) Analog hat ein Curvenzweig mit einer parabolischen Asymptote nur einen Punct, der, absolut genommen, unendlich weit liegt, derjenige, in welchem derselbe von den Durchmessern der parabolischen Asymptote geschnitten wird. Eine genauere Anschauung über die Lage der dem Unendlichen sich nähernden Puncte erhalten wir durch die parabolische Asymptote selbst, deren Puncte, wenn sie unendlich weit rücken, sowohl nach der Richtung der Axe als auch senkrecht dagegen unendlich weit sich entfernen: aber so, dass, wenn die Grösse der Entfernung nach der Axe von der ersten Ordnung ist, die Ordnung der Grösse der Entfernung von der Axe nur $1/2$ beträgt.

Alle durch den Coordinaten-Anfangspunct gehenden geraden Linien gehören dem Asymptoten-Complexe an. Der Complex umfasst ferner alle geraden Linien, welche den beiden Gleichungen:

$$E\varrho^2 + F\eta^2 = 0, \qquad \sigma = 0,$$

oder den folgenden beiden:

$$E\varrho^2 + F\eta^2 = 0, \qquad Ss + T = 0,$$

Genüge leisten.

Eine jede gerade Linie also, welche die Axe OX und die beiden in YZ liegenden Asymptoten der characteristischen Curve schneidet, ist eine Linie des Asymptoten-Complexes. Und ferner gehört demselben jede gerade Linie an, welche eine der beiden Asymptoten schneidet und der durch den Anfangspunct gehenden Ebene:

$$Sy + Tz = 0,$$

welche diejenige Richtung bezeichnet, in welcher der Mittelpunct des gegebenen Complexes in der Ebene der characteristischen Curve unendlich weit gerückt ist, parallel ist. In Folge dessen artet die Complex-Curve in der Ebene YZ in das System zweier Puncte aus, von denen der eine mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfällt und der andere in der durch die vorstehende Gleichung bezeichneten Richtung unendlich weit gerückt ist. Die Aequatorialfläche des Asymptoten-Complexes, deren Breiten-Ebenen zu YZ parallel sind, besteht, wie die des gegebenen Complexes, aus Parabeln. Alle diese Parabeln werden von den beiden Ebenen berührt, welche sich durch die Axe OX und die beiden Asymptoten der characteristischen Curve hindurch legen lassen. Wenn die Breiten-Ebene parallel mit YZ unendlich weit rückt, artet die Parabel in ihr in das System zweier unendlich weit liegender Puncte aus. Den Uebergang von einer Parabel in zwei unendlich weit liegende Puncte haben wir uns so zu denken, dass auf zwei festen Tangenten der Curve die Berührungspuncte unendlich weit gerückt sind.

284. Wenn die Ebene, in welcher der Mittelpunct unendlich weit gerückt ist, eine der beiden Asymptoten enthält oder unbestimmt wird, erhalten wir eine entsprechende Particularisation des gegebenen Complexes in Beziehung auf die Lage seiner Durchmesser und die Anordnung seiner unendlich weit liegenden Linien. Derartige Complexe hängen, im Allgemeinen, bezüglich von siebenzehn oder sechszehn Constanten ab.

Wir wollen hier nur den letzten Fall betrachten, in welchem in der allgemeinen Complex-Gleichung neben K, L, M und D auch S und T verschwinden.

Dann fällt aus der Gleichung des so particularisirten Complexes die Veränderliche σ ganz aus.

Die allgemeinste Gleichungsform, in welcher diese Veränderliche fehlt, ist:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ + E\varrho^2 + F\eta^2 + 2K\varrho\eta \\ + 2(O - N)s\varrho - 2N\eta \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta + 2U\varrho = 0. \end{aligned} \tag{108}$$

Dadurch, dass wir die Coordinaten-Axen OY und OZ zweien zugeordneten Durchmessern der characteristischen Curve parallel nehmen, verschwindet aus dieser Gleichung K. Indem wir die Axe OX, welche bisher willkürlich angenommen worden ist, mit der Axe eines Complex-Cylinders zusammenfallen lassen, verschwinden P und Q. Endlich erhalten wir durch Verschiebung der Ebene YZ parallel mit sich selbst die Relation:

$$ER = FU.$$

Die Gleichung:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2(O - N)s\varrho - 2N\eta \\ + 2Rs\eta + 2U\varrho = 0, \end{aligned} \tag{109}$$

wobei: $$ER = FU$$

ist also als die allgemeine Gleichung der in fraglicher Weise particularisirten Complexe anzusehen. Sie enthält zehn von einander unabhängige Constanten, zu welchen noch sechs Constanten der Lage hinzugerechnet werden müssen, die darauf kommen, dass einmal die Ebene YZ durch den Complex bestimmt ist, dass ferner die beiden Axen OY und OZ zugeordnete Richtungen mit Bezug auf die characteristische Curve haben, endlich, dass OX eine Cylinder-Axe des Complexes ist.

Der Bedingung also, dass sich ein Complex zweiten Grades durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen nur vier der fünf Variabeln:

$$r,\ s,\ \sigma,\ \varrho,\ (r\sigma - s\varrho = \eta)$$

darstellen lasse, entspricht eine dreifache Particularisation des Complexes.*)

---

*) Statt, wie im Text, σ ausfallen zu lassen, können wir auch η wählen, indem wir die Coordinaten-Ebene XY der Ebene der characteristischen Curve parallel nehmen. Dann schreibt sich die Gleichung des Complexes unmittelbar als die allgemeine des zweiten Grades zwischen den vier Veränderlichen r, s, σ, ϱ, die uns als Linien-Coordinaten entgegentreten, wenn wir die gerade Linie durch ihre Projection auf XZ und YZ bestimmen. Statt der früheren Constanten K, P, Q können wir hier M, T, U verschwinden lassen, und erhalten, durch passende Verschiebung der Coordinaten-Ebene XY, die Relation: $$DP = ES.$$

285. Es ist interessant, den so particularisirten Complex näher zu untersuchen.

Für den Abstand desjenigen Durchmessers des Complexes, welcher einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

zugeordnet ist, von der ihm parallelen Coordinaten-Ebene YZ finden wir nach den Formeln der 278. Nummer, indem wir S und T gleich Null setzen:

$$x = \frac{Rv^2 + Ouv - Uu^2}{Eu^2 + Fv^2}. \tag{110}$$

Wenn wir dann die gegebene Ebene um ihren Durchschnitt mit der Ebene der characteristischen Curve beliebig drehen, so bleibt der ihr zugeordnete Durchmesser immer in derselben, durch den vorstehenden Werth von x bestimmten Ebene, während in dem allgemeinen Falle der hyperbolischen und elliptischen Complexe bei der Drehung der gegebenen Ebene der ihr zugeordnete Durchmesser seinen Abstand von der YZ-Ebene ändert.

Danach geht das früher gewonnene Resultat in das folgende über.

Die irgend zweien zugeordneten Durchmessern der characteristischen Curve parallelen Durchmesser des Complexes liegen in zwei parallelen Ebenen, die von einer festen Ebene gleichen Abstand haben. Wir wollen diese Ebene die Central-Ebene des gegebenen Complexes nennen.

Die Coordinaten des Mittelpuncts des Complexes in der Central-Ebene sind nicht mehr unendlich gross; ihre Werthe erscheinen unter der Form $\frac{0}{0}$. Der Mittelpunct liegt nicht mehr unendlich weit. Jeder Punct der Central-Ebene kann als Mittelpunct des Complexes angesehen werden.

286. Bei den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, liegen, wie in dem allgemeinen Falle der hyperbolischen und elliptischen Complexe, in allen Ebenen, welche einer der beiden Asymptoten der characteristischen Curve parallel sind, Linien unendlich weit, und die Complex-Curven in ihnen sind Parabeln. In Ebenen aber, die der Central-Ebene und also beiden Asymptoten parallel sind, werden die Complex-Curven nach dem Verschwinden von S und T durch die Gleichung:

$$(Fx^2 - 2Rx + B)v^2 - 2(Ox + G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)v^2 = 0 \tag{111}$$

dargestellt. Sie hören auf, Parabeln zu sein, und sind in Systeme von zwei Puncten ausgeartet, die nach Richtungen, welche von einer Ebene zur anderen sich ändern, unendlich weit liegen.

Die Linien des Complexes in einer der Central-Ebene parallelen Ebene bestehen also aus allen Linien der Ebene, welche zwei gegebenen parallel sind. Diese Linien können reell oder imaginär sein, sie können endlich zusammenfallen. Wenn die Ebene sich immer weiter von der Central-Ebene entfernt, nähert sich die Richtung der beiden Linien-Systeme immer mehr der Richtung der beiden Asymptoten der characteristischen Curve.

Dem entsprechend arten die von Complex-Linien gebildeten Cylinder, deren Seiten der Central-Ebene parallel sind, in Systeme mit dieser Ebene paralleler Ebenen aus. Die Mittel-Ebenen zweier conjugirter Cylinder liegen auf beiden Seiten der Central-Ebene in gleichem Abstande von derselben.

Der Complex ist also, wenn wir zusammenfassen, in der Weise particularisirt, dass jeder Punct einer in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden ausgezeichneten geraden Linie der Mittelpunct eines Complex-Kegels ist, der sich in das System zweier Ebenen auflöst, die sich nach der fraglichen Linie schneiden; oder, was dasselbe sagt, dass jede Ebene, welche durch eine ausgezeichnete gerade Linie der unendlich weit entfernten Ebene sich legen lässt, eine Complex-Curve enthält, welche sich in das System zweier Puncte aufgelöst hat, die auf der fraglichen geraden Linie liegen.

287. Wir haben in dem Vorstehenden denjenigen Fall discutirt, dass sich der durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellte Complex in Folge davon, dass sich der Ausdruck:

$$D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma$$

in zwei lineare Factoren auflösen lässt, in Beziehung auf seine unendlich weit liegenden Linien particularisirt. Wir wollen jetzt die neue Particularisirung des Complexes betrachten, wo derselbe Ausdruck das Quadrat einer linearen Function wird, dem entsprechend, dass gleichzeitig:

$$K^2 - EF = 0, \quad L^2 - DF = 0, \quad M^2 - DE = 0. \tag{112}$$

Es kommt das darauf hinaus, dass bei gehöriger Bestimmung der Richtung der Coordinaten-Axen zwei der drei Constanten D, E, F zugleich mit K, L, M verschwinden. Sind E und F die beiden verschwindenden Constanten, so ist die Gleichung des Complexes die folgende:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Irs \\ + D\sigma^2 \\ - 2Nrs + 2Os\varrho \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0. \end{gathered} \tag{113}$$

288. Die Gleichungen (2) der 234. Nummer geben zur Bestimmung desjenigen Durchmessers des Complexes, der einer gegebenen Ebene:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

zugeordnet ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{w}{t} + x' = -\frac{w}{t} + \frac{Ouv + Rv^2 + Stv - Ttu - Uu^2}{Dt^2}, \\ y &= y' = \frac{-Ntv - Puv - Qv^2 + Tt^2 + Utu}{Dt^2}, \\ z &= z' = \frac{(N-O)tu + Pu^2 + Quv - Rtv - St^2}{Dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

Alle Durchmesser des Complexes sind zu der Axe OX parallel. Die Richtung der Axe OX ist sonach durch den Complex gegeben. Die sechszehn Constanten des Complexes, der durch die drei Bedingungen (112) particularisirt ist, finden sich in den vierzehn Constanten seiner Gleichung (113) und denjenigen zwei Constanten wieder, durch die wir die Richtung der genannten Axe bestimmt haben. Wir können also, unbeschadet der Allgemeinheit, für das Coordinaten-System, auf welches der Complex in der Gleichung (113) bezogen ist, ein rechtwinkliges nehmen.

Zur Bestimmung derjenigen drei Cylinder-Axen, welche den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ bezüglich parallel sind, erhalten wir aus den Gleichungen (18):

$$\left.\begin{aligned} y &= \infty, & z &= \infty, \\ x &= \infty, & z &= -\frac{S}{D}, \\ x &= \infty, & y &= \frac{T}{D}. \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Alle Cylinder-Axen des Complexes sind unendlich weit gerückt.

Durch parallele Verschiebung der Axe OX können wir aus der obigen Gleichung (113) die beiden mit $s\sigma$ und σ behafteten Glieder fortschaffen. Wir wählen dann zum Coordinaten-Anfangspuncte den Mittelpunct der in der Ebene YZ liegenden Complex-Curve, der in dem Falle der Gleichung (113) durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt wird:

$$y = \frac{T}{D}, \quad z = -\frac{S}{D}.$$

Die Axe OX wird dadurch derjenige Durchmesser des Complexes, welcher von den beiden Axen der zu OY und OZ parallelen Cylinder, die nach OX unendlich weit gerückt sind, geschnitten wird. Von den Kanten des durch die Richtung der drei Coordinaten-Axen im Complexe bestimmten Centralparallelepipeds ist nur eine im Endlichen geblieben. Dem entsprechend werden die Coordinaten des Mittelpunctes des Complexes, wie wir sie durch die Gleichungen (21) bestimmt haben, sämmtlich unendlich gross. Der Quotient je zweier derselben erscheint unter der Form $\frac{0}{0}$. Der Mittelpunct des Centralparallelepipeds ist in unbestimmter Richtung unendlich weit gerückt.

289. Für eine beliebige Ebene, welche die Axe OX enthält und damit allen im Endlichen liegenden Durchmessern des Complexes parallel ist, erhalten die Coordinaten x', y', z' (114), indem t verschwindet, unendlich grosse Werthe. Aber ihr Verhältniss bleibt ein endliches. Es ist die Complex-Curve in einer beliebigen solchen Ebene eine Parabel und die Durchmesser-Richtung dieser Parabel wird durch das endliche Verhältniss bezeichnet. Wir finden für diese Richtung aus (114):

$$x' : y' : z' = (Ouv + Rv^2 - Uu^2) : -v(Pu + Qv) : u(Pu + Qv),$$

und hieraus, wenn wir

$$\frac{u}{v} = -\frac{z'}{y'}$$

setzen und die Accente fortlassen:

$$x(Pz - Qy) = Ry^2 - Oyz - Uz^2. \tag{116}$$

Diese Gleichung stellt eine Kegelfläche der zweiten Ordnung dar, deren Mittelpunct in den Coordinaten-Anfangspunct fällt und welche die Axe OX als eine Seite enthält. Diejenige zweite Seite, nach welcher die Kegelfläche von einer beliebigen durch die Axe OX gelegten Ebene geschnitten wird, gibt die Richtung an, in welcher in der angenommenen Ebene der Mittelpunct der Complex-Curve unendlich weit gerückt ist. Diese Richtung bleibt unverändert, wenn die angenommene Ebene parallel mit sich fortrückt. Denn die Coefficienten O, P, Q, R, U, welche in die vorstehende Gleichung eingehen, bleiben, nach den Transformationsformeln der 158. Nummer, bei einer Verschiebung des Coordinaten-Systems ungeändert, sobald, wie in dem besonderen Falle, den wir betrachten, die Constanten E, F, K, L, M verschwinden. Es sind also die Aequatorialflächen des Complexes, deren Breiten-Ebenen der Axe OX parallel sind, in der Art particularisirt, dass ihre Breiten-Curven, welche Parabeln sind, dieselbe Durchmesser-Richtung besitzen. Die gemeinsame Richtung der Durchmesser aller Parabeln wird durch die Gleichung (116) gegeben.

In dem Falle der elliptischen und hyperbolischen Complexe gab es eine Aequatorialfläche, welche in gleicher Weise particularisirt war: diejenige, deren Breiten-Ebenen der Ebene der characteristischen Curve parallel waren. Die allen Breiten-Curven dieser parabolischen Aequatorialfläche gemeinsame Axen-Richtung bezeichnete den in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden Mittelpunct des Complexes. Dem entsprechend erhalten wir für die Complexe besonderer Art, die wir betrachten, unendlich viele Richtungen, nach denen der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist, und diese unendlich vielen Richtungen werden durch die Gleichung (116) bezeichnet.

In den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, ist der Mittelpunct unbestimmt geworden. Der geometrische Ort für denselben ist eine in der unendlich weit entfernten Ebene liegende Curve der zweiten Ordnung.

290. Die Complex-Curven in allen mit OX parallelen Ebenen sind in dem Falle, den wir betrachten, Parabeln. In Uebereinstimmung hiermit sind nach den Gleichungen (115) alle Complex-Cylinder parabolische Cylinder, deren Diametral-Ebenen die Axe OX parallel ist. Alle Linien, welche in der unendlich entfernten Ebene liegen und die Axe OX schneiden, gehören dem Complexe an. Wir können sagen, dass sich die Curve, welche in der unendlich weit gerückten Ebene von Linien des Complexes umhüllt wird, in ein System zweier Puncte aufgelöst hat, die auf der Axe OX in unendlicher Entfernung zusammenfallen. Wir wollen einen derartigen Complex, der früheren Bezeichnung entsprechend, einen parabolischen Complex nennen.

Derjenige Cylinder, dessen Seiten der allen Durchmessern des Complexes gemeinsamen Richtung parallel ist, löst sich in ein System von zwei Ebenen auf, von denen eine unendlich weitrückt. Und wie in dem Falle der hyperbolischen und elliptischen Complexe derjenige Cylinder, dessen Seiten die Richtung bezeichneten, nach welcher der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt war, in das System zweier, zu der Ebene der characteristischen Curve paralleler Ebenen zerfiel, so wird sich in parabolischen Complexen ein jeder Cylinder, dessen Seiten eine beliebige derjenigen Richtungen besitzen, nach welchen der Mittelpunct des Complexes unendlich weit gerückt ist, in ein System zweier zu OX paralleler Ebenen auflösen. Die analytische Bestätigung dieser Behauptung finden wir aus der Gleichung (27) der 182. Nummer, welche diejenigen Cylinder, deren Seiten der Ebene YZ parallel sind, —

einer beliebig angenommenen Ebene, die in keinerlei ausgezeichneter Beziehung zu dem Complexe steht —, durch ihren Durchschnitt mit XZ bestimmt. Diese Gleichung ist die folgende:

$$Dy'^2 \cdot z^2 - 2(Ry'^2 - Oy'z' - Uz'^2)x + (By'^2 + 2Gy'z' + Cz'^2) = 0.$$

Der Annahme entsprechend, dass

$$Ry'^2 - Oy'z' - Uz'^2 = 0,$$

das heisst, dass die Seiten des Complex-Cylinders die Richtung einer derjenigen beiden geraden Linien haben, nach welchen die Kegelfläche (116) von der Ebene YZ geschnitten wird, zerfällt dieselbe in zwei lineare Factoren, in welchen x nicht mehr vorkommt, und stellt also zwei zu OX parallele Ebenen dar.

291. Wenn wir in der Complex-Gleichung (113) gegen zweite Potenzen von ϱ, σ, η erste Potenzen dieser Veränderlichen, so wie r, s und Constante vernachlässigen, so finden wir, um die unendlich weit liegenden Linien des Complexes darzustellen:

$$D\sigma^2 = 0. \tag{117}$$

Alle Linien, welche die Coordinaten-Axe OX schneiden, gehören dem vorstehenden Complexe an. Die beiden Asymptoten der characteristischen Curve bei hyperbolischen und elliptischen Complexen fallen also bei parabolischen Complexen in eine gerade Linie zusammen.

Mit grösserer Annäherung aber, als dies durch die vorstehende Gleichung möglich ist, können wir die unendlich weit liegenden Linien des Complexes darstellen, wenn wir neben der zweiten Potenz von σ die ersten Potenzen von ϱ und η beibehalten. Die resultirende Gleichung:

$$D\sigma^2 - 2N\eta + 2(O - N)s\varrho + 2(Pr + U)\varrho + 2(Qr + Rs)\eta = 0 \tag{118}$$

stellt einen neuen Complex dar, welchen wir den Asymptoten-Complex des gegebenen nennen wollen. Wie wir auch den gegebenen Complex und seinen Asymptoten-Complex gegen einander verschieben mögen, ihre gegenseitige Beziehung zu einander bleibt dieselbe. Denn die Coefficienten D, N, O, P, Q, R, U behalten bei einer Verschiebung des Coordinaten-Systems parallel mit sich selbst nach den Regeln der 157. Nummer in dem Falle, den wir betrachten, dieselben Werthe.

Der Asymptoten-Complex, der durch die Gleichung (118) dargestellt wird, umfasst alle geraden Linien, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurch gehen. Für die Gleichung derjenigen Aequatorialfläche desselben, deren Breiten-Ebenen der Coordinaten-Ebene YZ parallel sind, erhalten wir aus der 165. Nummer, indem wir die Constanten B, C, E, F, G, K, L, M, S, T verschwinden lassen, nach Ablösung des Factors x, die folgende:

$$2DRy^2 - 2DOyz + 2DUz^2 + O^2x - 4RUx = 0. \tag{119}$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade und stellt ein Paraboloid dar, welches in dem Coordinaten-Anfangspuncte die Ebene YZ berührt, und dessen Durchmesser mit OX parallel sind. Die Reduction der Gleichung 4. Grades der allgemeinen Aequatorialfläche auf den 2. Grad kommt hier, in Uebereinstimmung mit den Entwicklungen der 258. Nummer, dadurch zu Stande, dass sich von der Aequatorialfläche zwei Ebenen absondern, in denen von den Linien des Complexes zwei Puncte umhüllt werden, die in einen zusammenfallen. Es sind dies in dem vorliegenden Falle die Coordinaten-Ebene YZ und die unendlich weit liegende Ebene.

Wir erhalten für die Meridianfläche, welche OX zur Doppellinie hat, aus der 169. Nummer die folgende Gleichung in gemischten Coordinaten:

$$(R \operatorname{tang}^2\varphi - O \operatorname{tang}\varphi - U)tw - (Q \operatorname{tang}\varphi - P)vw = 0. \tag{120}$$

Es löst sich also die Curve in einer beliebigen Meridian-Ebene in das System zweier Puncte auf, von denen der eine mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfällt und der andere in der durch die Gleichung:

$$(R \operatorname{tang}^2\varphi - O \operatorname{tang}\varphi - U)t - (Q \operatorname{tang}\varphi - P)v = 0 \tag{121}$$

bezeichneten Richtung unendlich weit gerückt ist. Derjenige Cylinder des gegebenen Complexes, dessen Seiten diese Richtung besitzen, löst sich in das System zweier zu der durch den Werth von $\operatorname{tang}\varphi$ bestimmten Ebene parallelen Ebenen auf.

292. Wir erhalten eine letzte Particularisation des Complexes, wenn die sechs Constanten der Gruppe

$$D,\ E,\ F,\ K,\ L,\ M$$

zugleich verschwinden. Dann enthält die allgemeine Gleichung des Complexes nur noch dreizehn von einander unabhängige Constanten.

Um diejenigen Linien darzustellen, welche in dem so particularisirten Complexe der (absolut) unendlich weit entfernten Ebene angehören, erhalten wir die Identität:

$$0 = 0.$$

In den Complexen besonderer Art, die wir betrachten, gehört jede in der unendlich weit entfernten Ebene liegende gerade Linie dem Complexe an. Die Complex-Curve in einer beliebigen Ebene ist eine Parabel. Sämmtliche Complex-Cylinder zerfallen in Systeme von zwei Ebenen, und reduciren sich, indem die eine derselben unendlich weit rückt, auf den ersten Grad. Von Centralparallelepipeden des Complexes kann keine Rede mehr sein. Der Complex hat seinen Mittelpunct verloren.

Als Asymptoten-Complex des gegebenen bezeichnen wir denjenigen, dessen Gleichung sich aus der des gegebenen Complexes ableitet, indem wir die Veränderlichen r, s und Constante gegen die ersten Potenzen von ϱ, σ, η vernachlässigen. Wir erhalten so:

$$\begin{gathered} -2Nr\sigma+2Os\varrho \\ +2Pr\varrho+2Qr\eta+2Rs\eta-2Ss\sigma-2T\sigma+2U\varrho=0. \end{gathered} \tag{122}$$

Die Beziehung des Asymptoten-Complexes zu dem gegebenen ändert sich, zu Folge der Form dieser Gleichung, nicht, wenn wir denselben parallel mit sich selbst um ein endliches Stück verschieben.

Wir mögen zunächst bemerken, dass der Asymptoten-Complex, in dessen Gleichung sowohl die Constanten:

$$A,\ B,\ C,\ G,\ H,\ I$$

als die Constanten:

$$D,\ E,\ F,\ K,\ L,\ M$$

fehlen, in analoger Weise in Bezug auf den Anfangspunct particularisirt ist als in Bezug auf die unendlich weit entfernte Ebene. Alle Linien, welche unendlich weit liegen, sowie alle Linien, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurch gehen, gehören dem Asymptoten-Complexe an.

Wie in dem Falle des gegebenen Complexes arten alle von Linien des Asymptoten-Complexes gebildete Cylinderflächen in das System zweier Ebenen aus, von denen eine unendlich weit gerückt ist. Aber hier tritt die neue Particularisation hinzu, dass jedesmal die andere Ebene durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurchgeht. Während in einer beliebigen Ebene des Raumes eine Parabel von Linien des Complexes umhüllt wird, zerfällt die Complex-Curve in jeder Ebene, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurchgeht, in das System zweier Puncte, von denen der eine mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfällt, während der andere unendlich weit gerückt ist. Eine jede Aequatorialfläche des Complexes artet in Folge dessen in einen Kegel der zweiten Ordnung aus, dessen Mittelpunct in den Coordinaten-Anfangspunct fällt und der von den zugehörigen Breiten-Ebenen in Parabeln geschnitten wird. Insbesondere berührt diejenige Breiten-Ebene, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct geht, die Kegelfläche nach einer Seite, welche diejenige Richtung bezeichnet, in der einer der Puncte, in welche sich die Complex-Curve in der fraglichen Ebene aufgelöst hat, unendlich weit gerückt ist.

293. Wir haben in dem Vorstehenden die Lage der unendlich weit entfernten geraden Linien und die entsprechenden Durchmesser-Verhältnisse bei Complexen des zweiten Grades discutirt und insbesondere durch einfachere Complexe des zweiten Grades, welche wir als die Asymptoten-Complexe der gegebenen bezeichneten, veranschaulicht. Wir sind dabei, wenn wir zusammenfassen, zu einer sechsfachen Unterscheidung der Complexe zweiten Grades gelangt.

In hyperboloidischen Complexen umhüllen die unendlich weit liegenden Linien des Complexes eine reelle, in ellipsoidischen Complexen eine imaginäre Curve der zweiten Classe. Diese Curve löst sich in dem Falle der hyperbolischen Complexe in ein System von zwei reellen, in dem Falle der elliptischen Complexe in ein System von zwei imaginären Puncten auf. Fallen diese beiden Puncte zusammen, so ist der Complex ein parabolischer. Endlich kann der Fall eintreten, dass alle der unendlich weit liegenden Ebene angehörigen geraden Linien Linien des Complexes sind.

§ 4.

Tangential- und Polar-Complexe des ersten Grades.

294. Die im Vorstehenden gewonnenen Resultate lassen sich ohne Weiteres verallgemeinern, indem wir alle Betrachtungen, die wir vorhin für die unendlich weit liegende Ebene angestellt haben, auf eine beliebige Ebene und, nach den Regeln des Princips der Reciprocität, auf einen beliebigen Punct übertragen. Wir lassen indess vorab eine Reihe anderer Ueberlegungen folgen, die bestimmt sind, die Sätze der vorhergehenden Paragraphen zu erweitern und unter einen allgemeinen Gesichtspunct zu bringen.

Es sei Ω_n eine homogene Function des n. Grades von beliebig vielen Variabeln $p, q, r, \cdots\cdot$. In Gemässheit des bekannten Theorems über homogene Functionen erhalten wir alsdann:

$$\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\cdot p+\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\cdot q+\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot r+\cdots\cdots=n.\ \Omega_n\,. \qquad (123)$$

Wir können hiernach die Gleichung:

$$\Omega_n=0 \qquad (124)$$

auch in folgender Weise schreiben:

$$\frac{\delta \Omega_n}{\delta p} \cdot p + \frac{\delta \Omega_n}{\delta q} \cdot q + \frac{\delta \Omega_n}{\delta r} \cdot r + \cdots\cdots = 0. \tag{125}$$

Wenn also $p', q', r', \ldots$ gegebene Werthe sind, welche die Gleichung (124) befriedigen, so befriedigen dieselben Werthe die Gleichung (125). Die partiellen Differentialquotienten, die in dieser Gleichung vorkommen und im Allgemeinen homogene Functionen $(n-1)$. Grades der Veränderlichen sind, erhalten dann constante Werthe, die wir, zur Unterscheidung, in dem Nachstehenden einklammern wollen. Wenn wir von den gegebenen Werthen $p', q', r', \ldots$ zu benachbarten übergehen, so finden wir aus (124):

$$\left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta p}\right) dp + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta q}\right) dq + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta r}\right) dr + \cdots\cdots = 0. \tag{126}$$

Die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta r}\right) r + \cdots\cdots \equiv \Pi = 0, \tag{127}$$

in welcher die eingeklammerten Differentialquotienten die eben angegebene Bedeutung haben, ist eine Gleichung des ersten Grades zwischen den Veränderlichen $p, q, r, \cdots\cdots$. Die gegebenen Werthe $p', q', r', \ldots\ldots$ befriedigen die vorstehende Gleichung, wie sie die Gleichung des n. Grades (124) befriedigen. Denn wenn wir die letztgenannte Gleichung unter der Form (125) schreiben, erhalten wir aus beiden Gleichungen übereinstimmend:

$$\left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta p}\right) p' + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta q}\right) q' + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta r}\right) r' + \cdots\cdots = 0.$$

Aber auch, wenn wir von den gegebenen Werthen $p', q', r', \ldots.$ zu benachbarten Werthen übergehen, gibt uns die Gleichung (127) dieselbe Gleichung (126), die uns oben die Gleichung des n. Grades (124) gegeben hat. Dem entsprechend wollen wir Π eine lineare Tangential-Function der gegebenen homogenen Function des n. Grades Ω_n nennen.

Wenn wir, statt vorauszusetzen, dass die constanten Werthe $p', q', r', \ldots.$ die gegebene Function Ω_n befriedigen, diese Werthe ganz beliebig annehmen, so wird dadurch die Form der Function Π in keiner Weise geändert. Wir wollen in diesem allgemeinen Falle Π eine lineare Polar-Function der gegebenen Function Ω_n nennen. Durch die obige Voraussetzung geht eine Polarfunction in eine Tangentialfunction über.

Wenn insbesondere $n = 2$, so sind die Differential-Quotienten von Ω_n Functionen des ersten Grades der Veränderlichen. Wir können dann in der Polarfunction Π der veränderlichen Grössen $p, q, r, \ldots$ mit ihren constanten Werthen $p', q', r', \ldots.$ gegenseitig mit einander vertauschen, ohne dass die Function irgend wie sich ändert. Demgemäss können wir die Gleichung (127) in der folgenden doppelten Weise schreiben:

$$\left(\frac{\delta \Omega_2}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Omega_2}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Omega_2}{\delta r}\right) r + \cdots\cdots = 0, \tag{128}$$

$$p' \frac{\delta \Omega_2}{\delta p} + q' \frac{\delta \Omega_2}{\delta q} + r' \frac{\delta \Omega_2}{\delta r} + \cdots\cdots = 0. \tag{129}$$

Das Vorstehende überträgt sich unmittelbar auf den Fall allgemeiner, nicht homogener Functionen. Wir können zu diesem Ende durch Einführung einer neuen Veränderlichen die nicht homogene Function homogen machen, für die homogen gemachte Function die Polar-Function ableiten, und in dieser, die eine homogene Function des ersten Grades ist, die eingeführte Veränderliche und ihren constanten Werth der Einheit wieder gleich setzen.

Wenn die gegebenen Variabeln $p, q, r, \ldots.$ nicht von einander unabhängig sind, sondern beliebig viele (m) Bedingungs-Gleichungen:

$$\Phi = 0, \ \Phi' = 0, \ \ldots\ldots \tag{130}$$

zu befriedigen haben, deren Grad wir, der Einfachheit wegen, gleich dem von Ω_n nehmen wollen, so modificiren sich die vorstehenden Betrachtungen. Dieselben Werthe der Veränderlichen $p, q, r, \ldots\ldots$, welche der Gleichung:

$$\Omega_n = 0$$

Genüge leisten, befriedigen eine jede der Gleichungen von der folgenden Gestalt:

$$\Omega_n + \lambda \Phi + \lambda' \Phi' + \cdots\cdot = 0, \tag{131}$$

wo $\lambda, \lambda', \ldots.$ unbestimmte Constanten bezeichnen. Einem gegebenen Systeme von Werthen der Variabeln entsprechend erhalten wir in Bezug auf eine jede derartige Gleichung eine lineare Polarfunction.

Diese Polarfunctionen stellen, gleich Null gesetzt, lineare Gleichungen dar. Dieselben werden gemeinsam von denjenigen Werthen der Veränderlichen $p, q, r, \ldots.$ befriedigt, welche den folgenden $(m + 1)$ Gleichungen Genüge leisten:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Omega_n}{\delta r}\right) r + \cdots\cdot = 0, \\
&\left(\frac{\delta \Phi}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Phi}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Phi}{\delta r}\right) r + \cdots\cdot = 0, \\
&\left(\frac{\delta \Phi'}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta \Phi'}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta \Phi'}{\delta r}\right) r + \cdots\cdot = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Es bilden also die unendlich vielen (∞^m) linearen Polarfunctionen, welche einem gegebenen Systeme von Werthen der Variabeln $p, q, r, \dots$ entsprechen, eine $(m+1)$gliedrige Gruppe.*)

Aus der $m$fach unendlichen Anzahl linearer Porlarfunctionen können wir, einer willkürlichen Annahme von $\lambda, \lambda', \dots$ entsprechend, eine beliebig auswählen. Ist dann insbesondere $n = 2$, so lassen sich in derselben, wie in dem Falle unabhängiger Veränderlicher, die Veränderlichen mit den entsprechenden partiellen Differentialquotienten vertauschen, ohne die Form der Polarfunction zu ändern. Aber während in dem Falle unabhängiger Variabeln die eine lineare Polarfunction, welche es gab, in einer ausschliesslichen Beziehung zu dem Systeme der gegebenen Werthe der Veränderlichen und zu der gegebenen Gleichung stand, ist jetzt jede beliebig angenommene lineare Polarfunction mit jeder anderen gleichberechtigt. Wir können sagen, dass den gegebenen constanten Werthen $p', q', r', \dots$ nicht sowohl jede einzelne Polarfunction als die $m$fach unendliche Schaar aller Polarfunctionen zugeordnet sei.

295. Beschränken wir uns auf drei Veränderliche, so ist:

$$\Omega_n = f\,(p, q, r),$$

und wir erhalten:

$$\Pi = \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r.$$

Wenn wir den Veränderlichen die Bedeutung von Punct-Coordinaten in der Ebene geben, so bestimmen p', q', r' einen Punct, und die homogene Gleichung:

$$\Omega_n = 0 \tag{124}$$

stellt eine Curve der n. Ordnung dar, während:

$$\Pi \equiv \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r = 0 \tag{133}$$

die Gleichung der Polaren des gegebenen Punctes in Beziehung auf die Curve darstellt, insbesondere, wenn der Punct auf der Curve liegt, die Gleichung der Tangente der Curve in diesem Puncte.

Das Princip der Reciprocität in Betracht der Curven zweiter Ordnung beruht auf der zweifachen Form, welche in dem Falle $n = 2$ die letzte Gleichung annimmt.

Wenn wir den drei Veränderlichen die Bedeutung von Linien-Coordinaten in der Ebene geben, so wird durch die drei constanten Werthe derselben

*) Wir sehen dabei von dem Falle ab, dass sich unter den Bedingungs-Gleichungen Φ lineare befinden. Unter dieser Annahme werden die entsprechenden unter den Gleichungen (132), als von den Bedingungs-Gleichungen selbst nicht verschieden, ohnehin befriedigt.

eine gerade Linie bestimmt, und die Gleichung (124) stellt eine Curve der n. Classe dar, während die Gleichung (133) den Pol dieser geraden Linie in Beziehung auf diese Curve darstellt, insbesondere, wenn die gerade Linie eine Tangente der Curve ist, den Berührungspunct auf derselben.

Für Curven zweiter Classe gilt in Beziehung auf Reciprocität die in Beziehung auf Curven zweiter Ordnung gemachte Bemerkung.

296. In dem Falle von vier Veränderlichen sei:

$$\Omega_n = f(p, q, r, s)$$

und:

$$\Pi = \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) s.$$

Geben wir den vier Veränderlichen die Bedeutung von Punct-Coordinaten im Raume, so stellt die Gleichung:

$$\Omega_n = 0 \tag{124}$$

eine Fläche der n. Ordnung dar, und:

$$\Pi = 0 \tag{134}$$

ist die Gleichung der Polar-Ebene des Punctes (p', q', r', s') in Beziehung auf diese Fläche, insbesondere, wenn der Punct auf der Fläche liegt, der Tangential-Ebene der Fläche in diesem Puncte.

Wenn p, q, r, s Plan-Coordinaten bedeuten, so stellt die Gleichung (124) eine Fläche der n. Classe dar und (p', q', r', s') bezeichnet eine gegebene Ebene. Dann ist (134) die Gleichung des Pols dieser Ebene in Beziehung auf die Fläche, insbesondere, wenn die Ebene die Fläche berührt, die Gleichung des Berührungspunctes.

Die doppelte Form der Gleichung (134) in dem Falle, dass $n = 2$, schliesst das Princip der Reciprocität für Flächen der zweiten Ordnung und Flächen der zweiten Classe ein, wie es für Curven und Flächen der zweiten Ordnung in eleganter Weise zuerst von Gergonne entwickelt worden ist.

Wir können die vier Veränderlichen auch als Punct- oder Linien-Coordinaten in der Ebene betrachten, müssen in diesem Falle aber zwischen ihnen und also auch ihren constanten Werthen eine lineare Bedingungs-Gleichung statuiren. Dann stellt die Gleichung (124) wiederum eine Curve der n. Ordnung oder der n. Classe dar, und die Gleichung (134) bezüglich die Polare des Punctes (p', q', r', s') oder den Pol der geraden Linie (p', q', r', s') in Beziehung auf die Curve. Polare und Pol gehen in Tangente und Berührungspunct über, wenn bezüglich der gegebene Punct auf der Curve liegt oder die gegebene gerade Linie die Curve berührt. Wir können zu der gegebenen Gleichung des n. Grades die lineare Bedingungs-Gleichung, welcher die Veränderlichen p, q, r, s zu genügen haben, mit einer beliebigen (homogenen) Function des $(n-1)$. Grades multiplicirt, hinzufügen. Aber dadurch wird die Gleichung (134) der Polaren, bezüglich des Pols, nicht geändert, insofern sowohl die Veränderlichen p, q, r, s als ihre festen Werthe p', q', r', s' die betreffende lineare Bedingungs-Gleichung befriedigen.

297. Wenn endlich:

$$\Omega_n = f(p, q, r, s, t, u),$$

so erhalten wir:

$$\Pi = \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta p}\right) p + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta q}\right) q + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) s + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta t}\right) t + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta u}\right) u.$$

Den Veränderlichen wollen wir die Bedeutung von Linien-Coordinaten geben, und zwar einmal für dieselben die Strahlen-Coordinaten:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y),$$

das andere Mal die Axen-Coordinaten:

$$(uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u),\ (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v')$$

nehmen. Dann stellt in beiden Annahmen die homogene Gleichung:

$$\Omega_n = 0 \tag{124}$$

denselben Complex des n. Grades dar, und die Gleichung:

$$\Pi = 0, \tag{135}$$

wenn wir die constanten Werthe p', q', r', s', t', u', welche die partiellen Differentialquotienten einschliessen, auf eine gerade Linie, auf einen Strahl oder eine Axe beziehen, einen linearen Complex, welchen wir den Polar-Complex der gegebenen geraden Linie (p', q', r', s', t', u') in Beziehung auf den gegebenen Complex des n. Grades nennen wollen. Wenn insbesondere die gegebene gerade Linie dem Complexe selbst angehört, so geht der Polar-Complex in einen Tangential-Complex über, das heisst, in einen Complex ersten Grades, der die gegebene gerade Linie und alle diejenigen Linien des gegebenen Complexes enthält, welche der gegebenen unendlich nahe liegen.

298. Die sechs Coordinaten der geraden Linie sind nicht von einander unabhängig, sondern befriedigen eine Gleichung des zweiten Grades, welche in der Identität:

$$(x-x')(yz'-y'z) + (y-y')(x'z-xz') + (z-z')(xy'-x'y) = 0$$

ihren Ausdruck findet. Dem entsprechend erhalten wir nach den Erörterungen der 294. Nummer eine zweigliedrige Gruppe linearer Polar-Complexe, welche zu der gegebenen geraden Linie und dem gegebenen Complexe sämmtlich in derselben Beziehung stehen. Die zweigliedrige Gruppe linearer Polar-Complexe, die einer gegebenen geraden Linie zugehören, bestimmt eine lineare Congruenz, von der wir insbesondere sagen können, dass sie der gegebenen geraden Linie in Bezug auf den Complex n. Grades zugeordnet sei.

Wir wollen in dem Folgenden wiederum, wie früher, die sechs Linien-Coordinaten in der vorstehenden Reihenfolge mit

$$r,\ s,\ h,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

bezeichnen. Dann schreibt sich die Bedingungs-Gleichung, welche die Linien-Coordinaten befriedigen müssen, unter der folgenden Form:

$$-r\sigma + s\varrho + h\eta = 0. \tag{136}$$

Der gegebenen geraden Linie ertheilen wir die Coordinaten $r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta'$.

Ohne den gegebenen Complex n. Grades:

$$\Omega_n = 0$$

zu ändern, können wir seiner Gleichung die Gleichung (136) mit einer beliebigen homogenen Function des $(n-2)$. Grades multiplicirt, hinzuaddiren. So durften wir der allgemeinen Gleichung (I) der Complexe des zweiten Grades nach Belieben ein Glied $2V\eta$ hinzufügen. Unbeschadet der Allgemeinheit wollen wir die beliebige Function des $(n-2)$. Grades mit λ bezeichnen und bei der Bildung der Polarfunction als constant betrachten. Denn diejenigen Glieder der Polarfunction, welche wir dadurch vernachlässigen, erscheinen mit dem Factor $(-r'\sigma' + s'\varrho' + h'\eta')$ multiplicirt, und dieser Factor ist gleich Null, weil die Coordinaten der angenommenen geraden Linie, $r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta'$, die Gleichung (136) befriedigen müssen.

Wir können sonach für die Gleichung des gegebenen Complexes die folgende nehmen:

$$\Omega_n + \lambda(-r\sigma + s\varrho + h\eta) = 0. \tag{137}$$

Dann wird die Gleichung des Polar-Complexes:

$$\Pi + \lambda(-r\sigma' + s\varrho' + h\eta' - r'\sigma + s'\varrho + h'\eta) = 0, \tag{138}$$

wo Π die Function bezeichnet:

$$\Pi = \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) s + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\right) h - \left(-\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}\right)\sigma + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}\right)\varrho + \left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}\right)\eta.$$

Einem jeden Werthe von λ entsprechend erhalten wir einen anderen Polar-Complex.

299. Von den beiden Directricen der durch die zweigliedrige Gruppe

der Polar-Complexe bestimmten Congruenz fällt eine mit der gegebenen geraden Linie zusammen. Denn indem wir λ unendlich gross nehmen, wird die Gleichung (138):

$$-r\sigma' + s\varrho' + h\eta' - r'\sigma + s'\varrho + h'\eta = 0, \tag{139}$$

und diese Gleichung stellt nach den Erörterungen der 45. Nummer einen linearen Complex dar, der alle diejenigen Linien umfasst, welche die gegebene gerade Linie schneiden. Wir können diesen Satz, im Anschluss an die Betrachtungen der 71. Nummer, folgendermassen aussprechen:

Einer gegebenen geraden Linie entspricht in Bezug auf die zweigliedrige Gruppe der ihr zugeordneten linearen Polar-Complexe dieselbe gerade Linie als conjugirte Polare.

Diese letztere gerade Linie ist die zweite Directrix der durch die Polar-Complexe bestimmten Congruenz. Wir sagen, dass diese gerade Linie der gegebenen in Bezug auf den Complex n. Grades zugeordnet sei, und nennen sie die Polare der gegebenen geraden Linie mit Bezug auf den Complex n. Grades.*)

Wir können in der Gleichung (138) die unbestimmte Constante λ so wählen, dass die Gleichung einen Complex ersten Grades der besonderen Art darstellt, dessen sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden. Wir wollen zu diesem Zwecke die Gleichung (138) in der folgenden Weise schreiben:

$$\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) - \lambda\sigma'\right] r + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) + \lambda\varrho'\right] s + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\right) + \lambda\eta'\right] h$$
$$-\left[\left(-\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}\right) + \lambda r'\right] \sigma + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}\right) + \lambda s'\right] \varrho + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}\right) + \lambda h'\right] \eta = 0. \tag{140}$$

Dann erhalten wir zur Bestimmung von λ, nach der 45. Nummer:

$$\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\right) - \lambda\sigma'\right]\cdot\left[\left(-\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}\right) + \lambda r'\right] + \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\right) + \lambda\varrho'\right]\cdot\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}\right) + \lambda s'\right]$$
$$+ \left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\right) + \lambda\eta'\right]\cdot\left[\left(\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}\right) + \lambda h'\right] = 0. \tag{141}$$

Zufolge der Gleichung (136) wird eine Wurzel der vorstehenden Gleichung unendlich gross, dem entsprechend, dass die eine Directrix der durch die

---

*) Wir mögen gleich hier bemerken, dass eine gerade Linie und ihre Polare nicht gegenseitig zu einander in derselben Beziehung stehn. Der Polare der gegebenen geraden Linie entspricht eine neue gerade Linie als die ihr zugeordnete Polare u. s. f. Es gibt nur eine endliche Anzahl solcher gerader Linien, die selbst die Polaren ihrer Polaren sind.

zweigliedrige Gruppe (138) bestimmten Congruenz mit der gegebenen geraden Linie zusammenfällt. Es reducirt sich daher die Gleichung (141) auf den ersten Grad und gibt, zur Bestimmung der zweiten Directrix, welche wir als die Polare der gegebenen geraden Linie bezeichnet haben, indem wir der Kürze wegen

$$-\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}=\Phi$$

setzen,

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Phi}{\Omega_n}\right), \tag{142}$$

wo in Φ und Ω_n die Werthe der Coordinaten der gegebenen geraden Linie einzusetzen sind und wir desshalb die Klammern zugefügt haben.

300. Wenn die gegebene gerade Linie insbesondere dem gegebenen Complexe Ω_n angehört, so erhalten wir statt der zweigliedrigen Gruppe der Polar-Complexe eine zweigliedrige Gruppe von Tangential-Complexen.

Die beiden Directricen der durch dieselben bestimmten Congruenz fallen in die gegebene gerade Linie zusammen. Denn indem Ω_n für die Coordinaten der gegebenen geraden Linie verschwindet, wird der Werth von λ, wie wir ihn durch die Gleichung (142) bestimmt haben, unendlich gross. Die Congruenz hat sich in der Art particularisirt, dass sie alle diejenigen Linien eines linearen Complexes umfasst, die eine feste gerade Linie schneiden, welche dem Complex selbst angehört (vergl. n. 68.). Diese feste gerade Linie ist die gegebene $(r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta')$.

Nur in dem besonderen Falle, dass die gegebene gerade Linie ausser dem gegebenen Complexe Ω_n zugleich dem folgenden Complexe angehört:

$$\Phi \equiv -\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho}+\frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta}=0, \tag{143}$$

wird der durch (142) gegebene Werth von λ unbestimmt. Indem sowohl Ω und Φ verschwindet, erscheint λ unter der Form $\frac{0}{0}$. Bei beliebiger Annahme von λ erhalten wir jedesmal einen Tangential-Complex, dessen sämmtliche Linien eine feste gerade Gerade schneiden. Wenn wir λ unendlich gross wählen, fällt diese gerade Linie mit der gegebenen zusammen. Die gegebene gerade Linie bleibt, nach wie vor, eine der Directricen der durch die zweigliedrige Gruppe der Tangential-Ebene bestimmten Congruenz. Es hat sich diese Congruenz nach den Erörterungen der 68. Nummer, in der Weise particularisirt, dass sie unendlich viele Directricen besitzt, welche in einer Ebene liegen und innerhalb derselben durch einen Punct gehen. Alle Linien, welche in der durch die Directricen bestimmten Ebene liegen, oder durch ihren Schnittpunct hindurch gehen, gehören der Congruenz an.

Wir wollen diejenigen geraden Linien, welche sowohl dem gegebenen Complex n. Grades:

$$\Omega_n = 0$$

als dem aus demselben abgeleiteten Complexe $2(n-1)$. Grades:

$$\Phi = -\frac{\delta\Omega_n}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\sigma} + \frac{\delta\Omega_n}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\varrho} + \frac{\delta\Omega_n}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega_n}{\delta\eta} = 0 \tag{143}$$

angehören, als die singulären Linien des gegebenen Complexes bezeichnen.

Die singulären Linien eines Complexes des n. Grades bilden eine Congruenz von der Ordnung und Classe $2n.(n-1)$.

Einer jeden singulären Linie entspricht, nach den vorstehenden Erörterungen, eine Ebene und ein Punct in ausgezeichneter Weise. Wir wollen jene eine singuläre Ebene, diesen einen singulären Punct des Complexes nennen und dieselben als der angenommenen singulären Linie zugehörig oder entsprechend bezeichnen.

Noch ein letzter Fall bleibt zu berücksichtigen. Wenn:

$$r' : s' : h' : -\sigma' : \varrho' : \eta'$$

$$= \left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right) : \left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right),$$

so stellt der Polar-Complex der gegebenen geraden Linie, unabhängig von dem besonderen Werthe, den wir λ ertheilen mögen, die Gesammtheit aller derjenigen geraden Linien dar, welche die gegebene schneiden. Die Polar-Complexe sind unter sich identisch geworden und bestimmen nicht mehr eine lineare Congruenz. Als Polare der gegebenen geraden Linie kann jede beliebige gerade Linie angesehen werden.

Wir wollen die gegebene gerade Linie eine Doppellinie des Complexes nennen.

Während zwei Bedingungen zu erfüllen sind, damit eine gegebene gerade Linie eine singuläre Linie des Complexes sei, und es also in einem gegebenen Complexe eine Congruenz singulärer Linien gibt, sind fünf Bedingungen zu befriedigen, damit eine gegebene gerade Linie eine Doppellinie des Complexes sei. Weil eine gerade Linie von vier Constanten abhängt, enthält also ein gegebener Complex im Allgemeinen keine Doppellinien. Es ist dazu eine Particularisation desselben erforderlich.

301. Wir beschränken uns in dem Folgenden auf Complexe des zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung des Complexes in Strahlen-Coordinaten sei:

$$\begin{gathered} Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ + 2Gsh + 2Hrh + 2Irs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ - 2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta \\ + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2Th\sigma + 2Uh\varrho = 0. \end{gathered} \tag{V}$$

Wir erhalten dann für die Gleichung des Polar-Complexes einer gegebenen geraden Linie $(r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta')$ in Strahlen-Coordinaten die Gleichung:

$$\begin{gathered} (Ar' + Hh' + Is' - N\sigma' + P\varrho' + Q\eta')\, r \\ + (Bs' + Gh' + Ir' + O\varrho' + R\eta' - S\sigma')\, s \\ + (Ch' + Gs' + Hr' + V\eta' - T\sigma' + U\varrho')\, h \\ - (-D\sigma' + L\eta' + M\varrho' + Nr' + Ss' + Th')\, \sigma \\ + (E\varrho' + K\eta' - M\sigma' + Os' + Pr' + Uh')\, \varrho \\ + (F\eta' + K\varrho' - L\sigma' + Vh' + Qr' + Rs')\, \eta = 0. \end{gathered} \tag{144}$$

Wir können in der vorstehenden Gleichung h und h' willkürlich der Einheit gleich setzen.

Wenn wir von der Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten (III) ausgehen, und die gegebene gerade Linie durch ihre Axen-Coordinaten $(p', q', l', -\varkappa', \pi', \omega')$ bestimmen, so erhalten wir für die Gleichung desselben Complexes:

$$\begin{gathered} (Dp' + Ll' + Mq' - N\varkappa' + S\pi' + T\omega')\, p \\ + (Eq' + Kl' + Mp' + O\pi' - P\varkappa' + U\omega')\, q \\ + (Fl' + Kq' + Lp' + V\omega' - Q\varkappa' + R\pi')\, l \\ - (-A\varkappa' + H\omega' + I\pi' + Np' + Pq' + Ql')\, \varkappa \\ + (B\pi' + G\omega' - I\varkappa' + Oq' + Rl' + Sp')\, \pi \\ + (C\omega' + G\pi' - H\varkappa' + Vl' + Tp' + Uq')\, \omega = 0. \end{gathered} \tag{145}$$

Dabei ist:

$$\begin{gathered} r' : s' : h' : -\sigma' : \varrho' : \eta' \\ = -\varkappa' : \pi' : \omega' : p' : q' : l'. \end{gathered}$$

302. Wenn wir insbesondere in der allgemeinen Gleichung der Polar-Complexe (144) bezüglich

$$s',\ h',\ \varrho',\ \sigma',\ \eta',$$
$$r',\ h',\ \varrho',\ \sigma',\ \eta',$$
$$r',\ s',\ \varrho',\ \sigma',\ \eta'$$

gleich Null setzen, so stellen die drei resultirenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Ar + Hh + Is - N\sigma + P\varrho + Q\eta &= 0, \\ Bs + Gh + Ir + O\varrho + R\eta - S\sigma &= 0, \\ Ch + Gs + Hr + V\eta - T\sigma + U\varrho &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

die Polar-Complexe der drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ dar. Diese Gleichungen können wir unter der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\delta\Omega_2}{\delta r} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta s} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta h} = 0, \tag{146)b}$$

was sich unmittelbar ergibt, wenn wir zu der Gleichung (144) zurückgehen.

Wenn wir eine derjenigen drei geraden Linien, welche in den Ebenen YZ, XZ, XY unendlich weit liegen, für die gegebene nehmen, verschwinden bezüglich:

$$r',\ s',\ h',\ \varrho',\ \eta',$$
$$r',\ s',\ h',\ \sigma',\ \eta',$$
$$r',\ s',\ h',\ \sigma',\ \varrho'.$$

Für die Polar-Complexe dieser drei geraden Linien erhalten wir somit:

$$\left.\begin{aligned} -D\sigma + L\eta + M\varrho + Nr + Ss + Th &= 0, \\ E\varrho + K\eta - M\sigma + Os + Pr + Uh &= 0, \\ F\eta + K\varrho - L\sigma + Vh + Qr + Rs &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

oder, unter anderer Form geschrieben:

$$\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta\varrho} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega_2}{\delta\eta} = 0. \tag{148}$$

303. Setzen wir in der allgemeinen Gleichung des Complexes zweiten Grades (V), die wir auf folgende Weise schreiben wollen:

$$\Omega_2 = 0,$$

r, ϱ und folglich auch η gleich Null, so finden wir zur Bestimmung der Complex-Curve in YZ:

$$Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + 2Gsh - 2Ss\sigma - 2Th\sigma \equiv \Omega_2{}^0 = 0. \tag{149}$$

Für die Gleichung des Pols dieser Complex-Curve in Beziehung auf OZ finden wir, in bekannter Weise:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega_2{}^0}{dh} \equiv Ch + Gs - T\sigma = 0. \tag{150}$$

Andererseits ist die Gleichung des Polar-Complexes der Axe OZ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega_2}{dh} \equiv Ch + Gs + Hr - T\sigma + U\varrho + V\eta = 0.$$

Für alle Linien dieses Polar-Complexes, welche in YZ liegen, ist wiederum r, ϱ und η gleich Null, wonach die folgende Gleichung:

$$Ch + Gs - T\sigma = 0 \tag{150}$$

denjenigen Punct darstellt, in welchem diese Linien sich schneiden.

Der Pol der Axe OZ, in Beziehung auf die Complex-Curve in YZ, fällt also mit demjenigen Puncte zusammen, in welchem alle Linien des Polar-Complexes, welche in YZ liegen, sich schneiden. Dieser Durchschnittspunct beschreibt eine gerade Linie, wenn die Ebene YZ um OZ sich dreht. Diese Linie ist also zugleich der geometrische Ort der Pole von OZ in Beziehung auf diejenigen Complex-Curven, deren Ebenen durch OZ gehen. Wir erhalten so den folgenden Satz:

Einer beliebigen geraden Linie entspricht im Complex eine Meridianfläche. Die Polare dieser Meridianfläche fällt mit derjenigen geraden Linie zusammen, welche wir als die Polare der gegebenen geraden Linie in Bezug auf den Complex bezeichnet haben.*)

Insbesondere also ist ein Durchmesser des Complexes die Polare der in den ihm zugeordneten parallelen Ebenen unendlich weit liegenden geraden Linie.

Wenn wir den Beweis des vorstehenden Satzes auf seinen einfachsten Ausdruck zurückführen, so beruht er darauf, dass es einerlei ist, ob wir in der Function Ω_2 zuerst r, ϱ und η gleich Null setzen und dann in Beziehung auf h differentiiren, oder ob wir zuerst in Beziehung auf h differentiiren und nach der Differentiation r, ϱ und η gleich Null setzen. Das aber ist selbstverständlich.

304. Das Vorstehende gibt eine geometrische Definition für die Congruenz der einer gegebenen geraden Linie zugeordneten Polar-Complexe.

In einer beliebigen durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegt eine Complex-Curve zweiter Classe. Dieselbe wird, im Allgemeinen, von der gegebenen geraden Linie in zwei Puncten geschnitten. Die Tangenten der Complex-Curve in diesen Puncten gehören der fraglichen Congruenz an.

Ein beliebiger Punct der gegebenen geraden Linie ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels zweiter Ordnung. An denselben lassen sich durch die

*) Dieser Satz überträgt sich unmittelbar von Complexen des zweiten Grades auf Complexe eines beliebigen Grades.

gegebene gerade Linie, im Allgemeinen, zwei Tangential-Ebenen legen. Die beiden Seiten, nach welchen derselbe von diesen beiden Ebenen berührt wird, sind ebenfalls Linien der Congruenz.

Der durch die Polar-Complexe einer gegebenen geraden Linie bestimmten Congruenz gehören unter den Linien des gegebenen Complexes zweiten Grades diejenigen an, welche eine nächste Linie desselben Complexes, die mit ihnen bezüglich in derselben, durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegt, in einem Puncte der gegebenen geraden Linie schneiden.

Wenn die gegebene gerade Linie selbst eine Linie des Complexes ist, wird sie von allen Complex-Curven berührt, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen liegen, und ist eine gemeinschaftliche Seite aller Complexkegel, deren Mittelpuncte auf ihr angenommen sind. Dann fällt die Polare mit der gegebenen geraden Linie zusammen. Alle Linien, welche in einer durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegen und durch den Berührungspunct der bezüglichen Complex-Curve mit der gegebenen geraden Linie gehen, oder, was dasselbe ist, alle Linien, welche durch einen Punct der gegebenen geraden Linie gehen und in derjenigen Ebene enthalten sind, von welcher der bezügliche Complex-Kegel nach der gegebenen geraden Linie berührt wird, gehören der durch die Tangential-Complexe der gegebenen geraden Linie bestimmten Congruenz an.

Die fragliche Congruenz hat mit dem gegebenen Complexe zweiten Grades alle diejenigen geraden Linien gemein, welche in diesem nächste Linien der gegebenen sind und dieselbe schneiden.

305. Wenn die gegebene gerade Linie eine singuläre Linie des Complexes ist, so umfasst die durch die Tangential-Complexe bestimmte Congruenz alle solche Linien, welche in einer bestimmten, durch die gegebene gerade Linie gelegten Ebene liegen, sowie alle solche Linien, welche durch einen bestimmten Punct derselben gehen. Wir haben die Ebene und den Punct bezüglich die zugeordnete singuläre Ebene und den zugeordneten singulären Punct genannt.

Eine singuläre Linie des Complexes wird sonach von allen Complex-Curven, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen liegen, in einem festen Puncte berührt; und alle Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf einer singulären Linie des Complexes angenommen werden, berühren eine durch dieselbe hindurchgehende feste Ebene.

Dieses Resultat finden wir analytisch bestätigt. Wenn wir verlangen, dass die Coordinaten-Axe OX eine singuläre Linie des gegebenen Complexes sein soll, so erhalten wir, indem wir in den beiden Gleichungen:

$$\Omega_2 = 0, \qquad \Phi = 0$$

die Veränderlichen:

$$s, h, \sigma, \varrho, \eta$$

gleich Null setzen, die folgenden beiden Relationen zwischen den Constanten der gegebenen Complex-Gleichung:

$$A = 0, \qquad PI + HQ = 0. \tag{151}$$

Wir haben, unter der Voraussetzung, dass OX eine Linie des gegebenen Complexes sei, dass also die Constante A den Werth Null habe, den Berührungspunct derselben mit der Complex-Curve in einer beliebigen durch sie hindurchgelegten Ebene, durch die folgende Gleichung bestimmt (n. 191):

$$x_0 = \frac{I \operatorname{tang} \varphi + H}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}. \tag{152}$$

Es bezeichnet φ den Winkel zwischen der beliebig angenommenen Ebene und der Coordinaten-Ebene XZ, x_0 den Abstand des Berührungspunctes von dem Anfangspuncte der Coordinaten. Dieser Abstand wird constant, sobald die zweite der Bedingungs-Gleichungen (151) erfüllt ist.

Wir haben ferner, unter derselben Voraussetzung, in der 192. Nummer zur Bestimmung der durch OX gelegten Tangential-Ebene eines beliebigen Complex-Kegels, der seinen Mittelpunct auf der Axe OX hat, gefunden:

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{Px + H}{Qx - I}, \tag{153}$$

und auch dieser Ausdruck erhält einen constanten Werth, wenn die zweite der Gleichungen (151) erfüllt ist.

306. Die Gleichung (64) der 191. Nummer, durch welche wir diejenigen unter den durch OX gelegten Ebenen bestimmt haben, für welche sich die Complex-Curve in das System zweier Puncte auflöst, besitzt, wenn die zweite der Gleichungen (151):

$$PI + HQ = 0$$

erfüllt ist, die doppelte Wurzel:

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{H}{I} = \frac{P}{Q}. \tag{154}$$

Diesem Werthe von tang φ entsprechend löst sich die Complex-Curve in ein System von zwei Puncten auf, welche beide auf der Axe OX liegen.

Denn der Werth von x_0 (152), welcher den Berührungspunct der Complex-Curve mit OX bestimmt, erscheint für den Werth (154) von tang φ unter der Form $\frac{0}{0}$.

Ebenso hat, unter derselben Voraussetzung, die Gleichung (67) der 192. Nummer, durch die wir diejenigen Puncte der Axe OX bestimmt haben, für welche sich der Complex-Kegel in das System zweier Ebenen auflöst, die doppelte Wurzel:

$$x = -\frac{H}{P} = \frac{I}{Q}. \tag{155}$$

Diesem Werthe von x entsprechend löst sich der Complex-Kegel in das System zweier Ebenen auf, die sich nach OX schneiden. Denn der zugehörige Werth von tang φ_0 (153) erscheint unter der Form $\frac{0}{0}$.

Dies gibt die folgende geometrische Definition der singulären Linien, Puncte und Ebenen eines Complexes des zweiten Grades.

Die Verbindungslinie solcher zwei Puncte, in welche sich eine Complex-Curve für besondere Lagen ihrer Ebenen auflöst, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Durchschnittslinien solcher zwei Ebenen, in welche ein Complex-Kegel bei einer besonderen Annahme seines Mittelpuncts zerfällt, ist eine singuläre Linie des Complexes. Diejenigen Ebenen und Puncte, für welche sich die Complex-Curve, bezüglich der Complex-Kegel, in der fraglichen Weise particularisirt, sind singuläre Ebenen und singuläre Puncte des Complexes.

Insbesondere also sind die acht Linien einer Complexfläche, welche wir bezüglich als singuläre Strahlen und als singuläre Axen derselben bezeichnet haben (n. 187, 189), und die vier singulären Ebenen und vier singulären Puncte einer Complexfläche (n. 215) singuläre Linien, Ebenen, Puncte des Complexes.

Wir haben in dem vorigen Paragraphen (n. 275 — n. 283) die unendlich weit liegende Ebene für eine singuläre Ebene des Complexes genommen und die ihr entsprechende singuläre Linie zu YZ parallel gewählt. In Uebereinstimmung mit dem Vorstehenden fanden wir, dass die Complex-Curven in allen zu YZ parallelen Ebenen Parabeln sind, deren Durchmesser-Richtung dieselbe ist (n. 281). Die gemeinsame Richtung der Durchmesser aller Parabeln bezeichnet den der in YZ unendlich weit liegenden singulären Linie zugehörigen singulären Punct.

307. Wenn gleichzeitig

$$A,\ H,\ I,\ P,\ Q$$

verschwinden, so particularisirt sich die Beziehung der singulären Linie, welche mit OX zusammenfällt, zu dem Complexe. Die Werthe von x_0 (152) und tang φ_0 (153) erscheinen dann, unabhängig von der Annahme der Veränderlichen tang φ und x, unter der Form $\frac{0}{0}$. Dem entsprechend löst sich die Complex-Curve in einer beliebigen durch OX gelegten Ebene in das System zweier Puncte auf, welche auf OX liegen, und der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct ein beliebiger Punct von OX ist, zerfällt in das System zweier Ebenen, die sich nach OX schneiden.

Für die Gleichung des Polar-Complexes der Axe OX erhalten wir unter dieser Constanten-Bestimmung die folgende:

$$\sigma = 0,$$

welche alle Linien darstellt, die die Axe OX schneiden. Die Axe OX ist eine Doppellinie des gegebenen Complexes geworden (vergl. n. 300). Eine Doppellinie ist sonach eine singuläre Linie, deren Beziehung zu dem Complexe sich in der Weise particularisirt hat, dass ein jeder auf ihr angenommener Punct ein singulärer Punct und jede durch sie hindurchgelegte Ebene eine singuläre Ebene des Complexes ist.

In der 284.—286. Nummer haben wir die in YZ unendlich weit liegende gerade Linie zu einer Doppellinie des Complexes gewählt, und, dem entsprechend, gefunden, dass alle Complex-Cylinder, deren Seiten der Ebene YZ parallel sind, in Systeme von zwei zu YZ parallelen Ebenen zerfallen.

Im Allgemeinen enthält ein gegebener Complex des zweiten Grades keine Doppellinie. Es verlangt das eine einfache Particularisation desselben.

308. Wir wollen die Gleichung des gegebenen Complexes des zweiten Grades wiederum unter der folgenden Form schreiben:

$$\Omega = 0. \tag{156}$$

Ohne den Complex selbst zu ändern, können wir zu dieser Gleichung die Identität

$$-r\sigma + s\varrho + h\eta = 0, \tag{157}$$

mit einem beliebigen Factor multiplicirt, hinzuaddiren. Dann erhalten wir:

$$\Omega + \lambda(-r\sigma + s\varrho + h\eta) = 0. \tag{158}$$

Dem entsprechend wird die Gleichung des Polar-Complexes, der einer gegebenen geraden Linie $(r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta')$ zugeordnet ist, die folgende:

$$\left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right)-\lambda\sigma'\right]r+\left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right)+\lambda\varrho'\right]s+\left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right)+\lambda\eta'\right]h-\left[\left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)+\lambda r'\right]\sigma$$
$$+\left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right)+\lambda s'\right]\varrho+\left[\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right)+\lambda h'\right]\eta=0, \qquad (159)$$

die sich auch unter der anderen Form schreiben lässt:

$$\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}-\lambda\sigma\right)r'+\left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}+\lambda\varrho\right)s'+\left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}+\lambda\eta\right)h'$$
$$-\left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}+\lambda r\right)\sigma'+\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}+\lambda s\right)\varrho'+\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}+\lambda h\right)\eta'=0. \qquad (160)$$

Wenn wir dann λ einen festen Werth ertheilen, knüpft sich an diese doppelte Form derselben Gleichung in dem nämlichen Sinne eine Theorie der Reciprocität, wie sie Gergonne zuerst bei ebenen Curven und Flächen der zweiten Ordnung entwickelt hat.*) Wir können dieselbe in den folgenden Worten zusammenfassen:

Einer jeden geraden Linie, welche dem Polar-Complexe einer gegebenen geraden Linie angehört, entspricht ein Polar-Complex, welchem, umgekehrt, die gegebene gerade Linie angehört.

Die Gesammtheit aller geraden Linien des Raumes mit ihren Polar-Complexen bilden ein Polarsystem. Für die Gleichung desselben können wir die vorstehenden beiden (159) und (160), die unter sich identisch sind, ansehen, indem wir neben $r, s, h, -\sigma, \varrho, \eta$ auch $r', s', h', -\sigma', \varrho', \eta'$, aber unabhängig davon, als veränderlich betrachten. Einer anderen Annahme der unbestimmten Constante λ entsprechend erhalten wir aus dem gegebenen Complexe des zweiten Grades ein anderes Polarsystem, welches zu dem Complexe in derselben Beziehung steht, wie das ursprünglich ausgewählte. Während ein Complex des zweiten Grades von neunzehn Constanten abhängt, ist ein jedes der Polar-Systeme, welche demselben zugehören, durch zwanzig Constante bestimmt.

309. Um auszudrücken, dass die gegebene gerade Linie selbst dem ihr zugeordneten Polar-Complexe angehöre, erhalten wir, unabhängig von dem besonderen Werthe, den wir der Constante λ beilegen wollen, unter Berücksichtigung der Gleichung (157), die folgende Bedingung:

*) Geometrie des Raumes. n. 258.

$$\left[\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right] r' + \left[\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right] s' + \ldots . \equiv (\Omega) = 0. \tag{161}$$

Diejenigen Linien, welche den ihnen zugeordneten Polar-Complexen selbst angehören, sind in allen Polar-Systemen dieselben und fallen mit den Linien des gegebenen Complexes des zweiten Grades zusammen.

Wenn in einem Polarsysteme, als dessen Gleichung wir die Gleichung (159) betrachten wollen, der Polar-Complex einer gegebenen geraden Linie ein Complex von der besonderen Art sein soll, dessen Linien sämmtlich eine feste gerade Linie schneiden, so erhalten wir, nach den Erörterungen der 45. Nummer, indem wir, wie in der 299. Nummer,

$$(\Phi) \equiv -\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right)\cdot\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right) + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right)$$

setzen, unter Berücksichtigung der Gleichung (157), die folgende:

$$(\Phi) + \lambda\,(\Omega) = 0. \tag{162}$$

Diese Gleichung wird unabhängig von dem besonderen Werthe, den wir λ gegeben haben, erfüllt, sobald die beiden Gleichungen:

$$(\Phi) = 0, \qquad (\Omega) = 0$$

befriedigt werden. Es sind dies dieselben Gleichungen, durch welche wir, in der 300. Nummer, die singulären Linien des gegebenen Complexes bestimmt haben. Wir erhalten also, in Uebereinstimmung mit dem Früheren, den Satz, dass die Polar-Complexe der singulären Linien des gegebenen Complexes in allen zugehörigen Polar-Systemen Complexe von der besonderen Art sind, deren sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden.

310. Wir wollen λ in dem Folgenden, unbeschadet der Allgemeinheit, gleich Null setzen und das durch diesen Werth von λ bestimmte Polarsystem einer näheren Betrachtung unterwerfen. Es schreibt sich dann die Gleichung des Polarsystems unter der doppelten Form:

$$\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right) r + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta s}\right) s + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta h}\right) h - \left(-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\sigma + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\right)\varrho + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\right)\eta = 0, \tag{163}$$

und:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta r}\cdot r' + \frac{\delta\Omega}{\delta s}\cdot s' + \frac{\delta\Omega}{\delta h}\cdot h' + \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\cdot\sigma' + \frac{\delta\Omega}{\delta\varrho}\cdot\varrho' + \frac{\delta\Omega}{\delta\eta}\cdot\eta' = 0. \tag{164}$$

Sei eine gerade Linie gegeben. Derselben entspricht in dem Polar-System ein Polar-Complex. Jeder Linie des lezteren gehört ein Polar-Complex an, der die gegebene gerade Linie enthält. Aber im Allgemeinen haben die Polar-Complexe, welche den Linien eines beliebig angenommenen linearen Complexes entsprechen, keine gerade Linie mit einander gemein. Dazu bedarf es einer besonderen Lage desselben gegen das gegebene Polar-System.

Die Polar-Complexe, welche zwei gegebenen geraden Linien entsprechen, bestimmen eine lineare Congruenz. Die gegebenen beiden geraden Linien gehören einem jeden derjenigen Polar-Complexe an, die den Linien der Congruenz entsprechen. Und umgekehrt haben auch die Polar-Complexe aller Linien einer beliebig angenommenen linearen Congruenz zwei feste gerade Linien gemein. Denn vier Linien der Congruenz bestimmen durch ihre Polar-Complexe zwei gerade Linien. Die Polar-Complexe dieser zwei geraden Linien haben vier Linien der gegebenen Congruenz und somit alle derselben gemein.

Wenn drei gerade Linien gegeben sind, so bestimmen die Polar-Complexe ein Hyperboloid durch die Linien einer Erzeugung desselben. Eine beliebige der Linien derselben Erzeugung, die wir als die erste bezeichnen wollen, besitzt einen Polar-Complex, dem die gegebenen drei geraden Linien angehören. Die gegebenen drei geraden Linien bestimmen, als Linien erster Erzeugung, ein zweites Hyperboloid. Die beiden Hyperboloide entsprechen sich gegenseitig. Die Linien der ersten Erzeugung des zweiten Hyperboloids gehören den Polar-Complexen der Linien erster Erzeugung des ersten Hyperboloids an, und ebenso die Linien erster Erzeugung des ersten Hyperboloids den Polar-Complexen der Linien erster Erzeugung des zweiten Hyperboloids. Die zweite Erzeugung jedes der beiden Hyperboloide kommt dabei nicht weiter in Betracht. Jeder Erzeugung entsprechend ist einem gegebenen Hyperboloide ein zweites zugeordnet.

Indem wir die drei gegebenen geraden Linien insbesondere so annehmen, dass sie sich in einem Puncte schneiden oder dass sie in einer Ebene liegen, bestimmen sie alle Linien, welche durch einen festen Punct hindurchgehen, oder welche in einer festen Ebene enthalten sind. Es entspricht also in dem Polar-Systeme jedem Puncte und jeder Ebene die eine Erzeugung eines Hyperboloids. Der Polar-Complex, welcher einer beliebigen Linie dieser Erzeugung angehört, ist von der besonderen Art, dass alle seine Linien eine feste gerade Linie schneiden. Diese feste gerade Linie geht bezüglich durch den gegebenen Punct oder liegt in der gegebenen Ebene. Die Linien der einen Erzeugung der Hyperboloids gehören dem durch die Gleichung (162) bestimmten Complexe an. Das Hyperboloid ist nicht selbst particularisirt, sondern nur seine Lage zu dem Polar-System.

Nehmen wir insbesondere für die drei sich schneidenden geraden Linien die drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ oder die drei in den Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY unendlich weit liegenden geraden Linien, so erhalten wir zur Bestimmung desjenigen Hyperboloids, welches bezüglich dem Coordinaten-Anfangspuncte oder der unendlich weit liegenden Ebene zugeordnet ist, die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta r} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega}{\delta s} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega}{\delta h} = 0, \tag{165}$$

oder:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega}{\delta\varrho} = 0, \qquad \frac{\delta\Omega}{\delta\eta} = 0. \tag{166}$$

Unter beiden Annahmen wird die Gleichung (162):

$$\Phi \equiv -\frac{\delta\Omega}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \frac{\delta\Omega}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho} + \frac{\delta\Omega}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\eta} = 0$$

erfüllt, welche diejenigen geraden Linien darstellt, denen in dem gegebenen Polar-System ($\lambda = 0$) solche Polar-Complexe entsprechen, deren sämmtliche Linien eine feste gerade Linie schneiden.

§ 5.

Fläche vierter Ordnung und Classe, von den singulären Puncten des Complexes gebildet, von den singulären Ebenen desselben umhüllt.

311. Wir haben einen Punct, dessen Complex-Kegel sich in das System zweier Ebenen auflöst, einen singulären Punct, und eine Ebene, deren Complex-Curve in das System zweier Puncte ausartet, eine singuläre Ebene des Complexes genannt.

Die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, in welche sich der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct ein singulärer Punct ist, aufgelöst hat, so wie die Verbindungslinie der beiden Puncte, in welche die Complex-Curve, deren Ebene eine singuläre Ebene ist, zerfällt, sind singuläre Linien des Complexes. In diesem Sinne entspricht einer jeden singulären Linie ein singulärer Punct und eine singuläre Ebene. Alle Complex-Curven, welche in Ebenen liegen, die durch eine singuläre Linie hindurchgelegt sind, berühren dieselbe in dem entsprechenden singulären Puncte, und alle Complex-Kegel, deren

Mittelpuncte auf einer singulären Linie angenommen sind, berühren nach derselben die entsprechende singuläre Ebene. Wir wollen den einer singulären Linie entsprechenden singulären Punct und die derselben entsprechende singuläre Ebene als einander zugeordnet bezeichnen.

Die singulären Linien eines gegebenen Complexes bilden eine Congruenz vom vierten Grade. Dieselbe ist durch die zweigliedrige Gruppe zweier Complexe des zweiten Grades bestimmt, von denen der eine der gegebene ist und der andere erhalten wird, wenn man in die Bedingungs-Gleichung des zweiten Grades, welcher die Linien-Coordinaten genügen müssen, an Stelle der Coordinaten die nach denselben genommenen partiellen Differentialquotienten der Gleichung des gegebenen Complexes einsetzt. Im Allgemeinen sind vier unter den Tangenten einer gegebenen Complex-Curve und vier unter den Seiten eines gegebenen Complex-Kegels singuläre Linien. Wenn insbesondere die Complex-Curve sich in das System zweier Puncte oder der Complex-Kegel sich in das System zweier Ebenen auflöst, fallen zwei von den vier singulären Linien bezüglich in die Verbindungslinie der beiden Puncte oder in die Durchschnittslinie der beiden Ebenen zusammen.

312. Wenn sich die Complex-Curve in einer gegebenen Ebene so particularisirt, dass sie sich in zwei Puncte auflöst, welche in einen zusammenfallen, wollen wir die Ebene eine Doppelebene des Complexes nennen. Als einen Doppelpunct bezeichnen wir einen solchen, der Mittelpunct eines Complex-Kegels ist, welcher in das System zweier, in einen zusammenfallender Ebenen ausgeartet ist. Derjenige Punct, welcher von den Linien des Complexes in einer Doppel-Ebene umhüllt wird, ist darum noch kein Doppelpunct, so wenig wie die Ebene, die von den durch einen Doppelpunct hindurchgehenden Linien des Complexes gebildet wird, eine Doppelebene.

Eine jede Linie des gegebenen Complexes, welche in einer Doppelebene liegt oder durch einen Doppelpunct hindurchgeht, ist eine singuläre Linie desselben. Die Doppelebenen und Doppelpuncte sind solche Ebenen und Puncte, welche unendlich viele Linien aus der Congruenz der singulären Linien enthalten.

Einer jeden singulären Linie, welche in einer Doppelebene liegt, entspricht diese als singuläre Ebene. Der jeder einzelnen singulären Linie entsprechende singuläre Punct fällt darum noch nicht mit dem singulären Puncte zusammen, in welchem sie sich alle schneiden. Vielmehr entspricht einer jeden singulären Linie ein zweiter, im Allgemeinen von dem ersten verschiedener singulärer Punct. Wenn sich die singuläre Linie in der Doppelebene um den festen

Punct dreht, welcher in derselben von den Linien des Complexes umhüllt wird, beschreibt der entsprechende singuläre Punct eine Curve der zweiten Ordnung, welche durch den festen Punct hindurchgeht. Während einer singulären Ebene im Allgemeinen ein singulärer Punct zugeordnet ist, entsprechen einer Doppelebene unendlich viele zugeordnete singuläre Puncte, welche auf einer Curve der zweiten Ordnung liegen.

Einer jeden derjenigen singulären Linien, welche durch einen Doppelpunct hindurchgehen, entspricht dieser als singulärer Punct. Aber jeder derselben entspricht, im Allgemeinen, eine singuläre Ebene, welche nicht mit derjenigen festen Ebene zusammenfällt, die von den durch den Doppelpunct hindurchgehenden Linien des Complexes gebildet wird. Alle diese Ebenen umhüllen eine Kegelfläche der zweiten Classe, die insbesondere die feste Ebene berührt. Während einem singulären Puncte im Allgemeinen eine singuläre Ebene zugeordnet ist, entsprechen einem Doppelpuncte unendlich viele zugeordnete singuläre Ebenen, welche eine Kegelfläche der zweiten Classe umhüllen.

Die analytische Bestätigung der vorstehenden geometrischen Folgerungen entnehmen wir der 289. und 290. Nummer, in denen die unendlich weit entfernte Ebene für eine Doppelebene des Complexes genommen ist.

313. Eine singuläre Linie kann sich in der Art particularisiren, dass eine jede durch sie hindurchgelegte Ebene eine singuläre Ebene und dass ein jeder auf ihr angenommener Punct ein singulärer Punct ist. Solch' eine gerade Linie haben wir eine Doppellinie des Complexes genannt (n. 307). Aber es verlangt eine Particularisation des gegebenen Complexes, wenn derselbe eine Doppellinie enthalten soll. Wir schliessen die Möglichkeit, dass der gegebene Complex sich in der dazu nöthigen Weise particularisire, von der ferneren Betrachtung aus.

In einem gegebenen Complexe kann es ausgezeichnete Puncte oder Ebenen von der Art geben, dass alle durch dieselben hindurchgehenden, bezüglich alle in denselben liegenden geraden Linien Linien des Complexes sind. Dann ist jede durch den Punct hindurchgelegte Ebene eine singuläre Ebene, jeder in der Ebene angenommene Punct ein singulärer Punct. Solch' eine Ebene haben wir in der 292. Nummer mit der unendlich weit entfernten Ebene zusammenfallen lassen. Nach den Erörterungen dieser Nummer verlangt es eine sechsfache Particularisation, wenn für einen gegebenen Complex die unendlich weit liegende Ebene von dieser besonderen Art sein soll.

Im Allgemeinen also gibt es derartige Ebenen und Puncte nicht. Wir sehen in dem Folgenden von der Möglichkeit ab, dass der gegebene Complex sich dementsprechend particularisirt habe.

314. Damit sich ein gegebener Kegel zweiter Ordnung in das System zweier Ebenen, oder eine gegebene Curve der zweiten Classe in das System zweier Puncte auflöse, ist eine Bedingungs-Gleichung zu erfüllen. Es wird also von den singulären Puncten eines Complexes eine Fläche gebildet, und von den singulären Ebenen desselben eine Fläche umhüllt. Dagegen sind drei Bedingungen zu erfüllen, wenn die beiden Ebenen, in welche sich ein Complex-Kegel, bezüglich die beiden Puncte, in welche sich eine Complex-Curve auflöst, zusammenfallen sollen. Es gibt also eine endliche Anzahl von Doppelpuncten und Doppelebenen.

In dem sechsten und siebenten Paragraphen des vorigen Abschnitts haben wir nachgewiesen, dass auf der Coordinaten-Axe OX, welche wir zur Doppellinie einer Complexfläche genommen hatten und die ganz beliebig angenommen worden war, vier singuläre Puncte liegen und dass durch dieselbe vier singuläre Ebenen hindurchgehen (vgl. n. 215). Wir erhalten somit unmittelbar die folgenden Sätze:

Die von den singulären Puncten eines Complexes des zweiten Grades gebildete Fläche ist von der vierten Ordnung.

Die von den singulären Ebenen eines Complexes des zweiten Grades umhüllte Fläche ist von der vierten Classe.

315. Um die Gleichung der Fläche der singulären Puncte in Punct-Coordinaten zu erhalten, gehen wir von der Gleichung (II) des Complexes zweiten Grades in Strahlen-Coordinaten aus. Wir haben auszudrücken, dass sich der Kegel, welchen die Gleichung des Complexes darstellt, sobald wir den Veränderlichen x, y, z feste Werthe ertheilen, in ein System zweier Ebenen auflöse. Von den sechs Strahlen-Coordinaten:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y)$$

können wir die letzten drei auf folgende Weise schreiben:

$$\big((y-y')z - y(z-z')\big),\ \big(x(z-z') - (x-x')z\big),\ \big((x-x')y - x(y-y')\big).$$

Dadurch nimmt die Gleichung II des Complexes die folgende Form an:

$$\begin{aligned} a(x-x')^2 + 2b(x-x')(y-y') + c(y-y')^2 \\ + 2d(x-x')(z-z') + 2e(y-y')(z-z') + f(z-z')^2 = 0, \quad (167) \end{aligned}$$

wo a, b, c, d, e, f Functionen des zweiten Grades in x, y, z sind. Insbesondere finden wir:

$$\left.\begin{aligned}
a &= A + Ez^2 + Fy^2 - 2Kyz - 2Pz + 2Qy,\\
b &= I - Fxy + Kxz + Lyz - Mz^2 + (N-O)z - Qx + Ry,\\
c &= B + Dz^2 + Fx^2 - 2Lxz - 2Rx + 2Sz,\\
d &= H - Exz + Kxy - Ly^2 + Myz - Ny + Px - Uz,\\
e &= G - Dyz - Kx^2 + Lxy + Mxz + Ox - Sy + Tz,\\
f &= C + Dy^2 + Ex^2 - 2Mxy - 2Ty + 2Ux.
\end{aligned}\right\} \quad (168)$$

Um auszudrücken, dass sich der durch die Gleichung (167) dargestellte Kegel in das System zweier Ebenen auflöse, erhalten wir, nach der 186. Nummer, die folgende Bedingung:

$$acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0. \quad (169)$$

Wenn wir in diese Gleichung für a, b, c, d, e, f die Werthe aus der Gleichung (168) einsetzen, bekommen wir die gesuchte Gleichung der Fläche. Dieselbe ist scheinbar vom sechsten Grade. Es werden sich also bei der wirklichen Ausführung der in (169) angedeuteten Multiplicationen die Glieder fünfter und sechster Ordnung in x, y, z fortheben.

316. Wir erhalten die Gleichung der von den singulären Ebenen des Complexes umhüllten Fläche in Ebenen-Coordinaten, wenn wir in den vorstehenden Gleichungen (168) nach den Vertauschungsregeln der 153. Nummer:

$$x, y, z \text{ mit } t, u, v$$

und

$$A, B, C, \qquad G, H, I, \qquad P, Q, R$$

bezüglich gegenseitig mit

$$D, E, F, \qquad K, L, M, \qquad S, T, U$$

vertauschen. Ungeändert bleiben dabei die Constanten:

$$N, O.$$

Wenn wir nach der Vertauschung statt a, a', statt b, b' u. s. w. schreiben, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
a' &= D + Bv^2 + Cu^2 - 2Guv - 2Sv + 2Tu,\\
b' &= M - Ctu + Gtv + Huv - Iv^2 + (N-O)v - Tt + Uu,\\
c' &= E + Av^2 + Ct^2 - 2Htv - 2Ut + 2Pv,\\
d' &= L - Btv + Gtu - Hu^2 + Iuv - Nu + St - Rv,\\
e' &= K - Auv - Gt^2 + Htu + Itv + Ot - Pu + Qv,\\
f' &= F + Au^2 + Bt^2 - 2Itu - 2Qu + 2Rt,
\end{aligned}\right\} \quad (170)$$

und wir erhalten die Gleichung der Fläche unter der folgenden Form:

$$a'c'f' + 2b'd'e' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2 = 0. \quad (171)$$

Bezüglich der Reduction der vorstehenden Gleichung, die in t, u, v scheinbar vom sechsten Grad ist, auf den vierten Grad in diesen Veränderlichen gilt das in der vorigen Nummer Gesagte.

Wenn wir die Ausdrücke (170) für a', b', c', d', e', f' durch Einführung einer vierten Veränderlichen w homogen machen und dann in die Gleichung (171) einsetzen, so wird diese allerdings vom sechsten Grade und reducirt nur dadurch auf den vierten, dass sich von ihr ein Factor w^2 absondert. Die Gleichung (171) sagt, geometrisch gedeutet, nicht sowohl aus, dass sich die Complex-Curve in einer gegebenen Ebene t, u, v, w in das System zweier Puncte auflöse, als dass derjenige Kegel zweiter Classe, der sich durch die fragliche Complex-Curve und den Coordinaten-Anfangspunct als Mittelpunct hindurchlegen lässt, in das System zweier umhüllter Axen zerfällt. Es findet das für eine jede Ebene statt, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct hindurchgeht, und daher der Factor w^2, welcher, gleich Null gesetzt, den Coordinaten-Anfangspunct darstellt.

317. Eine beliebig angenommene gerade Linie schneidet die Fläche der singulären Puncte im Allgemeinen in vier Puncten, und es lassen sich durch dieselbe im Allgemeinen vier Tangential-Ebenen an die Fläche der singulären Ebenen legen. Wenn die angenommene gerade Linie insbesondere eine singuläre Linie des Complexes ist, so fallen zwei der vier singulären Puncte in den entsprechenden Punct und zwei der vier singulären Ebenen in die entsprechende Ebene zusammen (vergl. n. 306.). Eine singuläre Linie berührt also sowohl die Fläche der singulären Puncte als die Fläche der singulären Ebenen. Berührungs-Punct mit der ersten Fläche ist der entsprechende singuläre Punct, Berührungs-Ebene mit der zweiten Fläche die entsprechende singuläre Ebene.

Für solche singuläre Linien, welche in einer Doppel-Ebene des Complexes liegen, fallen von den vier Durchschnittspuncten mit der Fläche der singulären Puncte paarweise zwei zusammen. Solche Linien sind also Doppeltangenten der Fläche der singulären Puncte, in dem Sinne, dass sie in zwei verschiedenen Puncten diese Fläche berühren.

Ebenso fallen von den vier Tangential-Ebenen, welche sich, im Allgemeinen, durch eine gegebene gerade Linie an die Fläche der singulären Ebenen legen lassen, paarweise zwei in eine zusammen, sobald die gegebene gerade Linie eine der singulären Linien ist, welche durch einen Doppelpunct des Complexes hindurchgehen. Diese Linien sind also Doppeltangenten der Fläche der singulären Ebenen, in dem Sinne, dass sie nach zwei verschiedenen Ebenen diese Fläche berühren.

318. Die vier singulären Linien des Complexes, welche in einer beliebigen Ebene liegen, berühren die in dieser Ebene von Linien des Complexes umhüllte Curve in den ihnen entsprechenden singulären Puncten. In denselben Puncten berühren dieselben geraden Linien die Fläche vierter Ordnung der singulären Puncte. Die Durchschnitts-Curve vierter Ordnung dieser Fläche mit einer beliebigen Ebene berührt also die in dieser Ebene liegende Complex-Curve in vier Puncten. Von den acht Durchschnitts-Puncten, welche die beiden Curven haben müssen, fallen jedesmal zwei in einen Berührungspunct zusammen.

Ebenso berührt derjenige Complex-Kegel, welcher einen beliebigen Punct des Raumes zum Mittelpuncte hat, den Kegel vierter Classe, welcher sich von dem beliebig angenommenen Puncte aus an die von den singulären Ebenen umhüllte Fläche der vierten Classe legen lässt, nach vier geraden Linien, welche die vier singulären Linien sind, die durch ihn hindurchgehen. Gemeinsame Tangential-Ebenen der beiden Kegel nach diesen vier geraden Linien sind die entsprechenden singulären Ebenen.

Wir wollen für die beliebig angenommene Ebene insbesondere eine singuläre Ebene wählen. Der in derselben von Linien des Complexes umhüllte Ort wird, nach wie vor, von der Durchschnitts-Curve der singulären Ebene mit der Fläche der singulären Puncte in vier Puncten berührt. Die gemeinsamen Tangenten in den vier Berührungspuncten sind singuläre Linien. Die Berührungspuncte der singulären Linien sind die bezüglich entsprechenden singulären Puncte. Von den vier singulären Linien, welche, im Allgemeinen, in einer gegebenen Ebene liegen, fallen für eine singuläre Ebene zwei in die dieser entsprechende singuläre Linie zusammen. Die beiden anderen gehen in beliebiger Richtung jede durch einen der beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve aufgelöst hat. Von den vier Berührungspuncten der Durchschnitts-Curve der Fläche der singulären Puncte mit dem von den Linien des Complexes umhüllten Ort fallen also zwei in die beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve in der singulären Ebene aufgelöst hat, während die anderen beiden mit dem der gegebenen singulären Ebene zugeordneten singulären Puncte zusammenfallen.

Die Durchschnitts-Curve vierter Ordnung der Fläche der singulären Puncte mit einer beliebigen singulären Ebene hat in dem dieser Ebene zugeordneten singulären Puncte einen Doppelpunct.

Auf dieselbe Art beweisen wir den Satz:

Die Kegelfläche vierter Classe, welche sich von einem beliebigen singulären Puncte aus an die Fläche der singulären Ebenen legen lässt, hat die diesem Puncte zugeordnete singuläre Ebene zur Doppelebene.

319. Die analytische Bestätigung dieser geometrischen Folgerungen entnehmen wir den Gleichungen (169) und (171), welche die Fläche der singulären Puncte und die Fläche der singulären Ebenen bezüglich in Punct- und Ebenen-Coordinaten darstellen. Wenn wir annehmen, dass die Ebene XZ eine singuläre Ebene sei und dass die entsprechende singuläre Linie mit OX, der zugeordnete singuläre Punct mit O zusammenfalle, so erhalten wir aus der 305. und der 306. Nummer die folgende Constanten-Bestimmung:

$$A = 0, \qquad H = 0, \qquad I = 0, \qquad P = 0.$$

Dadurch bekommen die Ausdrücke a, b, c, d, e, f (168), wenn wir in denselben zugleich y' verschwinden lassen, die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned} a &= Ez^2, \\ b &= Kxz - Mz^2 + (N-O)z - Qx, \\ c &= B + Dz^2 + Fx^2 - 2Lxz - 2Rx + 2Sz, \\ d &= -Exz - Uz, \\ e &= G - Kx^2 + Mxz + Ox + Tz, \\ f &= C + Ex^2 + 2Ux. \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Wenn wir in denselben x und z gegen Constante, so wie zweite Potenzen von x und z gegen erste vernachlässigen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} a &= Ez^2, \\ b &= (N-O)z - Qx, \\ c &= B, \\ d &= -Uz, \\ e &= G, \\ f &= C. \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

Und indem wir diese Werthe in die Gleichung (169):

$$acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0$$

einsetzen, finden wir die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} BCEz^2 - 2GUz\big((N-O)z - Qx\big) - EG^2z^2 \\ - BU^2z^2 - C\big((N-O)z - Qx\big)^2 = 0 \end{aligned} \tag{174}$$

um diejenigen singulären Puncte darzustellen, welche in der singulären Ebene XZ in der Nähe des zugeordneten singulären Punctes O liegen. Diese Gleichung enthält nur Glieder zweiten Grades in x und z. Die Durchschnitts-Curve der Fläche der singulären Puncte mit der Ebene XZ besitzt also, in Uebereinstimmung mit den Schlussfolgerungen der vorigen Nummer, im Coordinaten-Anfangspuncte einen Doppelpunct.

Wir mögen noch bemerken, dass dieser Doppelpunct ein Rückkehrpunct wird, wenn ausser den Constanten A, H, I, P auch noch die Constante Q verschwindet. Dann ist, nach den Erörterungen der 307. Nummer, die Axe OX eine Doppellinie des gegebenen Complexes.

Auf dieselbe Art können wir nachweisen, dass der Kegel vierter Classe, der sich von einem beliebigen singulären Puncte aus an die Fläche der singulären Ebenen legen lässt, die dem angenommenen singulären Puncte zugeordnete singuläre Ebene zur Doppelebene hat.

320. Nach dem Vorstehenden ist jede singuläre Ebene eine Tangential-Ebene der von den singulären Puncten gebildeten Fläche vierter Ordnung. Berührungspunct ist der zugeordnete singuläre Punct. Und umgekehrt ist jeder singuläre Punct ein Punct der von den singulären Ebenen umhüllten Fläche vierter Classe. Tangential-Ebene in demselben ist die zugeordnete singuläre Ebene.

Die Fläche vierter Ordnung, welche von den singulären Puncten des Complexes gebildet wird, und die Fläche vierter Classe, welche von den singulären Ebenen desselben umhüllt wird, sind identisch.

Eine jede singuläre Linie des Complexes berührt die Fläche vierter Ordnung und vierter Classe der singulären Puncte und singulären Ebenen. Der Berührungspunct mit der Fläche ist der entsprechende singuläre Punct, die Berührungsebene in demselben die entsprechende singuläre Ebene. Die beiden übrigen Schnittpuncte der singulären Linie mit der Fläche sind diejenigen beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve in der entsprechenden singulären Ebene aufgelöst hat. Ebenso sind die beiden übrigen Tangential-Ebenen, welche sich durch die singuläre Linie an die Fläche legen lassen, diejenigen beiden Ebenen, in welche der Complex-Kegel zerfällt, dessen Mittelpunct der zugeordnete Punct ist. Die Richtung der einer singulären Ebene und ihrem zugeordneten singulären Puncte entsprechenden singulären Linie ist durch die Fläche der singulären Puncte und singulären Ebenen noch nicht gegeben. Die

Fläche hängt von weniger willkürlichen Constanten ab, als der Complex zweiten Grades, welcher sie bestimmt.

321. Die von den singulären Puncten des Complexes gebildete und von den singulären Ebenen desselben umhüllte Fläche ist von der vierten Ordnung und der vierten Classe. Sie hat also, im Allgemeinen, sechszehn Doppelpuncte und sechszehn Doppelebenen. Die Möglichkeit, dass die Fläche sonstige Singularitäten, insbesondere einen Doppelstrahl und eine mit demselben zusammenfallende Doppelaxe besitzt, durch welche die Anzahl der Doppelpuncte und Doppelebenen erniedrigt würde, bleibt ausgeschlossen, so lange nicht der gegebene Complex selbst particularisirt ist.

Die Tangential-Ebenen der Fläche in einem Doppelpuncte derselben umhüllen einen Kegel der zweiten Classe und die Berührungspuncte derselben mit einer ihrer Doppelebenen bilden eine Curve der zweiten Ordnung. Wir haben in der 312. Nummer nachgewiesen, dass die singulären Ebenen, welche durch einen Doppelpunct des Complexes gehen, ebenfalls einen Kegel der zweiten Classe umhüllen, und dass die singulären Puncte, welche in einer Doppelebene des Complexes liegen, eine Curve der zweiten Ordnung bilden.

Die Doppelpuncte und Doppelebenen des Complexes fallen mit den Doppelpuncten und Doppelebenen der von den singulären Puncten gebildeten und von den singulären Ebenen umhüllten Fläche zusammen.

Und hieraus:

In einem Complexe zweiten Grades gibt es, im Allgemeinen, sechszehn Doppelpuncte und sechszehn Doppelebenen.

Welcher Punct in einer Doppelebene von den Linien des Complexes umhüllt, oder welche Ebene in einem Doppelpuncte von den Linien des Complexes gebildet wird, ist durch die Fläche der singulären Puncte und Ebenen noch nicht bestimmt. Der Punct kann ein beliebiger Punct der Berührungs-Curve, die Ebene eine beliebige Ebene des Berührungs-Kegels sein.

322. Wir gehen zu der Gleichung der Fläche der singulären Puncte und Ebenen in Plan-Coordinaten (171) zurück:

$$a'c'f' + 2b'd'e' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2 = 0.$$

Wir wollen dieselbe durch Einführung einer vierten Veränderlichen, w, homogen machen. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir die für a', b', c', d', e', f' gefundenen Ausdrücke (170) durch Einführung dieser Veränderlichen homogen machen und, nach Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung (171), den Factor w^2, welchen dieselbe erhält, vernachlässigen.

Wir wollen die Gleichung der Fläche in der folgenden Weise schreiben:

$$f = 0. \tag{175}$$

Dann erhalten wir für die Gleichung des Pols einer gegebenen Ebene (t', u', v', w') in Bezug auf diese Fläche, nach der 296. Nummer, die folgende:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) t + \left(\frac{\delta f}{\delta u}\right) u + \left(\frac{\delta f}{\delta v}\right) v + \left(\frac{\delta f}{\delta w}\right) w = 0.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten des Pols sind also:

$$x' = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)}{\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)},\ y' = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta u}\right)}{\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)},\ z' = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta v}\right)}{\left(\frac{\delta f}{\delta w}\right)}. \tag{176}$$

Wenn wir die homogen gemachten Ausdrücke a', b', c', d', e', f' in die Gleichung (171) einsetzen, so erhalten wir die Gleichung:

$$F = 0, \tag{177}$$

und es ist, nach dem Vorhergehenden:

$$F = w^2 f. \tag{178}$$

Es ist also erlaubt, in den Formeln (176) die nach t, u, v, w genommenen Differentialquotienten der Function f bezüglich durch die folgenden Functionen zu ersetzen:

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta u}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta v}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta w} - \frac{2F}{w}\right).$$

323. Wir wollen insbesondere die unendlich weit liegende Ebene auswählen. Der Einfachheit wegen setzen wir, was immer gestattet ist, in der Gleichung des gegebenen Complexes die Constanten K, L, M gleich Null. Dann erhalten die homogen gemachten Ausdrücke a', b', c', d', e', f' die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
a' &= Dw^2 + Bv^2 + Cu^2 - 2Guv - 2Svw + 2Tuw,\\
b' &= -Ctu + Gtv + Huv - Iv^2 + (N-O)vw - Ttw + Uuw,\\
c' &= Ew^2 + Av^2 + Ct^2 - 2Htv - 2Utw + 2Pvw,\\
d' &= -Btv + Gtu - Hu^2 + Iuv - Nuw + Stw - Rvw,\\
e' &= -Auv - Gt^2 + Htu + Itv + Otw - Puw + Qvw,\\
f' &= Fw^2 + Au^2 + Bt^2 - 2Itu - 2Quw + 2Rtw.
\end{aligned}\right\} \tag{179}$$

Wenn wir in diese Ausdrücke und ihre bezüglich nach t, u, v, w genommenen Differentialquotienten die Coordinaten der unendlich weit liegenden Ebene:

$$t' = 0,\ u' = 0,\ v' = 0,\ w' = w'$$

einsetzen, erhalten wir:

$$a' = Dw'^2,\ b' = 0,\ c' = Ew'^2,\ d' = 0,\ e' = 0,\ f' = Fw'^2 \tag{180}$$

und:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\delta a'}{\delta t}\right) = 0, && \left(\frac{\delta c'}{\delta t}\right) = -2Uw', && \left(\frac{\delta f'}{\delta t}\right) = 2Rw',\\
&\left(\frac{\delta a'}{\delta u}\right) = 2Tw', && \left(\frac{\delta c'}{\delta u}\right) = 0, && \left(\frac{\delta f'}{\delta u}\right) = -2Qw',\\
&\left(\frac{\delta a'}{\delta v}\right) = -2Sw', && \left(\frac{\delta c'}{\delta v}\right) = 2Pw', && \left(\frac{\delta f'}{\delta v}\right) = 0,\\
&\left(\frac{\delta a'}{\delta w}\right) = 2Dw', && \left(\frac{\delta c'}{\delta w}\right) = 2Ew', && \left(\frac{\delta f'}{\delta w}\right) = 2Fw'.
\end{aligned}\right\} \tag{181}$$

Es ist für das Folgende unnöthig, die Differentialquotienten von b', d', e' hinzuschreiben.

Nach den vorstehenden Gleichungen erhalten die vier Ausdrücke:

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta u}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta v}\right),\ \left(\frac{\delta F}{\delta w} - 2\frac{F}{w}\right),$$

wo:

$$F \equiv a'c'f' + 2b'd'e' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2,$$

für die unendlich weit entfernte Ebene, indem nur das eine Glied

$$a'c'f'$$

in Betracht kommt, die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right) = 2Dw'^5(ER - FU),\\
&\left(\frac{\delta F}{\delta u}\right) = 2Ew'^5(FT - DQ),\\
&\left(\frac{\delta F}{\delta v}\right) = 2Fw'^5(DP - ES),\\
&\left(\frac{\delta F}{\delta w} - 2\frac{F}{w}\right) = 6DEFw'^5 - 2DEFw'^5 = 4DEFw'^5.
\end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Und also werden die Coordinaten des Pols der unendlich weit liegenden Ebene mit Bezug auf die Fläche, oder, wie wir sagen können, die Coordinaten des Mittelpunctes der Fläche:

$$x' = \frac{ER - FU}{2EF},\ y' = -\frac{DQ - FT}{2DF},\ z' = \frac{DP - ES}{2DE}. \tag{183}$$

Es sind dies dieselben Ausdrücke, welche wir in der 240. Nummer für die Coordinaten des Mittelpunctes des Complexes gefunden haben. Und somit haben wir den Satz:

Der Mittelpunct eines Complexes zweiten Grades fällt mit dem Mittelpunct der Fläche seiner singulären Puncte und Ebenen zusammen.

Damit in Uebereinstimmung rückt der Mittelpunct des Complexes unendlich weit, wenn die unendlich entfernte Ebene insbesondere eine singuläre Ebene ist, und fällt in unendlicher Entfernung mit dem derselben zugeordneten singulären Puncte zusammen, demjenigen Puncte, in welchem dieselbe die Fläche der singulären Puncte und Ebenen berührt. (Vergl. n. 279.)

Wenn die unendlich weit liegende Ebene eine Doppelebene des Complexes ist, so wird der Mittelpunct desselben unbestimmt. Sein geometrischer Ort ist eine in der unendlich weit entfernten Ebene liegende Curve der zweiten Ordnung. Diese Curve ist die Berührungs-Curve der Doppelebene mit der Fläche der singulären Puncte und Ebenen. (Vergl. n. 289.)

Wenn endlich die Beziehung der unendlich weit liegenden Ebene zu dem Complexe sich so particularisirt, dass eine jede in ihr liegende Linie eine Linie des Complexes, und in Folge dessen ein jeder ihrer Puncte ein singulärer Punct desselben ist, so kann weder von einem bestimmten Mittelpuncte des Complexes noch von einem solchen der Fläche der singulären Puncte und Ebenen mehr die Rede sein.

§ 6.

Pol einer gegebenen Ebene, Polar-Ebene, einem gegebenen Puncte mit Bezug auf den Complex zugeordnet.

324. Wir kehren zu den Betrachtungen der drei ersten und insbesondere des dritten Paragraphen dieses Abschnitts zurück. Wir haben in denselben die Beziehung des gegebenen Complexes zweiten Grades zu der unendlich weit entfernten Ebene untersucht. Es beschäftigte uns zunächst die Gesammtheit der Durchmesser des Complexes — solcher gerader Linien, welche mit Bezug auf den Complex den in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden geraden Linien als Polaren zugeordnet sind —, dann die Gesammtheit der Cylinder des Complexes — solcher Complex-Kegel, deren Mittelpuncte in der unendlich weit entfernten Ebene liegen — und der Axen dieser Cylinder — der Polar-Linien derselben mit Bezug auf die durch ihre Mittelpuncte gehende unendlich weit entfernte Ebene —. Dann betrachteten wir die von Linien des Complexes in der unendlich weit entfernten Ebene

und in solchen Ebenen, welche derselben unendlich nahe liegen, umhüllten Curven und stellten dieselben durch einen Complex von ausgezeichneter Einfachheit und characteristischer Lage gegen das Coordinaten-System, durch den Asymptoten-Complex des gegebenen, dar.

Alle diese Betrachtungen und darum auch alle Resultate, die wir gefunden haben, können wir von der unendlich weit liegenden Ebene nach bekannten Regeln, die schon im Vorstehenden ihren Ausdruck finden, auf eine beliebige Ebene des Raums übertragen. Der Grund für diese Uebertragbarkeit liegt in der Identität der analytischen Operationen, welche in dem einen wie in dem anderen Falle der geometrischen Betrachtung entsprechen.

Wir wollen die beliebig angenommene Ebene insbesondere mit einer der drei Coordinaten-Ebenen zusammenfallen lassen. Der Vertauschung der unendlich weit liegenden Ebene mit einer der Coordinaten-Ebenen entsprechend erhalten wir eine Vertauschung der Linien-Coordinaten unter sich und damit eine gegenseitige Vertauschung der Constanten in der Gleichung des gegebenen Complexes. Wir stellen im Folgenden die Regeln für diese Vertauschungen auf, und sind dann, für eine beliebige Coordinaten-Ebene, jeder weiteren analytischen Entwicklung überhoben, indem es genügt, in allen früheren Formeln nach diesen Regeln sowohl die Veränderlichen als die Constanten zu wechseln.

Bei der Uebertragung der für die unendlich weit entfernte Ebene aufgestellten Sätze auf eine beliebige Ebene erweitern wir die früher gewonnenen Resultate, insofern es uns, nach den vorhergehenden beiden Paragraphen, gestattet ist, die singulären Elemente des Complexes — die singulären Puncte, Linien und Ebenen desselben — anschaulicher, als das früher möglich war, in die geometrische Betrachtung einzuführen.

325. Wir wollen in dem Folgenden die Gleichung (V) des Complexes zweiten Grades zu Grunde legen, welche wir durch Einführung einer sechsten Veränderlichen h homogen und durch Zufügung eines Gliedes $2Vh\eta$ symmetrisch gemacht haben. Diese Gleichung ist:

$$\begin{gathered}
Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\
+ 2Gsh + 2Hrh + 2Irs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\
- 2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta \\
+ 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2Th\sigma + 2Uh\varrho = 0.
\end{gathered} \tag{V}$$

Wir haben in der 10. Nummer für die Strahlen-Coordinaten

$$r,\ s,\ h,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

die folgenden sechs proportionirten Ausdrücke erhalten:

$$(x\tau' - x'\tau),\ (y\tau' - y'\tau),\ (z\tau' - z'\tau),\ (yz' - y'z),\ (x'z - xz'),\ (xy' - x'z).$$

Es bezeichnen dabei

$$\frac{x}{\tau},\ \frac{y}{\tau},\ \frac{z}{\tau} \text{ und } \frac{x'}{\tau'},\ \frac{y'}{\tau'},\ \frac{z'}{\tau'}$$

die Coordinaten zweier, beliebig auf der geraden Linie angenommener Puncte.

Der Vertauschung der unendlich weit liegenden Ebene mit der Coordinaten-Ebene YZ entspricht die Vertauschung von

$$x \text{ mit } \tau,\ \ x' \text{ mit } \tau'.$$

Dem entsprechend werden die sechs Linien-Coordinaten:

$$r,\ s,\ h,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

bezüglich durch die folgenden ersetzt:

$$-r,\ -\eta,\ \varrho,\ -\sigma,\ h,\ -s.$$

Von dieser Vertauschung werden nicht berührt die Coefficienten:

$$A,\ D,\ R,\ U,$$

während bezüglich

$$B,\ C,\ I,\ M$$

und

$$F,\ E,\ Q,\ T$$

ohne Zeichenänderung, mit gleichzeitigem Zeichenwechsel

$$G,\ H,\ L,\ O$$

und

$$K,\ P,\ S,\ V$$

sich gegenseitig vertauschen und N sein Zeichen ändert.

Von den Ebenen-Coordinaten:

$$t,\ u,\ v,\ w$$

vertauschen sich die beiden, t und w, gegenseitig.

Insbesondere ist die Gleichung der in der unendlich weit liegenden Ebene von Linien des Complexes umhüllten Curve:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu = 0,$$

und daraus erhalten wir, nach den vorstehenden Vertauschungsregeln, für die in YZ liegende Complex-Curve, in Uebereinstimmung mit der 166. Nummer, die folgende Gleichung:

$$Dw^2 + Cu^2 + Bv^2 - 2Guv - 2Svw + 2Tuw = 0.$$

Einer Vertauschung der unendlich weit liegenden Ebene mit einer der beiden anderen Coordinaten-Ebenen, XZ oder XY, entsprechend erhalten wir vollständig analoge Vertauschungsregeln. Wir schreiben dieselben nicht hin, indem wir auf die Vertauschungsregeln der 155. Nummer zurückweisen, welche einer Vertauschung der drei Ebenen YZ, XZ, XY unter sich entsprechen.

326. Es sei eine beliebige Ebene, P, gegeben. In derselben wird von Linien des Complexes eine Curve, K, umhüllt. Die Polare, welche einer willkürlich in P angenommenen geraden Linie, a, mit Bezug auf den Complex entspricht, und die wir mit b bezeichnen wollen, schneidet die Ebene P in dem Pole der Linie a mit Bezug auf die Curve K. Denn die Polare einer geraden Linie in Bezug auf den Complex ist der geometrische Ort für die Pole derselben in Bezug auf die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen von Linien des Complexes umhüllten Curven. Hiermit in Uebereinstimmung haben wir in der 236. Nummer die Richtung des einem gegebenen Systeme paralleler Ebenen zugeordneten Durchmessers des Complexes vermöge der in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden Complex-Curve construirt.

Es seien a, a', a'' drei gerade Linien der Ebene P, welche ein in Bezug auf die Curve K sich selbst conjugirtes Dreieck bilden. Die drei zugehörigen Polaren heissen b, b', b''. Dann gehen b, b', b'' bezüglich durch den Durchschnitt von a' und a'', von a'' und a, von a und a'. Wir wollen b, b', b'' drei in Bezug auf die Ebene P einander conjugirte Polaren, oder auch kurz, weil die Ebene P fest bleibt, d r e i e i n a n d e r c o n j u g i r t e P o l a r e n nennen. Das System dreier conjugirter Polaren vertritt in dem Falle einer beliebig angenommenen Ebene das System dreier conjugirter Durchmesser in dem Falle der unendlich weit gerückten Ebene.

Die Durchschnitts-Puncte $(a' a'')$, $(a'' a)$ und $(a a')$ sind die Mittelpuncte dreier Complex-Kegel, A, A', A''. Wir bezeichnen dieselben, indem wir, wie vorhin, die Ebene P als fest betrachten, als die drei bezüglich den geraden Linien a, a', a'' zugehörigen Complex-Kegel.

In Bezug auf einen jeden Complex-Kegel, dessen Mittelpunct in P angenommen ist, ist dieser Ebene eine gerade Linie zugeordnet. Diese Linie ist der Durchschnitt derjenigen beiden Tangential-Ebenen, welche den Complex-Kegel längs der beiden Kanten berühren, nach denen er von der Ebene P geschnitten wird. Wenn die Ebene P insbesondere unendlich weit rückt, wird aus dem Complex-Kegel ein Complex-Cylinder und aus der fraglichen geraden Linie die Cylinder-Axe. Wir wollen diese gerade Linie — zum Unterschied von der Bezeichnung Polare, mit der wir diejenige gerade Linie bezeichnet haben, die einer gegebenen mit Bezug auf den Complex zugeordnet ist — als die Polar-Linie des Complex-Kegels mit Bezug auf die Ebene P, oder kurz als dessen Polar-Linie bezeichnen.

Die Polar-Linien der drei Complex-Kegel A, A', A'' seien c, c', c''. Wir nennen diese drei Polar-Linien einander conjugirt und bezüglich den gegebenen geraden Linien a, a', a'', wie deren Polaren b, b', b'', zugehörig. Eine jede Polar-Linie schneidet die ihr zugehörige Polare in einem Puncte der Ebene P.

327. Die Polare einer beliebigen geraden Linie wird von den Polar-Ebenen derselben mit Bezug auf sämmtliche Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf ihr liegen, umhüllt. Es ist also, beispielsweise, b der Durchschnitt der beiden Polar-Ebenen der geraden Linie a mit Bezug auf die beiden Complex-Kegel A' und A''. In denselben beiden Ebenen liegen aber auch bezüglich die Polar-Linien der Kegel A' und A'', die wir vorhin mit c' und c'' bezeichnet haben. Es wird somit b von c' und c'' geschnitten.

Von drei einander conjugirten Polaren schneidet jede die zu den beiden anderen zugehörigen Polar-Linien.

Es schneidet also auch jede von drei conjugirten Polar-Linien die zu den beiden anderen zugehörigen Polaren.

Wenn die drei Polaren b, b', b'' gegeben sind, lassen sich die drei Polar-Linien c, c', c'' in linearer Weise construiren. Denn eine jede derselben geht durch den Schnittpunct einer der drei Polaren mit der Ebene P und schneidet die beiden anderen. Auf dieselbe Weise bestimmen sich b, b', b'', wenn c, c', c'' gegeben sind.

Drei beliebige gerade Linien, insbesondere die drei Polaren b, b', b'', bestimmen, als Linien einer Erzeugung, ein Hyperboloid. Demselben gehören als Linien zweiter Erzeugung alle diejenigen an, welche die gegebenen drei geraden Linien schneiden. Die Polar-Linien c, c', c'' sind also Linien zweiter Erzeugung des durch die Polaren b, b', b'', als Linien der ersten Erzeugung, bestimmten Hyperboloids. Die sechs geraden Linien b, b', b'', c, c', c'' bestimmen ein dem Hyperboloide aufgeschriebenes Sechseck $bc'b''cb'c''$ (vergl. n. 109). Dieses Sechseck vertritt bei beliebiger Annahme der Ebene P das durch drei conjugirte Durchmesser und den diesen parallelen Cylinder-Axen bestimmte Centralparallelepiped in dem Falle der unendlich weit gerückten Ebene.

Die drei Ebenen (b, c), (b', c'), (b'', c''), welche die Tangential-Ebenen des in Rede stehenden Hyperboloids in den drei in P liegenden Puncten (a', a''), (a'', a), (a, a') sind, schneiden sich in einem Puncte O, dem Pole der Ebene P in Bezug auf das Hyperboloid. Wir können diesen Punct noch auf andere Arten bestimmen. Die Ebene (b, c) schneidet die Ebene P in einer geraden Linie d. Die vierte Harmonicale zu b, c und d, die wir mit e bezeichnen wollen, geht durch den gesuchten Punct. In demselben Puncte schneiden sich die drei Diagonalen des Sechsecks $bc'b''cb'c''$.

Wenn die Ebene P unendlich weit rückt, wird aus dem Puncte O der Mittelpunct des Centralparallelepipeds. Wir können den Mittelpunct eines solchen Parallelepipeds entweder als den Durchschnitt derjenigen drei Ebenen definiren, welche durch je einen Durchmesser und die ihm parallele Cylinder-Axe hindurchgehen, oder als den gemeinsamen Durchschnitt der drei Mittellinien zwischen je einem Durchmesser und der parallelen Cylinderaxe, oder endlich als den gemeinsamen Durchschnitt der Diagonalen des Centralparallelepipeds.

328. Genau dieselben Rechnungen und Betrachtungen, durch welche wir in der 245. und 246. Nummer nachgewiesen haben, dass alle Centralparallelepipeda eines gegebenen Complexes denselben Mittelpunct haben, den wir als den Mittelpunct des Complexes bezeichneten, zeigen, dass der Pol O der Ebene P in Bezug auf das durch b, b', b'' bestimmte Hyperboloid unabhängig ist von der Auswahl dieser drei conjugirten Polaren.

Der Pol der Ebene P mit Bezug auf ein durch drei conjugirte Polaren bestimmtes Hyperboloid ist von der Auswahl dieser Polaren unabhängig.

Der Punct O ist also der Ebene P durch den gegebenen Complex zugeordnet. Wir wollen ihn den Pol der Ebene P mit Bezug auf den Complex nennen.

In einem Complexe zweiten Grades ist einer gegebenen Ebene, im Allgemeinen, ein Punct in eindeutiger Weise zugeordnet.

Wir haben in der 323. Nummer nachgewiesen, dass der Mittelpunct des Complexes zusammenfällt mit dem Mittelpuncte der durch seine singulären Puncte und Ebenen bestimmten Fläche. Wir haben also den Satz:

Der Pol einer gegebenen Ebene mit Bezug auf einen Complex zweiten Grades fällt mit dem Pole derselben Ebene mit

Bezug auf die von den singulären Puncten des Complexes gebildete und von den singulären Ebenen desselben umhüllte Fläche zusammen.

329. Es sei eine beliebige Linie a der Ebene P gegeben. Die ihr zugehörige Polare sei b, die Polarlinie c. Dann haben wir die gerade Linie e, welche den Pol der Ebene P mit dem Schnittpuncte der beiden geraden Linien b und c verbindet, in der Art construirt, dass wir durch b und c eine Ebene legten und die vierte Harmonicale zu b, c und der Schnittlinie d dieser Ebene mit der Ebene P bestimmten. Wir untersuchen zunächst, in wie weit diese Construction ihre Gültigkeit behält, wenn die angenommene gerade Linie a dem Complexe angehört, insbesondere, wenn dieselbe eine singuläre Linie desselben ist.

Es sei a eine Linie des gegebenen Complexes. Dann fällt die Polare b mit ihr zusammen. Aber auch die Polar-Linie c ist von a und b nicht verschieden. Denn der Pol der geraden Linie a in Bezug auf die in P liegende Complex-Curve ist der Berührungspunct derselben mit dieser Curve, und der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct dieser Punct ist, berührt die Ebene P nach der Tangente in diesem Puncte, das heisst, nach der angenommenen geraden Linie a. Es fallen sonach b und c, und damit auch d, mit der geraden Linie a zusammen. Die vierte Harmonicale zu b, c und d wird unbestimmt. Die geometrische Construction der Verbindungslinie des Pols der geraden Linie a in Bezug auf die in P liegende Complex-Curve mit dem Pole der Ebene P in Bezug auf den Complex wird illusorisch.

Wenn die gerade Linie a insbesondere mit einer der vier singulären Linien zusammenfällt, welche in P liegen, so wird zunächst ihre Polare, b, unbestimmt. Dieselbe kann beliebig unter denjenigen geraden Linien angenommen werden, welche in der zugeordneten singulären Ebene durch den zugeordneten singulären Punct gehen. Dieser Punct ist der Berührungspunct der singulären Linie a mit der in P liegenden Complex-Curve. Der Complex-Kegel, welcher denselben zum Mittelpuncte hat, zerfällt in zwei sich nach der singulären Linie a schneidende Ebenen. Die Polar-Linie c wird danach, wie die Polare b, unbestimmt und ist einzig der Bedingung unterworfen, in derjenigen Ebene, welche zu den genannten beiden und der Ebene P harmonisch ist, durch den auf a liegenden Berührungspunct hindurchzugehen. Die gesuchte Linie e ist in der vierten harmonischen Ebene zu der gegebenen

Ebene P und zu den beiden Ebenen, in welchen bezüglich b und c liegen, enthalten, wird aber innerhalb derselben durch die allgemeine Construction nicht vollständig bestimmt.

330. Wenn die gerade Linie a dem gegebenen Complexe nicht angehört, sind, im Allgemeinen, die zugehörige Polare, b, und die zugehörige Polar-Linie, c, verschieden. Dem entspricht, dass sich, im Allgemeinen, drei conjugirte Polaren nicht schneiden. Nach den Erörterungen der 251. Nummer gibt es ein System dreier zugeordneter Durchmesser, welche durch den Mittelpunct des Complexes hindurchgehen. Es fallen dieselben mit den ihnen parallelen Cylinder-Axen zusammen. Entsprechend gibt es für jede Ebene drei einander zugeordnete Polaren, welche durch den Pol der Ebene hindurchgehen, und also mit den ihnen zugehörigen Polar-Linien zusammenfallen.

Wenn wir, nach der 251. Nummer, den Complex auf diejenigen drei Durchmesser, welche sich in seinem Mittelpuncte schneiden, als Coordinaten-Axen beziehen, so wird seine Gleichung die folgende:

$$\begin{aligned} &Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ &+ 2Gsh + 2Hrh + 2Irs \\ &- 2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta \equiv \Omega = 0. \end{aligned} \tag{184}$$

Dann erhalten wir für die von den Linien desselben in der unendlich weit entfernten Ebene umhüllte Curve:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 = 0. \tag{185}$$

Für die in derselben Ebene liegende Curve desjenigen Complexes, dessen Gleichung die folgende ist:

$$-\frac{\delta\Omega}{\delta r}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \frac{\delta\Omega}{\delta s}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\varrho} + \frac{\delta\Omega}{\delta h}\cdot\frac{\delta\Omega}{\delta\eta} = 0, \tag{186}$$

finden wir:

$$DNt^2 + EOu^2 + FVv^2 = 0. \tag{187}$$

In den beiden Gleichungen (185) und (187) kommen nur noch die Quadrate der Veränderlichen vor. Es sind also die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Curven zweiter Classe auf ein in Bezug auf beide sich selbst conjugirtes Coordinaten-System bezogen.

Wir haben durch die Gleichung (186) im Verein mit der Gleichung des gegebenen Complexes die singulären Linien des letzteren bestimmt. Es sind die in der unendlich weit liegenden Ebene enthaltenen vier singulären Linien die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden durch die Gleichungen (185) und (187) dargestellten Kegelschnitte. Die drei Puncte, in welchen die Coordinaten-Axen OX, OY, OZ die unendlich weit liegende Ebene schneiden, sind also diejenigen drei Puncte, in welchen sich die Diagonalen des von den vier in dieser Ebene liegenden singulären Linien gebildeten vollständigen Vierseits schneiden. Es sind die drei Diagonalen diejenigen in der unendlich weit entfernten Ebene liegenden geraden Linien, deren zugehörige Polare und Polar-Linie zusammenfallen, ohne dass sie selbst dem Complexe angehören.

Die vorstehenden Betrachtungen übertragen sich unmittelbar von der unendlich weit liegenden Ebene auf eine beliebig angenommene.

331. Für eine gegebene Ebene gibt es im Allgemeinen nur ein System dreier zugeordneter Polaren, welche sich in dem Pole der Ebene schneiden: dasjenige, welches wir in der vorhergehenden Nummer construirt haben. Diese Construction wird unbestimmt, wenn die vier singulären Linien in der angenommenen Ebene P paarweise zusammenfallen, — was eine zweifache Particularisation der Beziehung des gegebenen Complexes zu derselben verlangt. Dann ist durch die beiden geraden Linien, in welche die vier singulären Linien zusammenfallen, ein Durchschnittspunct, o, und eine gerade Linie, p, die Polare von o in Bezug auf die in P liegende Complex-Curve, bestimmt. Die Polare von p in Bezug auf den Complex geht durch den Punct o und den Pol der Ebene P in Bezug auf den Complex hindurch. Und umgekehrt geht die Polare einer jeden geraden Linie, welche sich in P durch o legen lässt, durch einen Punct der geraden Linie p und den Pol der Ebene P in Bezug auf den Complex. Es gibt dann unendlich viele Polaren, welche sich in dem Pole der Ebene P schneiden. Eine derselben ist ausgezeichnet. Die übrigen sind alle der einen conjugirt und liegen in einer durch den Pol gehenden Ebene.

Wenn alle Polaren der in P liegenden geraden Linien durch den Pol von P hindurchgehen sollen, so müssen, nach der geometrischen Construction, die wir betrachten, alle in P liegenden Linien des Complexes singuläre Linien desselben sein. Es verlangt das, so lange die gegebene Ebene keine singuläre Ebene ist, eine fünffache Particularisation der Beziehung der gegebenen Ebene zu dem Complexe. Denn es ist dazu erforderlich, entweder dass die von Linien des Complexes (186) in der gegebenen Ebene P umhüllte Curve von der in derselben Ebene liegenden Curve des gegebenen Complexes nicht verschieden sei, oder, dass eine jede Linie der Ebene P dem Complexe (186) angehöre. Ob der eine oder der andere Fall eintritt, hängt von der Wahl des überzähligen Gliedes in der Gleichung des gegebenen Complexes ab.

Wenn der gegebene Complex zweiten Grades insbesondere von der Art ist, dass seine Linien eine Fläche des zweiten Grades umhüllen, so schneiden sich die Polaren aller solchen geraden Linien, welche in einer beliebigen Ebene liegen, in dem Pole dieser Ebenen in Bezug auf den Complex, der mit dem Pole derselben in Bezug auf die Fläche zusammenfällt. Und allerdings sind alle Linien eines solchen Complexes als singuläre Linien anzusehen. Die Fläche, die in dem allgemeinen Falle der Complexe zweiten Grades von den singulären Puncten desselben gebildet und von den singulären Ebenen desselben umhüllt wird, ist in dem Falle der besonderen Complexe, die eine Fläche des zweiten Grades darstellen, von dieser letzteren nicht verschieden.

332. Wenn die gegebene Ebene P eine singuläre Ebene ist, so fällt ihr Pol mit Bezug auf den Complex, nach den Auseinandersetzungen der 279. und 323. Nummer, mit dem ihr zugeordneten singulären Puncte zusammen. Dieser Punct ist der Berührungspunct der gegebenen singulären Ebene mit der Fläche der singulären Puncte und Ebenen.

Wir überzeugen uns leicht von der Richtigkeit dieses Resultates. Die Complex-Curve in der gegebenen Ebene P hat sich, der Voraussetzung entsprechend, in das System zweier Puncte, K_1 und K_2, aufgelöst. Die Verbindungslinie derselben $(K_1 K_2)$ ist die der gegebenen singulären Ebene zugeordnete singuläre Linie. Auf derselben liegt der zugehörige singuläre Punct O, welcher der Pol der Ebene P ist.

Es sei eine beliebige gerade Linie, a, der Ebene P gegeben. Ihre Polare b schneidet die Ebene P in einem Puncte der singulären Linie $(K_1 K_2)$. Der Complex-Kegel, dessen Mittelpunct dieser Schnittpunct ist, berührt die gegebene Ebene P nach $(K_1 K_2)$. Es fällt also die zu der beliebig angenommenen geraden Linie a zugehörige Polar-Linie c mit $(K_1 K_2)$ zusammen. Damit ist ausgesprochen, dass der Pol der Ebene P auf der singulären Linie $(K_1 K_2)$ zu suchen ist. Denn die durch b und c hindurch gelegte Ebene schneidet die Ebene P wieder nach c, und die vierte Harmonicale zu b, c und dieser Schnittlinie muss, weil b und c nicht selbst zusammenfallen, mit c zusammenfallen.

Um den Pol auf der singulären Linie $(K_1 K_2)$ zu bestimmen, lassen wir die beliebig angenommene gerade Linie a mit $(K_1 K_2)$ zusammenfallen.

Dann entsprechen ihr unendlich viele gerade Linien als Polaren: alle diejenigen, welche in der gegebenen Ebene P durch den zugeordneten singulären Punct, O, hindurchgehen. Damit ist der Beweis geführt. Denn die vierte Harmonicale zu solch' einer Polaren, der Polar-Linie eines Complex-Kegels, dessen Mittelpunct beliebig auf derselben angenommen ist, und der Schnittlinie der durch die Polare und die Polarlinie bestimmten Ebene mit der gegebenen, P, fällt mit der angenommenen Polaren selbst zusammen.

333. Ist die gegebene Ebene P eine Doppelebene des Complexes, so wird die Lage ihres Pols unbestimmt. Der geometrische Ort für denselben ist diejenige Curve zweiter Ordnung, nach welcher die Doppelebene die Fläche der singulären Puncte und Ebenen berührt. Die Complex-Curve in der Doppelebene hat sich in das System zweier Puncte aufgelöst, welche in einen Punct der Berührungs-Curve zweiter Ordnung zusammenfallen. Die Richtung der Verbindungslinie der beiden Puncte ist unbestimmt geworden. Eine jede Linie, welche in P durch den Punct, in welchen die beiden zusammengefallen sind, hindurchgeht, ist eine singuläre Linie. Der einer jeden derselben entsprechende singuläre Punct kann als Pol der Ebene P in Bezug auf den Complex angesehen werden. Wenn sich die singuläre Linie in P um den festen Punct dreht, beschreibt der entsprechende singuläre Punct jene Curve der zweiten Ordnung, nach welcher die Doppelebene die Fläche der singulären Puncte und Ebenen berührt.

Wir haben noch den Fall zu erwähnen, dass alle in einer gegebenen Ebene P liegende Linien dem Complexe angehören. Es kann von einem bestimmten Pole einer solchen Ebene mit Bezug auf den Complex keine Rede mehr sein. Dem entspricht, dass sich die Ebene als isolirte Ebene von der Fläche der singulären Puncte absondert, wodurch diese auf die dritte Ordnung erniedrigt wird.

334. Die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes haben wir durch einen besonders einfachen Complex, dessen Gleichung noch dadurch übersichtlicher wurde, dass wir ihn in nahe Beziehung zu dem Coordinaten-System setzten, durch den Asymptoten-Complex des gegebenen, dargestellt. In dem allgemeinen Falle erhielten wir die Gleichung des Asymptoten-Complexes, wenn wir in der Gleichung des gegebenen die drei Veränderlichen r, s, h verschwinden liessen. Dann stellte derselbe eine Kegelfläche zweiter Classe dar, deren Mittelpunct in den Coordinaten-Anfangspunct fiel und welche aus der unendlich weit entfernten Ebene die in derselben

von Linien des Complexes umhüllte Curve herausschnitt. Wenn sich die Beziehung der unendlich weit liegenden Ebene zu dem gegebenen Complex particularisirte, so mussten noch weitere Glieder, als nur die zweiter Ordnung in ϱ, σ, η, aus der Gleichung des gegebenen Complexes für die Gleichung des Asymptoten-Complexes ausgewählt werden, damit dieser mit derselben Annäherung, wie in dem allgemeinen Falle, die unendlich weit liegenden Linien des gegebenen Complexes darstelle. Der Grad der Annäherung des Asymptoten-Complexes an den gegebenen Complex ist in allen Fällen der erste; das heisst, die Beziehung des Asymptoten-Complexes zu dem gegebenen Complexe bleibt unverändert, wenn wir dieselben parallel mit sich selbst gegen einander um ein endliches Stück verschieben.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für eine beliebige Ebene, insbesondere für eine jede der drei Coordinaten-Ebenen, anstellen. Wir nennen Asymptoten-Complex des gegebenen Complexes mit Bezug auf eine Coordinaten-Ebene denjenigen Complex, welcher mit dem gegebenen Complexe alle in dieser Ebene und, bis auf Grössen erster Ordnung, alle in solchen Ebenen, die von der Coordinaten-Ebene unendlich wenig verschieden sind, liegenden Complex-Linien gemein hat, und welcher unter denjenigen Complexen, die mit ihm diese Eigenschaft theilen, sowohl an und für sich als in Beziehung auf das Coordinaten-System der einfachste ist.

335. Bei der Aufstellung der Gleichung des einer Coordinaten-Ebene zugehörigen Asymptoten-Complexes, verfahren wir wie früher in dem Falle der unendlich weit entfernten Ebene. Wenn wir insbesondere die Ebene YZ auswählen, so erhalten wir zunächst, indem wir in der Gleichung des gegebenen Complexes, für welche wir die Gleichung (V) nehmen wollen, r, ϱ, η verschwinden lassen:

$$Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 + 2Gsh - 2Ss\sigma - 2Th\sigma = 0. \qquad (188)$$

Diese Gleichung stellt einen Complex dar, dessen Linien eine Cylinderfläche zweiter Classe umhüllen, deren Seiten OX parallel sind, und durch welche aus YZ die in dieser Ebene liegende Complex-Curve ausgeschnitten wird.

Durch passende Wahl der Coordinaten-Axen OY und OZ in der festen YZ-Ebene können wir, im Allgemeinen, die vorstehende Gleichung auf die folgende Form bringen:

$$Bs^2 + Ch^2 + D\sigma^2 = 0. \qquad (189)$$

Wenn sich dann die Complex-Curve in YZ, indem YZ eine singuläre Ebene wird, in das System zweier Puncte auflöst, so verschwindet eine der drei Constanten B, C und D. Verschwindet D, so müssen wir zu der Gleichung (189), welche in dem allgemeinen Falle den Asymptoten-Complex darstellt, aus der Gleichung des gegebenen Complexes noch diejenigen Glieder hinzunehmen, welche die Veränderliche σ in der ersten Potenz enthalten. Auf diese Art wird die Gleichung des Asymptoten-Complexes:

$$Bs^2 + Ch^2 - 2(L\eta + M\varrho)\sigma = 0. \tag{190}$$

Ein Glied mit $r\sigma$ tritt nicht hinzu. Denn es ist:

$$-Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = (O-N)s\varrho + (V-N)h\eta.$$

Wenn die beiden Puncte, in welche sich die Complex-Curve in YZ aufgelöst hat, der Annahme entsprechend, dass YZ eine Doppelebene des gegebenen Complexes sei, in einen Punct zusammenfallen, so verschwinden in der Gleichung (189) zwei der drei Constanten B, C, D. Sind B und C die beiden verschwindenden Constanten, so wird die Gleichung des Asymptoten-Complexes, indem wir aus der des gegebenen die Glieder erster Ordnung in s und h zu der Gleichung (189) hinzunehmen:

$$\begin{aligned} D\sigma^2 &+ 2(Ir + R\eta)s + 2(Hr + U\varrho)h \\ &+ 2(O-N)s\varrho + 2(V-N)h\eta = 0. \end{aligned} \tag{191}$$

Wenn endlich, der Annahme entsprechend, dass eine jede gerade Linie der Ebene YZ dem gegebenen Complexe angehöre, in der Gleichung (189) die drei Constanten B, C, D zugleich verschwinden, so erhalten wir für die Gleichung des Asymptoten-Complexes, indem wir aus der Gleichung des gegebenen die Glieder erster Ordnung in s, h, σ auswählen:

$$\begin{aligned} (Ir + R\eta)s &+ (Hr + U\varrho)h - (L\eta + M\varrho)\sigma \\ &- Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = 0. \end{aligned} \tag{192}$$

Wir verfolgen hier, indem wir auf die Entwickelungen des dritten Paragraphen verweisen, diese Betrachtungen nicht weiter und gehen insbesondere nicht auf eine nähere Discussion der durch die Gleichungen (190), 191), (192) dargestellten Complexe ein.

336. Ein Linien-Complex stellt ein sich selbst reciprokes Gebilde dar, der doppelten Anordnung entsprechend, welcher seine Gleichung fähig ist, je nachdem wir die gerade Linie als Strahl oder als Axe betrachten. Einer Vertauschung der beiden Auffassungen entspricht eine Vertauschung der Coordinaten der geraden Linie unter sich. Die Gestalt der Gleichung des Complexes bleibt dabei ungeändert. Darin liegt die Berechtigung, alle im Vorstehenden enthaltenen Betrachtungen und Resultate nach den Regeln des Princips der Reciprocität von einer beliebigen Ebene auf einen beliebigen Punct zu übertragen.

Wir wollen den beliebigen Punct insbesondere mit dem Coordinaten-Anfangspuncte zusammenfallen lassen. Auf ihn übertragen sich dann alle analytischen Entwickelungen und Beziehungen, welche wir für die unendlich weit entfernte Ebene aufgestellt haben, wenn wir überall Punct- und Ebenen-Coordinaten, Strahlen- und Axen-Coordinaten und, dem entsprechend, nach den Regeln der 153. Nummer, die folgenden Constanten der Complex-Gleichunng:

$$A, B, C, \qquad G, H, I, \qquad P, Q, R$$

gegenseitig mit den Constanten:

$$D, E, F, \qquad K, L, M, \qquad S, T, U$$

vertauschen.

Insbesondere haben wir für die in der unendlich weit entfernten Ebene liegende Complex-Curve die Gleichung erhalten:

$$Dt^2 + Eu^2 + Fv^2 + 2Kuv + 2Ltv + 2Mtu = 0.$$

Diejenige Gleichung, welche sich aus derselben nach den vorstehenden Vertauschungs-Regeln ableitet:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gyz + 2Hxz + 2Ixy = 0,$$

stellt den Complex-Kegel dar, dessen Mittelpunct der Coordinaten-Anfangspunct ist.

Wenn der beliebig anzunehmende Punct, den wir mit dem Coordinaten-Anfangspuncte haben zusammenfallen lassen, unendlich weit rückt, können wir für ihn einen beliebigen derjenigen drei Puncte wählen, in welchen die unendlich weit entfernte Ebene bezüglich von den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ geschnitten wird. Die Vertauschungs-Regeln, welche einer derartigen Annahme entsprechen, leiten sich unmittelbar aus den vorstehenden ab, wenn wir zunächst, nach den Erörterungen der 325. Nummer, die unendlich weit entfernte Ebene bezüglich durch die Coordinaten-Ebenen XZ, YZ, XY ersetzen.

337. Wir beschränken uns im Folgenden darauf, die wesentlichen Ergebnisse, welche wir früher für eine beliebige Ebene abgeleitet haben, für einen beliebigen Punct ohne weiteren Beweis auszusprechen.

Sei O der angenommene Punct. a, a', a'' seien drei beliebige durch ihn hindurchgehende gerade Linien, welche einander in Bezug auf den Complex-Kegel K, dessen Mittelpunct in O fällt, conjugirt sind. Die Polaren dieser drei geraden Linien mit Bezug auf den Complex, die wir mit b, b', b'' bezeichnen wollen, liegen bezüglich in den drei Ebenen (a', a''), (a'', a), (a, a'). Wir nennen die drei Polaren einander conjugirt. Die Polar-Linien des Punctes O in Bezug auf die in den drei Ebenen (a', a''), (a'', a), (a, a') liegenden

Complex-Curven, die c, c', c'' genannt werden mögen, heissen den drei Polaren b, b', b'' und den drei gegebenen geraden Linien a, a', a'' zugehörig. Wir bezeichnen sie als drei einander conjugirte Polar-Linien. Dann gilt zunächst der folgende Satz:

Von je drei conjugirten Polaren schneidet jede die den anderen beiden zugehörigen Polar-Linien.

Von je drei Polar-Linien schneidet also auch jede die zu den anderen beiden zugehörigen Polaren. Wenn der Punct O und drei conjugirte Polaren oder Polar-Linien gegeben sind, so lassen sich, nach diesem Satze, die zugehörigen Polar-Linien, bezüglich Polaren, linear construiren.

Drei conjugirte Polaren als Linien einer Erzeugung und die zugehörigen Polar-Linien als Linien der anderen Erzeugung bestimmen ein Hyperboloid. Die Polar-Ebene des Punctes O in Bezug auf dieses Hyperboloid ist diejenige Ebene, P, welche die drei Schnittpuncte je einer der drei conjugirten Polaren mit der ihr zugehörigen Polar-Linie enthält. Diese Ebene ändert sich nicht, wenn wir an Stelle der angenommenen drei conjugirten Polaren irgend drei andere setzen.

Die Polar-Ebene des Punctes O in Bezug auf ein durch drei conjugirte Polaren bestimmtes Hyperboloid ist von der Auswahl dieser Polaren unabhängig.

Die Ebene P ist also dem Puncte O durch den gegebenen Complex zugeordnet. Wir wollen sie die Polar-Ebene des Punctes P mit Bezug auf den Complex nennen.

In einem Complexe zweiten Grades ist einem gegebenen Puncte, im Allgemeinen, eine Ebene in eindeutiger Weise zugeordnet.

Wir können dieselbe Ebene als die Polar-Ebene des gegebenen Punctes mit Bezug auf die von den singulären Puncten des Complexes gebildete und von den singulären Ebenen desselben umhüllte Fläche construiren.

338. Wenn die angenommenen drei geraden Linien a, a', a'' nicht selbst dem Complexe angehören, so schneiden sich, im Allgemeinen, ihre zugehörigen Polaren nicht. Solcher zugeordneter Polaren, welche sich schneiden, und die also mit ihren zugehörigen Polar-Linien in die Polar-Ebene des gegebenen Punctes zusammenfallen, gibt es, im Allgemeinen, nur ein System. Die entsprechenden drei geraden Linien a, a', a'' sind leicht zu construiren.

Durch den gegebenen Punct O gehen vier singuläre Linien des Complexes hindurch. Die drei Durchschnitts-Linien je zweier solcher Ebenen, welche zusammen die vier singulären Linien enthalten, sind die gesuchten.

Einer doppelten Particularisation der Beziehung des Complexes zweiten Grades zu dem gegebenen Puncte entsprechend, können die vier singulären Linien, welche durch denselben hindurchgehen, paarweise zusammenfallen. Dann schneiden sich innerhalb der Polar-Ebene P des Punctes O die Polaren aller solcher gerader Linien, welche in der Ebene, die die beiden singulären Linien enthält, durch O hindurchgehen, in einem Puncte, demjenigen Puncte, in welchem die Polar-Ebene P von der Polar-Linie der genannten Ebene in Bezug auf den Complex-Kegel, dessen Mittelpunct in O fällt, geschnitten wird. Und auch die Polare dieser letzteren Linie fällt in die Ebene P. Sie ist die Durchschnitts-Linie derselben mit der Ebene, welche durch die beiden singulären Linien hindurchgelegt worden ist.

Eine fünffache Particularisation ist erforderlich, wenn alle Polaren in der Polar-Ebene P enthalten sein sollen. Dann fällt eine jede Polare mit der ihr zugehörigen Polar-Linie zusammen. Es verlangt dies, dass alle durch den Punct O hindurchgehenden Complex-Linien singuläre Linien desselben seien. Diese Bedingung ist insbesondere in dem Falle derjenigen Complexe erfüllt, deren Linien eine Fläche des zweiten Grades umhüllen. Alle Linien eines derartigen Complexes sind als singuläre Linien desselben anzusehen. Die Polar-Ebene eines beliebigen Punctes in Bezug auf solch' einen Complex fällt mit der Polar-Ebene desselben in Bezug auf die von demselben umhüllte Fläche zusammen. Die letztere vertritt die Fläche vierter Ordnung und Classe, welche in dem allgemeinen Falle durch die singulären Puncte und Ebenen des Complexes bestimmt wird.

339. Wenn der gegebene Punct O insbesondere ein singulärer Punct ist, fällt seine Polar-Ebene mit der zugeordneten singulären Ebene zusammen. Es ist dieselbe die Tangential-Ebene der Fläche der singulären Puncte und Ebenen in dem gegebenen singulären Puncte.

Ist der gegebene Punct O ein Doppelpunct des Complexes, so wird seine Polar-Ebene unbestimmt. Sie kann beliebig unter den umhüllenden Ebenen eines Kegels zweiter Classe, der den angenommenen Punct zum Mittelpuncte hat, ausgewählt werden. Der Punct O ist dann ein Doppelpunct der Fläche der singulären Puncte und Ebenen. Die Kegelfläche zweiter Classe, die von seinen Polar-Ebenen umhüllt wird, ist der Tangential-Kegel der Fläche im Doppelpunct.

Es können endlich alle durch den Punct O hindurchgehenden geraden Linien dem Complexe angehören. Dann kann von einer bestimmten Polar-Ebene desselben in Bezug auf den Complex keine Rede mehr sein. Dem entspricht, dass sich der Punct als isolirter Punct von der Fläche der singulären Ebenen absondert, wodurch diese auf die dritte Classe reducirt wird.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass in dem allgemeinen Falle der Complexe zweiten Grades nicht, wie bei den Flächen zweiten Grades das Entsprechen der Polar-Ebene zu dem gegebenen Punct ein reciprokes ist. Wenn der Pol der Polar-Ebene mit Bezug auf den Complex wieder mit dem anfänglich gegebenen Puncte zusammenfallen soll, so ist eine dreifache Particularisation der Lage der Ebene zu dem Complexe nothwendig. Es gibt also, im Allgemeinen, in einem gegebenen Complexe nur eine endliche Anzahl von Puncten und Ebenen, welche sich gegenseitig in Bezug auf den Complex entsprechen.

340. Wir haben diejenigen Linien des Complexes, welche in einer gegebenen Ebene oder in deren Nähe liegen, durch den Asymptoten-Complex desselben in Bezug auf die gegebene Ebene dargestellt. Auf ähnliche Weise bestimmen wir diejenigen geraden Linien, welche in dem Complexe durch einen gegebenen Punct und alle ihm benachbarten hindurchgehen.

Sei der gegebene Punct der Anfangspunct der Coordinaten. Dann erhalten wir für den Asymptoten-Complex des gegebenen Complexes in Bezug auf denselben, indem wir in der Gleichung des letzteren die Veränderlichen ϱ, σ, η, sowie erste Potenzen von r, s, h gegen zweite Potenzen derselben vernachlässigen:

$$Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 + 2Gsh + 2Hrh + 2Irs = 0. \tag{193}$$

Diese Gleichung stellt eine in der unendlich weit liegenden Ebene enthaltene Curve der zweiten Ordnung dar. Diejenigen geraden Linien, welche durch den Coordinaten-Anfangspunct gehen und diese Curve schneiden, gehören dem gegebenen Complex an.

Durch schickliche Wahl der Richtung der Coordinaten-Axen können wir die vorstehende Gleichung (193) auf die Form bringen:

$$Ar^2 + Bs^2 + Ch^2 = 0. \tag{194}$$

Wenn dann der Coordinaten-Anfangspunct insbesondere ein singulärer Punct des Complexes wird, verschwindet eine der drei Constanten A, B, C. Sei A die verschwindende Constante. Dann müssen wir in der Gleichung des Asymptoten-Complexes, damit derselbe mit der gleichen Annäherung, wie früher, die Linien des gegebenen in der Nachbarschaft des Coordinaten-Anfangspunctes darstelle, neben den Gliedern zweiter Ordnung in s und h die erster Ordnung in r aus der Gleichung des gegebenen Complexes beibehalten. Wir finden so:

$$Bs^2 + Ch^2 + 2(P\varrho + Q\eta)r = 0. \tag{195}$$

Ein Glied in $r\sigma$ tritt nicht hinzu, weil:

$$-Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = (O-N)s\varrho + (V-N)h\eta.$$

Verschwinden gleichzeitig zwei der drei Constanten A, B, C, etwa B und C, dem Falle entsprechend, dass der Coordinaten-Anfangspunct ein Doppelpunct des Complexes wird, so erhalten wir, indem wir neben zweiten Potenzen von r erste Potenzen von s und h berücksichtigen müssen, die folgende Gleichung des Asymptoten-Complexes:

$$\begin{aligned} Ar^2 + 2(R\eta - S\sigma)s + 2(-T\sigma + U\varrho)h \\ + 2(O-N)s\varrho + 2(V-N)h\eta = 0. \end{aligned} \tag{196}$$

Wenn endlich alle durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien dem Complexe angehören, und, dementsprechend, A, B, C zugleich verschwinden, wird die Gleichung des Asymptoten-Complexes:

$$\begin{aligned} (P\varrho + Q\eta)r + (R\eta - S\sigma)s + (-T\sigma + U\varrho)h \\ -Nr\sigma + Os\varrho + Vh\eta = 0. \end{aligned} \tag{197}$$

Es ist dies dieselbe Gleichung, welche wir in der 292. Nummer gefunden hatten, um die unendlich weit entfernten Linien des gegebenen Complexes in dem Falle darzustellen, dass in der Gleichung desselben die Glieder zweiter Ordnung in den Veränderlichen ϱ, σ, η fehlten.

Aehnliche Betrachtungen, wie für den Coordinaten-Anfangspunct, können wir für einen beliebigen derjenigen drei Puncte anstellen, die auf den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ unendlich weit gerückt sind.

341. Wir brechen hier die vorstehenden Entwickelungen ab, deren Zweck die Discussion der allgemeinen Gleichung der Complexe zweiten Grades gewesen ist, um uns wieder der Untersuchung der Complexflächen zuzuwenden. Wir heben insbesondere die grosse Analogie hervor, welche zwischen der Theorie dieser Complexe und der Theorie der Flächen zweiten Grades herrscht; eine Analogie, die darin ihre Erklärung findet, dass die letzteren als Complexe zweiten Grades von besonderer Art aufgefasst werden können. Die Gesammtheit der Bedingungen, welche erfüllt sein muss, damit ein gegebener Complex zweiten Grades eine Fläche dieses Grades darstelle, kann in der einen zusammengefasst werden, dass alle Linien eines derartigen Complexes singuläre Linien desselben sind.