Complex-Cylinder auflöst, geht also immer durch die unendlich weit liegende Doppellinie der Fläche. Sie schneidet von OX ein Stück ab:

$$x_0 = -\frac{d \mp \sqrt{d^2 - af}}{a} = -\frac{f}{d \pm \sqrt{d^2 - af}} = -\frac{e}{b}, \tag{98}$$

oder, wenn wir die Constanten des Complexes wieder einführen:

$$x_0 = \frac{S \operatorname{tang} \gamma + T}{L \operatorname{tang} \gamma - M}. \tag{99}$$

200. Indem wir den Werth von $\operatorname{tang} \gamma_0$ aus der Gleichung (94) in die Gleichung (88) und den Werth von x_0 aus der Gleichung (99) in die Gleichung (95) einführen, gelangen wir, wie wir es in der 193. Nummer für Meridianflächen gethan haben, nun für Aquatorialflächen der besonderen Art zu dem folgenden Satze:

Die vier singulären Strahlen und die vier singulären Axen liegen bezüglich in derselben Ebene, welche durch die unendlich weit entfernte Doppellinie der Fläche geht, und sind, in dieser Ebene, bezüglich einander parallel.

§ 7.

Allgemeine Betrachtungen über Complex-Flächen, ihre Doppellinien, Doppelpuncte und Doppelebenen.

201. Wenn eine gerade Linie im Raume sich bewegt, so erzeugt sie eine Linienfläche. Es ist hierbei gleichgültig, ob wir sie als einen Strahl oder als eine Axe betrachten. Wir können die Linienfläche durch drei Gleichungen entweder in Strahlen-Coordinaten oder in Axen-Coordinaten darstellen, die sich in dem ersten Falle auf eine einzige Gleichung in Punct-Coordinaten, in dem zweiten Falle auf eine einzige Gleichung in Plan-Coordinaten zurückführen lassen.

202. Wenn insbesondere die gerade Linie im Raume so sich bewegt, dass sie in je zwei auf einander folgenden Lagen in derselben Ebene enthalten ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch denselben Punct geht, so beschreibt sie, wenn sie als Strahl betrachtet wird, eine Abwicklungsfläche; sie umhüllt, wenn sie als Axe betrachtet wird, eine räumliche Curve. Je nach der zwiefachen Auffassung der geraden Linie geht dann die Linienfläche in die Curve oder in die Abwicklungsfläche über. Die verschiedenen Lagen

der geraden Linie werden dann durch zwei Complex-Gleichungen in Strahlen- oder Axen-Coordinaten dargestellt. Wenn wir

$$y = sz + \sigma,$$
$$x = rz + \varrho$$

für die Gleichungen zweier Projectionen der als Strahl betrachteten geraden Linie nehmen, in Beziehung auf r, s, ϱ, σ differentiiren und nach der Differentiation z eliminiren, erhalten wir, der gemachten Voraussetzung entsprechend:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\varrho}{dr}. \tag{100}$$

Wenn wir andererseits die gerade Linie als Axe betrachten und

$$u = qv + \varkappa,$$
$$t = pv + \pi$$

für die Gleichungen ihrer Durchschnittspuncte mit zwei der drei Coordinaten-Ebenen nehmen, so erhalten wir, derselben Voraussetzung entsprechend, die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{dq}{d\varkappa} = \frac{dp}{d\pi}. \tag{101}$$

Durch jede Abwicklungsfläche ist gleichzeitig eine räumliche Curve und gegenseitig durch jede räumliche Curve eine Abwicklungsfläche bestimmt. Die Gleichung (100) ist die Differential-Gleichung der Abwicklungsflächen, die Gleichung (101) die Differential-Gleichung der räumlichen Curven.

203. Wir erhalten eine zweite Bestimmung der Abwicklungsfläche, wenn wir uns dieselbe durch eine Ebene, welche durch zwei auf einander folgende Lagen des erzeugenden Strahles geht, umhüllt denken und demnach durch zwei Gleichungen in Plan-Coordinaten darstellen. Die die Abwicklungsfläche umhüllenden Ebenen gehören als Umhüllungsebenen zweien Flächen an.

Wir erhalten eine zweite Bestimmung der räumlichen Curve, wenn wir uns dieselbe durch einen Punct, welcher der umhüllenden Axe in zwei auf einander folgenden Lagen gemein ist, beschrieben denken und, dem entsprechend, durch zwei Gleichungen in Punct-Coordinaten darstellen. Eine räumliche Curve ist der Durchschnitt zweier durch Puncte bestimmter Flächen.

Die Abwicklungsflächen werden durch eine einzige Gleichung in Punct-Coordinaten dargestellt. Sie sind als Linienflächen zu betrachten, insofern wir uns diese durch einen Strahl erzeugt denken. Die räumlichen Curven werden durch eine einzige Gleichung in Plan-Coordinaten dargestellt. Sie sind als Linienflächen zu betrachten, insofern wir uns diese durch eine Axe erzeugt denken.

204. Die Abwicklungsfläche kann durch eine weitere Beschränkung in eine Kegelfläche ausarten. Dann gehen alle Strahlen durch einen festen Punct, den Mittelpunct der Kegelfläche. Um dieses auszudrücken, erhalten wir, wenn (x^0, y^0, z^0) der Mittelpunct der Kegelfläche ist, die drei linearen Bedingungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y^0 &= s z^0 + \sigma, \\ x^0 &= r z^0 + \varrho, \\ r y^0 - s x^0 &= \eta. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Von diesen Gleichungen bedingen zwei, vorausgesetzt dass r und s endliche Werthe behalten, die dritte. Nachdem der feste Punct bestimmt worden ist, wird die Kegelfläche durch eine einzige Complex-Gleichung in Strahlen-Coordinaten dargestellt. Nehmen wir für den festen Punct insbesondere den Anfangspunct der Coordinaten, so verschwinden für alle Strahlen gleichzeitig die drei Coordinaten ϱ, σ und η, und zur Bestimmung der Kegelfläche erhalten wir dann eine Gleichung zwischen den beiden übrigbleibenden Coordinaten r und s.

Die räumliche Curve kann durch eine weitere Beschränkung in eine ebene Curve ausarten. Dann liegen alle die Curve umhüllenden Axen in einer festen Ebene, was, wenn wir für diese Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ nehmen, durch die drei linearen Bedingungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= q v^0 + \varkappa w^0, \\ t^0 &= p v^0 + \pi w^0, \\ p u^0 - q t^0 &= \omega w^0 \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

ausgedrückt wird. Von diesen Gleichungen bedingen zwei, vorausgesetzt, dass q und p endlich bleiben, die dritte. Wenn die Ebene bestimmt ist, wird die Curve in ihr durch eine einzige Complex-Gleichung in Axen-Coordinaten dargestellt. Diese Gleichung reducirt sich auf eine Gleichung zwischen zwei der fünf Axen-Coordinaten, wenn wir für die Ebene der Curve insbesondere eine der drei Coordinaten-Ebenen nehmen. Ist diese Ebene YZ, so verschwinden für alle die Curve umhüllenden Axen die drei Coordinaten p, π, ω, und wir erhalten für die umhüllte Curve eine Gleichung zwischen den beiden übrigbleibenden Axen-Coordinaten q und $\varkappa$, und diese beiden

Coordinaten können wir auch als Linien-Coordinaten in der Ebene YZ construiren.

205. Wir können aber auch eine Kegelfläche als von einer Ebene umhüllt betrachten und, dem entsprechend, den Mittelpunct derselben durch die Gleichung

$$x^0 t + y^0 u + z^0 v + w = 0$$

darstellen. Dann bestimmt in Verbindung mit dieser Gleichung eine zweite Gleichung in Plan-Coordinaten die Kegelfläche. Wenn wir den Mittelpunct derselben zum Anfangspuncte nehmen, wonach die vorstehende Gleichung sich auf

$$w = 0$$

reducirt, reicht die zweite Gleichung allein zur Darstellung der Kegelfläche hin. In analoger Weise können wir uns eine ebene Curve durch einen Punct beschrieben denken und ihre Ebene durch die Gleichung

$$t^0 x + u^0 y + v^0 z + w^0 = 0$$

darstellen. Dann bestimmt, in Verbindung mit dieser Gleichung, eine zweite Gleichung in Punct-Coordinaten die ebene Curve. Wenn die Curve in einer der drei Coordinaten-Ebenen liegt, für welche wir wiederum YZ nehmen wollen, so erhalten wir statt der vorstehenden Gleichung

$$x = 0,$$

und eine einzige Gleichung zwischen den beiden übrigbleibenden Punct-Coordinaten, die wir in der Ebene YZ construiren können, ist zur Darstellung der Curve hinreichend.

206. Es kann nur von der Ordnung einer Kegelfläche die Rede sein, wenn wir uns dieselbe als von einer geraden Linie, einem Strahle, beschrieben denken. Diese Ordnung ist gleich dem Grade der Gleichung, durch welche die Kegelfläche in Punct-Coordinaten dargestellt wird. Es kann nur von der Classe einer ebenen Curve die Rede sein, wenn wir uns dieselbe von einer geraden Linie, einer Axe, umhüllt denken. Diese Classe ist gleich dem Grade der Gleichung, durch welche die Curve in Plan-Coordinaten dargestellt wird.

Indem wir in die Geometrie die gerade Linie als Raumelement einführen, und die gerade Linie einmal als Strahl, das andere Mal als Axe betrachten, müssen wir der gewöhnlichen Plan-Geometrie, als vollständig coordinirt, eine Punct-Geometrie zur Seite stellen, neben Curven, welche in der Ebene von Axen umhüllt werden, Kegelflächen, welche durch Strahlen gebildet werden, die durch den Punct gehen. Die Kegelflächen sind von gegebener Ordnung, die Curven von gegebener Classe. Die Classe einer Kegelfläche und die Ordnung einer Curve treten als secundäre Begriffe auf. Erst wenn wir uns die Kegelflächen als durch Ebenen umhüllt denken, welche durch zwei auf einander folgende erzeugende Strahlen gehen, kommt die Classe derselben zur Sprache; sie ist zugleich die Classe ihrer Durchschnittscurven und ist gleich der Anzahl der Tangential-Ebenen, welche durch eine, durch den Mittelpunct der Kegelfläche gehende, gerade Linie an diese sich legen lassen. Erst wenn wir uns die ebene Curve durch den Durchschnitt zweier auf einander folgenden umhüllenden Axen beschrieben denken, können wir von ihrer Ordnung sprechen. Diese ist dann zugleich die Ordnung der Kegelflächen, welche durch dieselbe sich legen lassen und gleich der Anzahl der Puncte, in welchen die Curve von einer in ihrer Ebene liegenden geraden Linie geschnitten wird.

207. Die folgenden Bemerkungen, welche sich an das Vorstehende anknüpfen, berühren wesentlich die Theorie der Darstellung räumlicher Gebilde vermittelst Linien-Coordinaten.

Wir müssen, um eine Kegelfläche in Strahlen-Coordinaten darzustellen, ausdrücken, dass die Strahlen, welche dieselbe bilden, durch einen festen Punct (x^0, y^0, z^0), ihren Mittelpunct, gehen. Um dieses vollständig zu erreichen, sind die Gleichungen (102) alle drei nothwendig. Wenn wir bloss zwei dieser drei Gleichungen, etwa die beiden ersten,

$$\begin{aligned} y^0 &= sz^0 + \sigma, \\ x^0 &= rz^0 + \varrho \end{aligned} \tag{104}$$

nehmen, so drücken dieselben aus, dass der bezügliche Strahl (r, s, ϱ, σ) diejenigen beiden Linien schneidet, welche den Punct (x^0, y^0, z^0) auf die beiden Coordinaten-Eben YZ und XZ projiciren. Es schliesst dieses die doppelte geometrische Bedingung ein, dass der Strahl (r, s, ϱ, σ) entweder durch den gegebenen Punct (x^0, y^0, z^0) geht, oder in derjenigen Ebene liegt, welche die beiden projicirenden Linien enthält und also durch den Punct (x^0, y^0, z^0) geht und der Ebene XY parallel ist. Erst dadurch, dass die dritte Gleichung

$$ry^0 - sx^0 = \eta$$

hinzutritt, fällt die zweite geometrische Deutung der Gleichungen (104) hinweg und dann wird ausschliesslich ausgedrückt, dass der Strahl durch den gegebenen Punct geht.

Wir müssen, um eine ebene Curve in Axen-Coordinaten darzustellen, ausdrücken, dass die Axen, welche dieselben umhüllen, in einer festen Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ liegen. Dazu sind die Gleichungen (103) alle drei nothwendig. Wenn wir bloss zwei dieser drei Gleichungen, etwa die beiden ersten

$$\begin{aligned} u^0 &= q v^0 + \varkappa, \\ t^0 &= p v^0 + \pi \end{aligned} \tag{105}$$

nehmen, so wird durch dieselben ausgedrückt, dass die bezügliche Axe $(p, q, \pi, \varkappa)$ durch die Durchschnittslinien der gegebenen Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ mit den beiden Coordinaten-Ebenen YZ und XZ geht. Diesem wird geometrisch in zwiefacher Weise entsprochen, entweder wenn die Axe $(p, q, \pi, \varkappa)$ in der gegebenen Ebene liegt, oder wenn sie durch denjenigen Punct hindurchgeht, in welcher die Coordinaten-Axe OZ von dieser Ebene geschnitten wird. Die dritte Gleichung

$$p u^0 - q t^0 = w^0$$

muss hinzukommen, um die zweite geometrische Beziehung auszuschliessen.

Wenn wir uns nach dem analytischem Grunde der vorstehenden, auf den ersten Blick paradoxen Relationen fragen, so liegt derselbe darin, dass die dritte der Gleichungen (102) und (103) dann nicht mehr eine algebraische Folge aus den beiden ersten ist, wenn r und s, bezüglich p und q unendlich gross werden.*)

208. Wenn mit der Gleichung

$$\Omega_n = 0,$$

welche einen Linien-Complex eines beliebigen n. Grades in Strahlen-Coordinaten darstelle, die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y^0 &= s z^0 + \sigma, \\ x^0 &= r z^0 + \varrho, \end{aligned}$$

---

*) Durch die Anwendung homogener Linien-Coordinaten wird das Unendliche vermieden. Ersetzen wir zum Beispiel die beiden ersten der Gleichungen (102) durch die folgenden:

$$\begin{aligned} y^0(z-z') &= z^0(y-y') + (yz'-y'z), \\ x^0(z-z') &= z^0(x-x') + (x'z-xz'), \end{aligned}$$

so werden beide Gleichungen gleichzeitig befriedigt, wenn

$$x = x^0, \qquad y = y^0, \qquad z = z^0,$$

das heisst, wenn der bezügliche Strahl durch den gegebenen Punct geht.

Dieselben beiden Gleichungen werden auch dann befriedigt, wenn

$$z = z' = z^0,$$

das heisst, wenn alle Strahlen innerhalb einer mit XY parallelen Ebene liegen, deren Abstand von dieser Ebene gleich z^0 ist.

die wir als zwei lineare Complex-Gleichungen ansehen können, gleichzeitig bestehen, so befriedrigen die Coordinaten aller Strahlen, welche einerseits den Complex-Kegel der n. Ordnung bilden, dessen Mittelpunct (x^0, y^0, z^0) ist, und andererseits die Complex-Curve der n. Classe umhüllen, deren Ebene, parallel mit XY, durch den Mittelpunct des Kegels geht, die vorstehenden drei Gleichungen. Diese drei Gleichungen stellen also, neben dem Complex-Kegel, gleichzeitig auch noch eine Complex-Curve dar.

Ebenso stellt das System der Gleichung eines Complexes des n. Grades in Axen-Coordinaten

$$\Phi_n = 0$$

und der beiden linearen Gleichungen

$$u^0 = qv^0 + \varkappa w^0,$$
$$t^0 = pv^0 + \pi w^0,$$

die wir als Gleichungen zweier Complexe des ersten Grades ansehen können, gleichzeitig eine Complex-Curve, deren Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ ist, und eine Complex-Kegelfläche dar, deren Mittelpunct in dieser Ebene liegt.

Zwischen der Kegelfläche der n. Ordnung und der Curve der n. Classe, welche in dem Vorstehenden durch die drei Complex-Gleichungen dargestellt werden, besteht die geometrische Beziehung, dass die n Seiten, nach welchen die Kegelfläche von der Ebene der Curve geschnitten wird, zugleich diejenigen n Tangenten der Curve sind, welche durch den Mittelpunct der Kegelfläche gehen.

Durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen Linien-Coordinaten werden immer nur solche geometrische Gebilde dargestellt, die in sich selbst reciproke sind.

Wenn wir, in dem Falle der Strahlen-Coordinaten, von diesen zu Punct-Coordinaten übergehen, so führen wir in die vorstehenden Entwicklungen stillschweigend die dritte der drei linearen Gleichungen (102) ein, und in der analytischen Darstellung verschwindet jede Spur der von Strahlen umhüllten Curve.

Gehen wir in dem Falle der Axen-Coordinaten von diesen zu Plan-Coordinaten über, so führen wir stillschweigend die dritte der drei linearen Gleichungen (103) ein, und in der analytischen Darstellung verschwindet jede Spur der von Axen gebildeten Kegelfläche.

209. Wir haben bereits als characteristische Eigenschaften eines Com-

plexes des n. Grades die folgenden beiden, in Beziehung auf einander reciproken, aufgestellt (Nr. 19):

In einem Complexe des n. Grades liegen in jeder den Raum durchziehenden Ebene unendlich viele Linien desselben, welche eine Curve der n. Classe umhüllen. Durch jeden Punct des Raumes gehen unendlich viele Linien desselben, welche eine Kegelfläche der n. Ordnung bilden.

Hieran knüpft sich unmittelbar die doppelte Construction der Flächen eines Complexes der n. Ordnung. Wir können dieselben, nachdem wir irgend eine feste gerade Linie angenommen haben, einmal als durch diejenigen Complex-Curven n. Classe, deren Ebenen durch die feste Linie gehen, gebildet, das andere Mal als durch diejenigen Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf der festen Linie liegen, umhüllt betrachten.

Nachdem überhaupt die Existenz der Complexe des n. Grades festgestellt ist, können wir an jede der beiden obigen characteristischen Eigenschaften, die im Grunde nur eine einzige sind, die Definition solcher Complexe anknüpfen, und diese Definition, wenn es überhaupt gestattet ist, das Imaginäre in den Bereich der Geometrie hineinzuziehen, in gewöhnlicher Weise als eine geometrische bezeichnen.

Die doppelte Bestimmung eines Complexes des n. Grades würde ihre Bedeutung verlieren und wir würden vergeblich nach einem analytischen Ausdruck für den Complex suchen, wenn wir in der Definition die Worte Ordnung und Classe vertauschen wollten.

Indem wir Complex-Flächen vermittelst des Complexes, dem sie angehören, bestimmen, knüpft sich diese Bestimmung an die Betrachtung von geraden Linien und ihren Coordinaten. Die Flächen eines Complexes des n. Grades sind von gleicher Ordnung und Classe, die wir durch p bezeichnen wollen. Als Flächen der p. Ordnung betrachten wir sie als aus Puncten bestehend, als von einer geraden Linie in p Puncten, von einer Ebene in einer Curve p. Ordnung geschnitten. Als Flächen der p. Classe betrachten wir sie als von Ebenen umhüllt; durch eine gerade Linie gehen p Ebenen der Fläche und die Umhüllungskegel sind von der p. Classe. Die Complex-Flächen haben eine vielfache Linie, in der ein vielfacher Strahl und eine vielfache Axe zusammenfallen. Die Linie sei eine m fache. Dann schneiden sich nach ihr, wenn wir sie als Strahl betrachten, m Schalen der Fläche: die Fläche hat in jedem Puncte der m fachen Linie m Tangential-Ebenen. Die m fache Linie ist der geometrische Ort von m fachen Puncten der Fläche und alle Curven, nach welchen die Fläche von Ebenen geschnitten wird, haben auf dieser Linie einen $m$fachen Punct. Die $m$fache Linie, als Axe betrachtet, ist ein von $m$fachen Ebenen der Fläche umhüllter Ort. Jede durch die $m$fache Linie gehende Ebene wird von der Fläche in m auf dieser Linie liegenden Puncten berührt. Jeder Punct einer solchen Ebene ist der Mittelpunct eines Umhüllungskegels, der m Schalen hat, welche von der Ebene, die auch eine $m$fache Ebene des Kegels ist, nach m durch die mBerührungspuncte auf der Fläche gehenden Kegelseiten berührt werden.

210. Die Flächen eines Complexes des zweiten Grades haben eine Doppellinie. Sie werden von Ebenen in Curven der vierten Ordnung geschnitten und von Kegeln der vierten Classe umhüllt. Wenn die schneidende Ebene insbesondere eine Meridianebene ist und demnach durch die Doppellinie geht, so zerfällt die Durchschnitts-Curve der vierten Ordnung in eine Curve der zweiten Ordnung und zwei Strahlen, welche in die Doppellinie zusammenfallen. Betrachten wir die Curve als von Axen umhüllt und bedienen wir uns zu ihrer analytischen Darstellung der Linien-Coordinaten in ihrer Ebene, so reducirt sich die Classe derselben, indem jede Spur der beiden zusammenfallenden Strahlen, die dem Complexe fremd sind, fortfällt, auf die zweite: die Curve in der Meridianebene wird eine Curve des Complexes. Wenn wir andererseits die Mittelpuncte der Umhüllungskegel insbesondere auf der Doppellinie des Complexes zweiten Grades annehmen, so artet ein solcher Kegel, welcher im Allgemeinen von der vierten Classe ist, in einen Kegel der zweiten Classe und zwei umhüllte Axen aus, die in der Doppellinie zusammenfallen. Von diesen beiden Axen verschwindet jede Spur, wenn wir uns den Kegel durch einen Strahl beschrieben denken. Dann tritt also der Umhüllungskegel als ein Kegel zweiter Ordnung, als ein Kegel des Complexes, auf.

211. In dem allgemeinen Falle der Flächen eines Complexes des n. Grades lösen sich von ihren Durchschnitts-Curven, wenn die schneidende Ebene insbesondere durch die $m$fache Linie der Flächen geht, m Strahlen ab, welche in dieser Linie zusammenfallen. Wenn wir von diesen m Strahlen absehen, reducirt sich die Ordnung der Curve auf $(p-m)$. Von der andern Seite erhalten wir, da die Durchschnitts-Curven, deren Ebenen durch die $m$fache Linie gehen, Complex-Curven und als solche die allgemeinen der n. Classe sind, für die Ordnung dieser Curven $n(n-1)$. Wir finden auf diese Weise:

$$p = n(n-1) + m. \tag{106}$$

Wenn wir den Mittelpunct des Umhüllungskegels insbesondere auf der $m$fachen Linie der Complex-Fläche annehmen, so sondern sich von diesem Kegel m Axen ab, die in der $m$fachen Linie zusammenfallen, und wenn wir von diesen m Axen absehen, sinkt die Classe des Umhüllungskegels von p auf $(p-m)$. Dann wird er ein Kegel des Complexes und ist als solcher der allgemeine der n.Ordnung und also von der $n(n-1)$.Classe. Wir gelangen auch auf diesem Wege zu der vorstehenden Gleichung, welche eine Relation enthält zwischen n, dem Grade des Complexes, dem die Fläche angehört, p, der Ordnung und Classe dieser Fläche, und m, der Zahl, welche angibt, wie viele Strahlen einerseits und wie viele Axen andererseits in der vielfachen Linie der Fläche zusammenfallen.

212. Damit eine Complex-Fläche vollständig durch eine Complex-Curve beschrieben werde, muss sich die Meridianebene, welche diese veränderliche Curve enthält, um die beliebig angenommene vielfache Linie durch 180 Grad drehen. Bei dieser Umdrehung geht die Complex-Curve in einer bestimmten Anzahl von Lagen der Meridianebene durch irgend einen gegebenen Punct der vielfachen Linie der Complex-Fläche. Diese Anzahl ist zugleich die Anzahl der Schalen der Fläche, welche auf der vielfachen Linie sich schneiden, also gleich m.

Jeder Punct der vielfachen Linie der Complex-Fläche ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels der n.Ordnung, an welchen sich, weil er der allgemeine dieser Ordnung ist, durch die vielfache Linie $n(n-1)$ Meridianebenen legen lassen, welche die Kegelfläche berühren. Die $n(n-1)$ Kegelseiten, nach welchen diese Berührung stattfindet, berühren zugleich, weil sie Linien des Complexes sind, die in derselben Meridianebene liegenden Meridiancurven im Mittelpuncte des Umhüllungskegels auf der vielfachen Linie. Die Zahl $n(n-1)$ bestimmt sonach die Anzahl der Meridiancurven, welche durch den auf der vielfachen Linie beliebig angenommenen Mittelpunct des Umhüllungskegels gehen, also die Anzahl der Schalen der Complex-Fläche, welche nach der vielfachen Linie sich schneiden.

Die vielfache Linie ist eine $n(n-1)$fache.

Jeder Punct der $n(n-1)$fachen Linie der Flächen eines Complexes des n.Grades ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels der n.Ordnung, an den sich durch die $n(n-1)$fache Linie der Fläche $n(n-1)$ Ebenen legen lassen. Die $n(n-1)$ Seiten, nach welchen der Kegel durch diese Ebenen berührt wird, berühren ihrerseits die $n(n-1)$ Complex-Curven, welche im Mittelpuncte des Kegels sich schneiden in diesem Puncte.

Neben den vorstehenden Satz stellt sich sogleich der folgende:

Jede Meridianebene der Fläche eines Complexes des n. Grades enthält eine Complex-Curve, welche die $n(n-1)$fache Linie der Fläche in dieser Ebene in $n(n-1)$ Puncten schneidet. Die Tangenten der Curve in diesen $n(n-1)$ Puncten sind Seiten von $n(n-1)$ Complex-Kegeln, die diese Puncte zu Mittelpuncten haben und die Meridianebene nach diesen Seiten berühren.

Wir können die beiden vorstehenden Sätze, die als die Aussage correlativer Eigenschaften eines Complexes gegenseitig aus einander folgen, auch unmittelbar an die obige Definition der Complexe des n. Grades anschliessen und erhalten dann den folgenden Satz:

Die Anzahl der geraden Linien (Strahlen und Axen), welche die vielfache Linie einer Complex-Fläche bilden, ist gleich der Ordnung der die Fläche erzeugenden Complex-Curven und der Classe der dieselben umhüllenden Complex-Kegel.

Wir haben

$$m = n(n-1), \tag{107}$$

mithin

$$p = 2n(n-1) = 2m. \tag{108}$$

Die Flächen eines Complexes der n. Ordnung sind von der $2n(n-1)$. Ordnung und Classe und haben eine $n(n-1)$fache Linie.

213. An die Stelle der vorstehenden geometrischen Betrachtungen können wir eben so einfache analytische setzen. Wir wollen hierbei von den Flächen der Complexe des zweiten Grades ausgehen. Die Projectionen der einzelnen Meridian-Curven solcher Complex-Flächen auf XZ haben wir durch die folgende Gleichung dargestellt (Nr. 169.):

$$\begin{aligned} &(F \operatorname{tang}^2 \varphi - 2K \operatorname{tang} \varphi + E) w^2 \\ &+ 2(R \operatorname{tang}^2 \varphi - O \operatorname{tang} \varphi - U) tw \\ &+ (B \operatorname{tang}^2 \varphi + 2G \operatorname{tang} \varphi + C) t^2 \\ &- 2(Q \operatorname{tang} \varphi - P) vw - 2(J \operatorname{tang} \varphi + H) tv + Av^2 = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

und dabei die Voraussetzung gemacht, dass alle Meridianebenen durch die Coordinaten-Axe OX gehen, und dass OZ auf OX senkrecht steht. Irgend ein beliebiger Punct dieser Axe ist zum Anfangspunct der Coordinaten genommen worden. Die Ebene der jedesmaligen Meridian-Curve wird durch den Winkel φ bestimmt, den dieselbe mit einer festen Meridianebene bildet. Wenn wir unter diesen Voraussetzungen in der vorstehenden Gleichung w gleich Null setzen und durch t dividiren, erhalten wir zur Bestimmung der Richtung der Projectionen der beiden durch den Anfangspunct an die jedesmalige durch φ bestimmte Meridian-Curve gelegten Tangenten die folgende Gleichung:

$$A\left(\frac{v}{t}\right)^2 - 2(J \operatorname{tang}\varphi + H)\left(\frac{v}{t}\right) + (B \operatorname{tang}^2\varphi - 2G \operatorname{tang}\varphi + C) = 0. \quad (109)$$

Wenn die Meridian-Curve durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, so fallen die beiden durch diesen Punct gehenden Tangenten zusammen, was analytisch dadurch ausgedrückt wird, dass die vorstehende in Beziehung auf $\left(\frac{v}{t}\right)$ quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat. Dieses fordert

$$A(B \operatorname{tang}^2\varphi + 2G \operatorname{tang}\varphi + C) - (J \operatorname{tang}\varphi + H)^2 = 0. \quad (110)$$

Diese Bedingungs-Gleichung ist, in Beziehung auf tang φ, vom zweiten Grade: es gehen also zwei der unendlich vielen Meridian-Curven der Complex-Fläche durch jeden willkürlich auf der Coordinaten-Axe OX angenommenen Punct: es ist diese Axe eine Doppellinie der Complex-Fläche.

Die letzte Gleichung wird, wenn wir in derselben

$$\frac{v}{t} = -\operatorname{tang}\psi$$

setzen:

$$A \operatorname{tang}^2\psi + B \operatorname{tang}^2\varphi + C + 2G \operatorname{tang}\varphi + 2H \operatorname{tang}\psi + 2J \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = 0. \quad (111)$$

Diese Gleichung ist als die Gleichung einer Kegelfläche anzusehen. ψ bedeutet denjenigen Winkel, den eine Seite desselben mit der Ebene YZ, $\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ den Winkel, den sie mit OX bildet. Sie gibt, nachdem durch eine beliebige Annahme von φ die Ebene bestimmt ist, in welcher zwei Seiten des Kegels liegen, zwei Werthe von ψ, durch welche, in dieser Ebene, die Richtung der beiden Seiten gegeben ist. Zugleich aber ist φ der Winkel, den die Projection dieser Kegelseite auf YZ, und ψ der Winkel, den die Projection derselben auf XZ mit der Coordinaten-Axe OZ bildet; demnach kommt:

$$\operatorname{tang}\psi = r, \qquad \operatorname{tang}\varphi = s,$$

und die Gleichung der Kegelfläche geht in die folgende über:

$$Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Jrs = 0. \quad (112)$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir, wenn wir in der allgemeinen Complex-Gleichung (I) die Linien-Coordinaten ϱ, σ und, in Folge davon, η gleich Null setzen. Sie stellt denjenigen Complex-Kegel dar, der den Anfangspunct zu seinem Mittelpuncte hat.

214. Durch die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen erhalten wir für Complexe eines beliebigen n. Grades die Bestimmung der Ebenen der $n(n-1)$ Meridian-Curven n. Classe, welche im Anfangspuncte, einem beliebigen Puncte ihrer $n(n-1)$ fachen Linie, sich schneiden, und der Tangenten dieser Curven in diesem Puncte. Die Gleichung des Complex-Kegels, dessen Mittelpunct in den Anfangspunct fällt, ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der allgemeinen Gleichung des Complexes n. Grades, wie oben, ϱ, σ und η gleich Null setzen. Die resultirende Gleichung des n. Grades in r und s sei

$$\Phi(r, s) \equiv \Xi_n = 0;$$

sie gibt, wenn wir differentiiren:

$$\frac{d\Xi_n}{dr} = 0.$$

Durch Elimination von r aus den beiden vorstehenden Gleichungen erhalten wir zur Bestimmung der Ebenen der $n(n-1)$ im Anfangspuncte sich schneidenden Meridian-Curven der Complex-Fläche $n(n-1)$ Werthe von s und demnach durch die entsprechenden $n(n-1)$ gleichen Wurzelwerthe r der vorletzten Gleichung die Richtung der Tangenten der Meridian-Curven im Anfangspuncte.

215. Wir haben im 6. Paragraphen dieses Abschnittes auf analytischem Wege nachgewiesen, dass die Flächen eines Complexes des zweiten Grades acht Doppelpuncte haben, welche paarweise auf den vier singulären Strahlen liegen, und acht Doppelebenen, welche paarweise nach den vier singulären Axen sich schneiden. Wie die vier singulären Strahlen die Doppellinie schneiden, liegen die vier singulären Axen mit der Doppellinie in derselben Ebene und schneiden sie also ebenfalls. Wir wollen die Ebenen, welche durch die Doppellinie und die vier singulären Strahlen sich legen lassen, die vier singulären Ebenen der Complex-Fläche nennen, jene durch S_1, S_2, S_3, S_4, diese durch E_1, E_2, E_3, E_4 bezeichnen. Wir wollen in entsprechender Weise die Durchschnittspuncte der vier singulären Axen mit der Doppellinie die vier singulären Puncte der Complex-Fläche nennen, und jene durch A_1, A_2, A_3, A_4, diese durch P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnen.

Jeder Strahl, welcher der Doppellinie als einem Doppelstrahle der Complex-Fläche begegnet, schneidet die Fläche, weil diese von der vierten Ordnung ist, ausserdem nur noch in zwei Puncten. Jeder der vier singulären Strahlen enthält, ausser dem Puncte, in welchem er die Doppellinie schneidet, auch noch ein Paar von Doppelpuncten, also sechs paarweise zusammenfallende Puncte der Complex-Fläche: er liegt seiner ganzen Erstreckung nach auf dieser Fläche.

Wenn wir durch die Doppellinie, als Doppelstrahl der Complex-Fläche, eine Ebene legen, die wir als Meridian-Ebene bezeichnet haben, so wird die Fläche, weil sie von der vierten Ordnung ist, von dieser Ebene, ausser in den beiden in der Doppellinie zusammenfallenden Strahlen, noch in einer Curve der zweiten Ordnung geschnitten. Die durch einen singulären Strahl gehende Meridianebene ist eine Tangential-Ebene der Fläche, weil die Curve zweiter Ordnung in ihr in zwei Strahlen ausartet, welche in dem singulären Strahle zusammenfallen. Die durch die vier singulären Strahlen gehenden Meridianebenen werden von der Fläche nach diesen Strahlen berührt. Die vollständige Durchschnitts-Curve vierter Ordnung artet in diesem Falle in vier Strahlen aus, welche, paarweise, in dem Doppelstrahle und dem singulären Strahle zusammenfallen. Betrachten wir dagegen die Meridian-Curve der vierten Ordnung als eine von Axen umhüllte Complex-Curve zweiter Classe, wobei die beiden in der Doppellinie zusammenfallenden Strahlen ganz ausser Acht bleiben, so artet diese in dem vorliegenden Falle in das System der beiden Puncte aus, mit welchen die auf dem jedesmaligen Strahle liegenden Doppelpuncte zusammenfallen. Tangential-Ebene der Fläche in jedem Puncte eines singulären Strahles ist die singuläre Ebene, welche durch diesen Strahl und die Doppellinie geht.

216. Durch jede Axe, welche mit der Doppellinie (Doppelaxe) der Complex-Fläche in einer Ebene liegt, lassen sich, da die Fläche von der vierten Classe ist, ausser der durch die Doppellinie gehenden Doppelebene nur noch zwei Ebenen an die Fläche legen. Jede der vier singulären Axen enthält, ausser der Ebene, welche durch die Doppellinie geht, auch noch ein Paar von Doppelebenen: also sechs paarweise zusammenfallende Ebenen der Complex-Fläche. In Folge davon ist jede durch dieselbe gelegte Ebene eine Ebene der Complex-Fläche.

Der Umhüllungskegel einer Complex-Fläche der vierten Classe, welcher einen Punct der Doppellinie zum Mittelpuncte hat, löst sich in zwei in die Doppellinie zusammenfallende Axen und einen Kegel der zweiten Classe auf. Die singulären Puncte, P, in welchen die singulären Axen, A, die Doppellinie schneiden, sind die Mittelpuncte von Kegeln zweiter Classe, welche in zwei Axen ausarten, die in den singulären Axen zusammenfallen und die Fläche in den singulären Puncten berühren. Der vollständige Umhüllungskegel artet in diesem Falle in vier Axen aus, welche paarweise in der Doppellinie und der bezüglichen singulären Axe zusammenfallen. Betrachten wir hingegen den Umhüllungskegel als einen von Strahlen beschriebenen Kegel zweiter Ordnung, so artet derselbe in das System der beiden Ebenen aus, welche mit den beiden durch die jedesmalige singuläre Axe gehenden Doppelebenen zusammenfallen. Berührungspunct auf allen Ebenen der Fläche, welche durch eine singuläre Axe gehen, ist der singuläre Punct, in welchem diese Axe die Doppellinie schneidet.

217. Eine beliebige Ebene schneidet die Complex-Fläche in einer Curve vierter Ordnung, die in ihrem Durchschnitte mit der Doppellinie einen Doppelpunct hat. In diesem Doppelpuncte schneiden sich entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Zweige der Curve; in diesem letzteren Falle ist der Doppelpunct ein isolirter Punct der Curve. Beim Uebergange zwischen diesen beiden Fällen wird er ein Cuspidalpunct. Diesem Uebergange entspricht, dass die Ebene der Curve durch einen der vier singulären Puncte P_1, P_2, P_3, P_4 geht, in welchen die Doppellinie der Complex-Fläche von den vier singulären Axen A_1, A_2, A_3, A_4 geschnitten wird. Durch diese vier Puncte wird die Doppellinie in vier Segmente P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 getheilt, wobei wir die beiden äusseren, im Unendlichen zusammenstossenden Segmente als ein einziges rechnen. Es liegt die Doppellinie ganz in der Complex-Fläche, aber in der Weise, dass in zwei nicht an einander stossenden Segmenten zwei reelle Schalen der Fläche sich schneiden, während die beiden übrigen, ebenfalls nicht an einander stossenden Segmente die reellen Durchschnitte zweier imaginären Schalen der Fläche sind. Die beiden Tangenten der Curve in ihrem Doppelpuncte sind zugleich mit den beiden Tangential-Ebenen der Complex-Fläche in diesem Puncte reell oder imaginär. Sie liegen in diesen beiden Tangential-Ebenen und drehen sich, in diesen beiden Ebenen, um den gemeinschaftlichen Doppelpunct, wenn die Ebene der Curve beliebig um diesen Punct gedreht wird. Wenn die schneidende Ebene durch einen der vier singulären Puncte geht, so ist dieser Punct im Allgemeinen ein Cuspidalpunct der Durchschnitts-Curve. Die beiden Tangential-Ebenen der Fläche in einem solchen Puncte fallen in derjenigen Ebene zusammen, welche durch die Doppellinie und die bezügliche singuläre Axe geht. In dieser Ebene liegen

die Tangenten aller Durchschnitts-Curven in ihrem gemeinschaftlichen, mit dem singulären Puncte zusammenfallenden Cuspidalpuncte, welche Richtung die schneidende Ebene auch haben mag. Wir können die Complex-Fläche durch eine veränderliche Curve vierter Ordnung mit einem Cuspidalpunct, welche wir um die Tangente in diesem Puncte sich drehen lassen, beschreiben. Diese Tangente kann in der Tangential-Ebene der Fläche alle möglichen Richtungen haben; wenn sie insbesondere mit der singulären Axe zusammenfällt, hat die Durchschnitts-Curve, wie auch ihre Ebene um diese Axe sich drehen mag, in allen Lagen derselben zwei Zweige, welche sich auf der singulären Axe in dem singulären Puncte berühren. Wenn die um die singuläre Axe sich drehende Ebene insbesondere mit einer derjenigen beiden Ebenen zusammenfällt, in welche der umhüllende Complex-Kegel, wenn sein Mittelpunct in den singulären Punct fällt, ausartet, so löst sich die in ihr liegende Curve der vierten Ordnung in zwei Curven der zweiten Ordnung auf, welche in diejenigen Curven zweiter Ordnung zusammenfallen, nach deren ganzer Erstreckung die Fläche von der Ebene berührt wird. Diese Curve berührt die singuläre Axe in dem singulären Puncte. Wenn endlich die um die singuläre Axe sich drehende Ebene zugleich durch die Doppellinie geht, löst sich die Durchschnitts-Curve vierter Ordnung in eine Curve zweiter Ordnung und zwei in der Doppellinie zusammenfallende gerade Linien auf, die eine zweite Curve zweiter Ordnung vertreten, welche die erste im singulären Puncte berührt.

218. Jeder Punct des Raumes ist der Mittelpunct eines Kegels der vierten Classe, welcher die Complex-Fläche umhüllt und diejenige Meridian-Ebene, welche durch den Punct geht, zur Doppelebene hat. Diese Doppelebene wird entweder von zwei reellen Schalen der Kegelfläche nach zwei reellen Seiten derselben berührt, oder diese beiden Schalen sind imaginär und mit ihnen die beiden Seiten des Kegels. In diesem letztern Falle ist der Doppelcontact ein imaginärer: die Doppelebene ist eine isolirte. Die beiden Seiten, nach welchen der Umhüllungskegel die Doppelebene berührt, schneiden die Doppellinie der Complex-Fläche in zwei Puncten: in diesen beiden Puncten wird diese Fläche von der Doppelebene berührt. Zu den Meridian-Ebenen gehören die vier singulären Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4, welche die vier singulären Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 der Complex-Fläche enthalten. Sie theilen den unendlichen Raum in vier Raumsegmente E_1E_2, E_2E_3, E_3E_4, E_4E_1, deren jedes durch zwei auf einander folgende singuläre Ebenen begrenzt wird und aus zwei

Theilen besteht, welche im Unendlichen zusammenstossen. Wenn der Mittelpunct des Umhüllungskegels von einem der vier Raumsegmente durch eine singuläre Ebene hindurch in das anliegende Raumsegment hinübertritt, wird der fragliche Kegel, bei einer der beiden Lagen seines Mittelpunctes, nach zweien seiner Seiten berührt, während bei der andern Lage seines Mittelpunctes die durch diesen gehende Meridian-Ebene eine isolirte Doppelebene ist. In dem Uebergangsfalle, wo der Mittelpunct des Umhüllungskegels in die singuläre Ebene selbst fällt, osculirt diese Ebene den Umhüllungskegel: sie ist eine Inflexionsebene desselben, welche ihn zugleich berührt und schneidet. Wenn der Mittelpunct des Umhüllungskegels in derselben Meridian-Ebene seine Lage ändert, so drehen sich in dieser Ebene die beiden Seiten, nach welchen der Kegel von dieser Ebene berührt wird, um zwei feste Puncte der Doppellinie, in welchen die Complex-Fläche von der Meridian-Ebene berührt wird. Wenn die Meridian-Ebene um die Doppellinie sich dreht, ändern die beiden Berührungspuncte auf dieser Linie ihre Lage. Sie fallen insbesondere, wenn der Mittelpunct des Umhüllungskegels in einer der vier singulären Ebenen angenommen wird, in demjenigen Puncte zusammen, in welchem der bezügliche singuläre Strahl in die Doppellinie einschneidet. Wir können eine Complex-Fläche durch einen veränderlichen Kegel vierter Ordnung umhüllen, der eine gegebene Ebene zur Inflexionsebene hat und dessen Mittelpunct auf einer geraden Linie in dieser Ebene fortrückt. Die gegebene Ebene wird dann die singuläre Ebene der Complex-Fläche und die gegebene Linie in ihr schneidet die Doppellinie in demselben Puncte, in welchem sie von dem bezüglichen Strahle geschnitten wird. Wenn insbesondere noch der Mittelpunct des Umhüllungskegels in der singulären Ebene auf dem singulären Strahle liegt und auf demselben fortrückt, so hat der fragliche Kegel in allen Lagen seines Mittelpunctes zwei Schalen, welche die singuläre Ebene nach dem singulären Strahle berühren. Nur dann, wenn der Mittelpunct auf diesem Strahle, der durch zwei der acht Doppelpuncte geht, in einem dieser beiden Doppelpuncte angenommen wird, löst sich der Umhüllungskegel vierter Classe in zwei Kegel zweiter Classe auf, welche in dem Berührungskegel des Doppelpunctes zusammenfallen. Dieser Kegel hat den singulären Strahl zu einer seiner Seiten, und wird nach demselben von der bezüglichen singulären Ebene berührt.

219. Jeder Punct des Raumes ist der Mittelpunct eines Umhüllungskegels der Complex-Fläche, welcher acht Doppelseiten hat, die durch die

acht Doppelpuncte der Fläche gehen. Alle Curven, nach welchen die Fläche von umschriebenen Kegeln berührt wird, haben die acht Doppelpuncte der Fläche auch zu ihren Doppelpuncten. Diese Relation besteht auch dann, wenn der Mittelpunct des Kegels in die Doppellinie der Fläche fällt. Dann aber sondern sich von der Kegelfläche, die als Kegelfläche vierter Classe mit einer durch die Doppellinie gehenden Doppelebene im Allgemeinen von der zehnten Ordnung ist, vier Paare von Ebenen, welche mit den vier singulären Ebenen der Fläche zusammenfallen, ab, wonach nur noch ein Kegel der zweiten Ordnung übrig bleibt. Die Berührungs-Curve dieses Kegels geht durch die acht Doppelpuncte der Fläche und wird von jeder der vier singulären Ebenen in zwei dieser Puncte geschnitten.

Wenn wir, in Uebereinstimmung mit dem Vorstehenden, die Fläche von einem Puncte aus, der auf ihrer Doppellinie liegt und auf dieser beliebig bis ins Unendliche fortrücken kann, auf eine beliebige Ebene projiciren (wir können zur Veranschaulichung den Schattenriss der Fläche nehmen, die wir von einem Puncte ihrer Doppellinie aus beleuchten), so erhalten wir einen Kegelschnitt, der mit der Lagen-Aenderung des Punctes auf der Doppellinie fortwährend sich ändert, und zugleich vier gerade Linien, die ihre Lage behalten. Diese sind die Projectionen der vier singulären Strahlen, oder auch, was dasselbe heisst, die Durchschnittslinien der Bildebene mit den vier singulären Ebenen der Fläche. Sie gehen sämmtlich durch denjenigen Punct, in welchem die Doppellinie der Fläche die Bildebene trifft, und schneiden den Kegelschnitt in den Projectionen der acht Doppelpuncte. Wenn der Mittelpunct des umschriebenen Kegels aus der Doppellinie herausrückt, formt sich das System des Kegelschnitts und der vier geraden Linien in eine Curve mit acht Doppelpuncten um.

Wenn insbesondere der Mittelpunct des umschriebenen Kegels zweiter Ordnung in einen der vier singulären Puncte der Complex-Fläche fällt und in Folge davon in ein System von zwei Ebenen sich auflöst, so zerfällt die räumliche Berührungs-Curve vierter Ordnung in zwei ebene Curven zweiter Ordnung. Auf diese beiden Curven vertheilen sich dann die acht Doppelpuncte der Fläche.

220. Jede Ebene schneidet die Complex-Fläche in einer Curve, welche von der vierten Ordnung und zugleich, weil sie auf der Doppellinie der Fläche einen Doppelpunct hat, von der zehnten Classe ist. Die Tangential-Ebenen der Fläche in Puncten der Durchschnitts-Curve bestimmen eine Abwicklungs-

fläche. Alle solche Abwicklungsflächen haben die acht Doppelebenen der Complex-Fläche auch zu den ihrigen. Die Durchschnitts-Curve wird von allen Axen umhüllt, nach welchen ihre Ebene von den Umhüllungsebenen der Abwicklungsfläche geschnitten wird; die Durchschnittslinien mit den acht Doppelebenen sind Doppelaxen der Durchschnitts-Curve. Diese Relationen bestehen auch dann noch fort, wenn die schneidende Ebene durch die Doppellinie der Complex-Fläche geht. Dann sondern sich von der Durchschnitts-Curve in ihr acht Puncte ab, welche paarweise in den vier auf der Doppellinie liegenden singulären Puncten zusammenfallen, und es bleibt nur noch eine Curve zweiter Classe, die zugleich der Complex-Fläche und dem Complexe angehört, übrig. Diese Curve wird von den acht Durchschnitten mit den acht Doppelebenen, welche paarweise in den vier singulären Puncten auf der Doppellinie sich schneiden, umhüllt. Wenn die schneidende Ebene insbesondere mit einer der vier singulären Ebenen der Fläche zusammenfällt, so löst sich die Curve zweiter Classe in zwei Puncte, welche mit zwei Doppelpuncten der Complex-Fläche zusammenfallen, die Abwicklungsfläche vierter Classe in die beiden Berührungskegel zweiter Classe in diesen beiden Puncten auf. Dann geht jede von zwei zusammengehörigen Doppelebenen durch einen der beiden Doppelpuncte.

221. Durch die beschränkende Bedingung, dass keine Doppelebene zwei solche Doppelpuncte enthalten kann, welche auf demselben singulären Strahle liegen, und ebenso, dass durch keinen Doppelpunct zwei solche Doppelebenen gehen können, welche nach derselben singulären Axe sich schneiden, ist unmittelbar einerseits die Vertheilung der acht Doppelpuncte zu vier und vier auf je zwei nach derselben singulären Axe sich schneidenden Doppelebenen gegeben, so wie andererseits die Vertheilung der acht Doppelebenen zu vier und vier, welche durch je zwei Doppelpuncte gehen, die auf demselben singulären Strahle liegen.

Wir wollen die vier singulären Strahlen durch die Symbole

$$(1,\ 2),\qquad (3,\ 4),\qquad (5,\ 6),\qquad (7,\ 8)$$

und die Doppelpuncte auf ihnen durch

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

bezeichnen. Wir erhalten die folgenden acht Gruppen von Puncten:

$$\begin{array}{ll} (1,\ 3,\ 5,\ 7), & (2,\ 4,\ 6,\ 8), \\ (1,\ 3,\ 6,\ 8), & (2,\ 4,\ 5,\ 7), \\ (1,\ 5,\ 4,\ 8), & (2,\ 6,\ 3,\ 7), \\ (1,\ 7,\ 4,\ 6), & (2,\ 8,\ 3,\ 5). \end{array} \tag{113}$$

In keiner der Gruppen kommen zwei Doppelpuncte vor, die auf demselben Strahle liegen. Je zwei neben einander gestellte Gruppen enthalten sämmtliche acht Doppelpuncte. Die vier Doppelpuncte einer der beiden Gruppen liegen auf einer, die vier der andern auf der andern zweier Doppelebenen, welche auf einer singulären Axe sich schneiden. In derselben Aufeinanderfolge wollen wir, zur Bezeichnung der acht Doppelebenen, statt der vorstehenden die folgenden einfachern nehmen:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}, & \mathrm{II}, \\ \mathrm{III}, & \mathrm{IV}, \\ \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, \\ \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII}. \end{array}$$

Dann sind

$$(\mathrm{I},\ \mathrm{II}), \qquad (\mathrm{III},\ \mathrm{IV}), \qquad (\mathrm{V},\ \mathrm{VI}), \qquad (\mathrm{VII},\ \mathrm{VIII})$$

die Symbole für die vier singulären Axen, auf welchen die acht Doppelebenen I und II, III und IV, V und VI, VII und VIII sich schneiden. Aus dem Schema (113) erhalten wir unmittelbar für die Vertheilung der acht Doppelebenen in Gruppen von vier solcher Ebenen, die durch denselben Doppelpunct gehen, das folgende Schema:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I},\ \mathrm{III},\ \mathrm{V},\ \mathrm{VII}), & (\mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VIII}), \\ (\mathrm{I},\ \mathrm{III},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VIII}), & (\mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V},\ \mathrm{VII}), \\ (\mathrm{I},\ \mathrm{V},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{VIII}), & (\mathrm{II},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{III},\ \mathrm{VII}), \\ (\mathrm{I},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{VI}), & (\mathrm{II},\ \mathrm{VIII},\ \mathrm{III},\ \mathrm{V}). \end{array}\right\} \quad (114)$$

Die vier Doppelebenen der vorstehenden acht Gruppen schneiden sich bezüglich in den acht Doppelpuncten, die wir früher durch die Symbole

$$\begin{array}{ll} 1, & 2, \\ 3, & 4, \\ 5, & 6, \\ 7, & 8 \end{array}$$

bezeichnet haben. Diese acht Doppelpuncte liegen paarweise auf den vier singulären Strahlen der Complex-Fläche, deren Symbole (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8) sind.

Wenn also die acht Doppelpuncte der Fläche gegeben sind, so erhalten wir unmittelbar die acht Doppelebenen derselben und, umgekehrt, wenn diese gegeben sind, jene. Es liegt in den acht Puncten und acht Ebenen ein merkwürdiges, in sich selbst polar-reciprokes, geometrisches Gebilde vor.

222. Wenn wir durch die Doppellinie einer Complex-Fläche eine beliebige

Ebene legen und auf derselben einen Punct beliebig annehmen, so liegt in der Ebene eine Complex-Curve zweiter Classe und der Punct ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels zweiter Ordnung. Zwei Seiten des Kegels sind zwei Tangenten der Curve. Die Polarebene der Doppellinie in Beziehung auf den Kegel geht durch den Pol derselben Doppellinie in Beziehung auf die Curve. Diese Beziehung besteht fort, wie auch die Ebene der Curve um die Doppellinie sich drehen, wie auch der Mittelpunct des Kegels auf dieser Doppellinie seine Lage ändern mag. Daraus folgt auf geometrischem Wege unmittelbar, was wir früher schon analytisch bewiesen haben, dass die Pole der Doppellinie einer Complex-Fläche in Beziehung auf alle Meridian-Curven derselben in gerader Linie liegen, und dass sich, nach derselben geraden Linie, die Polarebenen der Doppellinie in Beziehung auf alle umschriebenen Complex-Kegel schneiden. Wir haben diese Linie die Polare der Complex-Fläche genannt. Zur Bestimmung derselben brauchen wir bloss die beiden Pole der Doppellinie in Beziehung auf irgend zwei Meridian-Curven der Fläche zu construiren, oder die beiden Polarebenen der Doppellinie in Beziehung auf irgend zwei der Fläche umschriebene Complex-Kegel.

Nehmen wir einerseits statt der Meridian-Curven diejenigen beiden auf einem singulären Strahle liegenden Puncte, in welche die Curven ausarten, wenn ihre Ebene insbesondere mit einer der vier singulären Ebenen der Complex-Fläche zusammenfällt, und andererseits, statt der umschriebenen Complex-Kegel, diejenigen beiden nach einer singulären Axe sich schneidenden Ebenen, in welche die Kegel ausarten, wenn ihr Mittelpunct in einen der vier singulären Puncte der Complex-Fläche fällt, so ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze.

Die Polare einer Complex-Fläche schneidet, wie die Doppellinie derselben, die vier singulären Strahlen und die vier singulären Axen derselben. Jeder singuläre Strahl wird in den beiden Doppelpuncten der Fläche, welche er verbindet, und in den beiden Durchschnitten mit Doppellinie und Polaren harmonisch getheilt. Die beiden Doppelebenen, welche nach jeder singulären Axe sich schneiden, und die beiden Ebenen, welche durch diese Axe und durch Doppellinie und Polare gehen, bilden ein System von vier harmonischen Ebenen.

223. Die sämmtlichen Singularitäten einer Complex-Fläche sind in linearer Weise bestimmt, wenn wir die Doppellinie, die Polare und drei Doppel-

puncte 1, 3, 5 oder, statt derselben, drei Doppelebenen I, III, V der Fläche kennen. Vorausgesetzt wird hierbei bloss, dass nicht zwei Doppelpuncte auf demselben singulären Strahle liegen, nicht zwei Doppelebenen nach derselben singulären Axe sich schneiden.

Durch die drei gegebenen Puncte können wir drei gerade Linien legen, welche die Doppellinie und die Polare schneiden. Diese drei geraden Linien, drei singuläre Strahlen der Fläche, gehen durch die drei zugehörigen Doppelpuncte 2, 4, 6, die wir nach der vorigen Nummer unmittelbar erhalten. Es bleiben hiernach nur noch zwei der acht Doppelpuncte, deren Symbole wir zur Unterscheidung einklammern wollen, unbekannt. Die bekannten sechs Doppelpuncte genügen zur Bestimmung der sämmtlichen acht Doppelebenen (Nr. 221.):

$$\begin{array}{ll} (1,\ 3,\ 5,\ (7)) \equiv \mathrm{I}, & (2,\ 4,\ 6,\ (8)) \equiv \mathrm{II}, \\ (1,\ 3,\ 6,\ (8)) \equiv \mathrm{III}, & (2,\ 4,\ 5,\ (7)) \equiv \mathrm{IV}, \\ (1,\ 5,\ 4,\ (8)) \equiv \mathrm{V}, & (2,\ 6,\ 3,\ (7)) \equiv \mathrm{VI}, \\ (1,\ 4,\ 6,\ (7)) \equiv \mathrm{VII}, & (2,\ 3,\ 5,\ (8)) \equiv \mathrm{VIII}, \end{array}$$

die sich paarweise auf den vier singulären Axen schneiden. In jeder der acht Doppelebenen erhalten wir unmittelbar und in linearer Weise die Berührungs-Curve, welche durch drei bekannte Doppelpuncte geht und überdiess die bezügliche singuläre Axe in ihrem Durchschnitte mit der Doppellinie berührt. Vier der acht Doppelebenen I, IV, VI, VII schneiden sich in einem der beiden bisher noch unbekannten Doppelpuncte, in (7), die übrigen vier II, III, V, VIII in dem andern (8). Somit ist auch der vierte singuläre Strahl bestimmt.

Wenn wir von den drei Doppelebenen I, III, V als gegeben ausgehen, so sind diejenigen drei geraden Linien, welche die Puncte verbinden, in welchen diese drei Ebenen die Doppellinie und die Polare schneiden, drei singuläre Axen der Fläche, und wir erhalten, nach der vorigen Nummer, sogleich die drei neuen Doppelebenen II, IV, VI, welche die drei gegebenen nach diesen drei singulären Axen schneiden. Die drei Paare von Doppelebenen genügen, nach der 221. Nummer, zur Bestimmung der acht Doppelpuncte und der acht Berührungskegel in den acht Doppelpuncten. Die beiden noch unbekannten Doppelebenen VII und VIII sind dadurch bestimmt, dass sie die acht Doppelpuncte zu vier und vier enthalten; ihr Durchschnitt ist die vierte singuläre Axe.

Das bereits am Ende der 221. Nummer bezeichnete merkwürdige geometrische Gebilde lässt sich hiernach vermittelst der Doppellinie und der Polare der Fläche — beide Linien stehen zu demselben in vollkommen gleicher Beziehung — und dreier Puncte oder Ebenen desselben construiren. Dieses Gebilde hängt hiernach von

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$$

Constanten ab. Von eben so vielen Constanten aber hängt die allgemeine Complex-Fläche selbst ab. Diese Fläche ist bestimmt, wenn das von ihr abhängige geometrische Gebilde es ist.

224. An das Vorstehende knüpfen sich bemerkenswerthe lineare Constructionen der allgemeinen Complex-Fläche, wenn die Doppellinie, die Polare und entweder drei Doppelpuncte oder drei Doppelebenen derselben gegeben sind.

Bestimmung der Complex-Curve in einer beliebigen Meridian-Ebene. Erste Construction. Man construire die acht Doppelebenen. Eine Meridian-Ebene schneidet diese acht Doppelebenen nach acht geraden Linien, welche von der Complex-Curve in derselben berührt werden. Fünf dieser geraden Linien sind zur linearen Bestimmung der Curve hinreichend. Zweite Construction. Man construire in den acht Doppelebenen die acht Berührungs-Curven. Eine Meridian-Ebene schneidet die acht Berührungs-Curven, abgesehen von den acht paarweise in den vier singulären Puncten zusammenfallenden Puncten, ausserdem noch in acht Puncten. Diese acht Puncte liegen auf der Complex-Curve in der Meridian-Ebene. Fünf derselben reichen zur linearen Bestimmung der Curve hin. Nach der ersten Construction erhalten wir in jeder Meridian-Ebene die acht Tangenten, welche von den vier singulären Puncten aus an die Curve sich legen lassen, nach der zweiten Construction die Berührungspuncte auf diesen Tangenten.

Bestimmung des Complex-Kegels, dessen Mittelpunct beliebig auf der Doppellinie angenommen wird. Erste Construction. Man construire die acht Doppelpuncte der Fläche. Diejenigen acht geraden Linien, welche den angenommenen Mittelpunct mit diesen acht Doppelpuncten verbinden, sind acht Seiten des Complex-Kegels, welcher durch fünf dieser Seiten auf lineare Weise bestimmt ist. Zweite Construction. Man construire in den acht Doppelpuncten die acht Berührungs-Kegel. Von dem auf der Doppellinie beliebig angenommenen Mittelpuncte aus lassen sich an jeden der acht Berührungs-Kegel zwei Tangential-Ebenen legen. Von den sechszehn Tangential-Ebenen fallen viermal zwei in den vier singulären Ebenen zusammen. Die übrigen acht nicht durch die Doppellinie gehenden Tangential-Ebenen der acht Berührungs-Kegel werden von dem Complex-Kegel berührt, der durch fünf dieser Ebenen in linearer Weise bestimmt ist. In der ersten Construction wird der Complex-Kegel durch acht seiner Seiten, die paarweise in den vier singulären Ebenen liegen, in der zweiten Construction durch die Ebenen, welche denselben nach diesen Seiten berühren, bestimmt.

Um hiernach die Fläche selbst zu beschreiben, brauchen wir bloss die für jede beliebige Lage der Meridian-Ebene bestimmte Curve zweiter Classe und Ordnung um die Doppellinie sich drehen zu lassen. Um dieselbe Fläche durch einen Complex-Kegel zweiter Ordnung und Classe zu umhüllen, der für jede Lage seines Mittelpunctes bestimmt ist, brauchen wir bloss diesen Mittelpunct auf der Doppellinie fortrücken zu lassen.

225. Die vorstehenden Erörterungen über die Singularitäten der Complex-Flächen der allgemeinen Art übertragen sich sogleich auf den besondern Fall, dass irgend eine Linie, die dem Complexe angehört, zur Doppellinie der Fläche genommen wird. Dann wird einerseits die Doppellinie von allen Meridian-Curven der Fläche berührt und andererseits fällt eine gemeinschaftliche Seite aller umschriebenen Complex-Kegel in die Doppellinie. Doppellinie und Polare der Fläche fallen in einer geraden Linie zusammen.

In dem allgemeinen Falle gibt es keinen directen Uebergang von Meridian-Curven, welche die Doppellinie schneiden, zu solchen, welche sie nicht schneiden; gäbe es eine einzige solcher Curven, welche die Doppellinie berührte, so gehörte diese Linie dem Complex an und würde dann von allen Meridian-Curven berührt. Ebensowenig gibt es einen directen Uebergang von umschriebenen Complex-Kegeln, ausserhalb welcher die Doppellinie liegt, zu Complex-Kegeln, innerhalb welcher dieselbe liegt. In den Flächen der besondern Art sind alle Meridian-Curven reell und keiner der umschriebenen Complex-Kegel reducirt sich auf einen Punct.

226. Während die Doppellinie von einer um dieselbe sich drehenden Meridian-Ebene umhüllt wird, wird sie zugleich beschrieben von dem Puncte, in welchem sie von der in der Meridian-Ebene liegenden Complex-Curve berührt wird. Jede Linie, welche in einer beliebigen Lage der Meridian-Ebene durch den Berührungspunct geht, schneidet die Fläche in vier Puncten, von welchen drei auf der Doppellinie zusammenfallen. Jede beliebige Ebene, welche durch eine solche Linie der Meridian-Ebene geht, schneidet die Fläche

in einer Curve vierter Ordnung, die in dem Berührungspuncte einen Cuspidalpunct und die fragliche Linie zur Tangente in demselben hat. Die Meridian-Ebene ist der geometrische Ort für die Cuspidal-Tangenten aller Durchschnitts-Curven, deren Ebenen durch den Berührungspunct der Complex-Curve auf der Doppellinie gehen: in ihr fallen die beiden Tangential-Ebenen der Fläche in diesem Puncte zusammen. Wenn der Punct auf der Doppellinie fortrückt, dreht sich die Tangential-Ebene der Fläche in demselben um diese Linie. Die Doppellinie ist ein Cuspidal-Strahl der Complex-Fläche. Sie besteht nicht mehr aus Segmenten, welche die immer reellen Durchschnitte abwechselnd reeller und imaginärer Schalen der Fläche sind: in der Cuspidal-Kante stossen zwei reelle Schalen der Fläche zusammen.

227. Ein Complex-Kegel, dessen Mittelpunct beliebig auf der Doppellinie angenommen wird, hat eine durch diese Doppellinie gehende Ebene zur Tangential-Ebene. Wenn wir durch den Mittelpunct des Kegels in dieser Tangential-Ebene eine beliebige gerade Linie legen und irgend einen Punct derselben zum Mittelpuncte eines umhüllenden Kegels vierter Classe nehmen, so ist für diesen Kegel die Tangential-Ebene des Complex-Kegels eine Inflexions-Ebene, welche von demselben nach der angenommenen geraden Linie (einer Inflexionsseite des Kegels) osculirt wird. Es folgt hieraus, dass eine beliebige Meridian-Ebene gemeinschaftliche Inflexions-Ebene aller umschriebenen Kegel vierter Classe ist, deren Mittelpuncte in ihr liegen. Wenn die Meridian-Ebene um die Doppellinie sich dreht, rückt der Mittelpunct des Complex-Kegels, der sie berührt, auf der Doppellinie fort. Wenn wir irgend einen umschriebenen Kegel vierter Classe, dessen Mittelpunct in einer beliebigen Meridian-Ebene liegt, durch irgend eine zweite Meridian-Ebene schneiden, so ist die Durchschnitts-Curve von der vierten Classe, hat die Doppellinie zur Inflexionslinie und auf derselben denjenigen Punct zum Inflexionspuncte, welcher Mittelpunct desjenigen Complex-Kegels ist, der die erste Meridian-Ebene berührt. Wenn mit dieser Meridian-Ebene der Mittelpunct des Kegels vierter Classe sich um die Doppellinie dreht, bleibt die Doppellinie fortwährend Inflexionslinie der Durchschnitts-Curve, während der Inflexionspunct auf ihr fortrückt. Die Doppellinie, welche in der vorigen Nummer als ein Cuspidal-Strahl der Fläche auftrat, tritt in dieser Nummer als eine Inflexions-Axe derselben auf.

228. Zwischen dem Fortrücken des Berührungspunctes der Complex-Curven einer Complex-Fläche der besondern Art auf der Doppelinie und der

Drehung ihrer Ebene um diese Linie besteht identisch dieselbe Relation als zwischen dem Fortrücken des Mittelpunctes der Complex-Kegel der Fläche auf der Doppellinie und der Drehung der Tangential-Ebene derselben um diese Linie. Indem wir, von der allgemeinen Complex-Gleichung ausgehend, diejenige Complex-Fläche nahmen, welche OX zur Doppellinie hat, gelangten wir in der 170. Nummer, unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, zu der folgenden Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{Px + H}{Qx - J},$$

wo φ in dem allgemeinen Falle, den wir bereits in der Note zur 193. Nummer betrachtet haben, den Winkel bedeutet, den eine beliebige Meridian-Ebene mit der Coordinaten-Ebene XZ bildet und x dem Pole der Doppellinie in Beziehung auf die in der Meridian-Ebene liegende Complex-Curve entspricht. In dem Falle der Complex-Flächen besonderer Art, wo die Doppellinie eine Linie des Complexes ist und demnach in der Gleichung desselben die Constante A verschwindet, ist durch x die Lage des Berührungspunctes der Complex-Curven auf der Doppellinie gegeben. Die vorstehende Gleichung drückt also, wenn die Complex-Fläche besonderer Art einmal durch eine Complex-Curve beschrieben, das andere Mal durch einen Complex-Kegel umhüllt wird, die fragliche Relation aus, die zwischen dem Fortrücken des Berührungspunctes der Complex-Curve, bezüglich des Mittelpunctes des Complex-Kegels, auf der Doppellinie und der Drehung der Ebene der Complex-Curve, bezüglich der Tangential-Ebene des Complex-Kegels, um diese Doppellinie stattfindet.

Indem wir von der Entstehung der Fläche absehen, können wir, in der vorstehenden Gleichung, x auf einen beliebigen auf der Doppellinie liegenden Punct der Fläche und φ auf die Tangential-Ebene derselben in diesem Puncte beziehen. Rückt der Berührungspunct auf der Doppellinie (dem Cuspidal-Strahle der Fläche) fort, so dreht sich die Tangential-Ebene der Fläche in diesem Puncte um die Doppellinie (der Inflexions-Axe der Fläche), ähnlich wie, wenn auf einer Erzeugenden einer Linienfläche zweiten Grades der Berührungspunct fortrückt, die Tangential-Ebene um dieselbe sich dreht. In beiden Fällen ist das Gesetz, nach welchem sich Berührungspunct und Tangential-Ebene gegenseitig bestimmen, dasselbe (Note zur 193. Nummer).

229. In den Complex-Flächen besonderer Art, welche wir hier betrachten, wo alle Complex-Curven die Doppellinie berühren und diese Doppellinie

zugleich eine gemeinschaftliche Seite aller Complex-Kegel ist, fällt einerseits, wenn in jeder der vier singulären Ebenen die Complex-Curve in ein System von zwei Puncten ausartet, einer dieser beiden Puncte mit dem Durchschnitte des bezüglichen Strahles und der Doppellinie zusammen, während andererseits, wenn der Mittelpunct des Complex-Kegels einer der vier singulären Puncte ist und demnach der Kegel in ein System von zwei Ebenen ausartet, eine dieser beiden Ebenen durch die Doppellinie und die singuläre Axe geht.

Complex-Curven und Complex-Kegel ordnen sich in den fraglichen Complex-Flächen paarweise so zusammen, dass der Punct, in welchem die Curve die Doppellinie berührt, Mittelpunct des Kegels ist und die Ebene der Curve den Kegel nach der Doppellinie berührt. Derjenige Complex-Kegel, welcher sich hiernach mit einer Complex-Curve, die in zwei Puncte ausartet, zusammenordnet, artet seinerseits in zwei Ebenen aus. Denn, in der gemachten Voraussetzung, muss der Complex-Kegel die singuläre Ebene nach der Doppellinie berühren; er muss ferner den singulären Strahl enthalten, der in dieser Ebene liegt, weil derselbe ganz der Fläche angehört und durch seinen Mittelpunct geht. Diese beiden Bedingungen können gleichzeitig nur dann bestehen, wenn der Kegel in ein System von zwei Ebenen ausartet, von welchen eine die singuläre Ebene ist. Damit ist also bewiesen, dass die vier singulären Axen der Fläche in den vier singulären Ebenen liegen und die vier singulären Strahlen durch die vier singulären Puncte gehen.

229. Um, in dem Falle der fraglichen Complex-Flächen, deren Doppellinie in eine Linie des Complexes fällt, die acht Doppelpuncte nach dem Schema (113) der 221. Nummer zu vier auf die acht Doppelebenen zu vertheilen, nehmen wir für die in diesem Schema durch

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 8,$$

bezeichneten Puncte diejenigen vier dieser Puncte, welche auf der Doppellinie mit den vier singulären Puncten

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4$$

zusammenfallen. Die vier übrigen Doppelpuncte

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 7,$$

welche die vier Eckpuncte eines Tetraeders sind, wollen wir nun bezüglich durch

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad Q_4$$

darstellen, so dass

$$P_1Q_1, \quad P_2Q_2, \quad P_3Q_3, \quad P_4Q_4$$

die vier singulären Strahlen sind. Das angeführte Schema gibt dann für die acht Doppelebenen:

I,	II,
III,	IV,
V,	VI,
VIII,	VII

die folgende Symbole:

$P_1 P_2 P_3 Q_4$,	$Q_1 Q_2 Q_3 P_4$,
$P_1 P_2 P_4 Q_3$,	$Q_1 Q_2 Q_4 P_3$,
$P_1 P_3 P_4 Q_2$,	$Q_1 Q_3 Q_4 P_2$,
$P_2 P_3 P_4 Q_1$,	$Q_2 Q_3 Q_4 P_1$.

Die vier Ebenen I, III, V, VIII gehen durch die vier Eckpuncte des Tetraders $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ und schneiden sich sämmtlich nach der Doppellinie $P_1 P_2 P_3 P_4$. Es sind also die vier singulären Ebenen:

$$E_4, \quad E_3, \quad E_2; \quad E_1.$$

Die vier Ebenen II, IV, VI, VII fallen mit den vier Seitenebenen des Tetraeders zusammen und schneiden überdiess die Doppellinie bezüglich in den vier singulären Puncten $P_4 P_3 P_2 P_1$. Die vier singulären Axen sind:

(I, II), (III, IV), (V, VI), (VIII, VII).

Aus dem Vorstehenden entnehmen wir die folgenden Relationen.

Jeder Eckpunct des Tetraeders ist ein Doppelpunct der Fläche, die gegenüberliegende Seitenebene desselben eine Doppelebene. Diese schneidet die Doppellinie in einem der vier singulären Puncte, durch jenen geht eine der vier singulären Ebenen. Die gerade Linie, welche den Eckpunct des Tetraeders mit dem singulären Puncte verbindet, ist einer der vier singulären Strahlen, die Durchschnittslinie der gegenüberliegenden Seitenebenen des Tetraeders mit der singulären Ebene eine der vier singulären Axen der Fläche.

In jeder der vier singulären Ebenen, die Meridian-Ebenen sind, liegen ein singulärer Strahl und eine singuläre Axe; beide schneiden sich in dieser Ebene auf der Doppellinie in dem entsprechenden singulären Puncte.

230. Die Complex-Flächen hängen im Allgemeinen von siebenzehn von einander unabhängigen Constanten ab, Complex-Flächen, welche eine Linie des Complexes zu ihrer Doppellinie haben, von einer Constanten weniger. Diese

Complex-Flächen sind vollkommen bestimmt, wenn ihre Doppellinie und dasjenige Tetraeder, welches ihre vier Doppelpuncte zu Eckpuncten, ihre vier Doppelebenen zu Seitenflächen hat, gegeben sind. Doppellinie und Tetraeder können hierbei von vorne herein beliebig angenommen werden.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich die folgenden einfachen Constructionen.

Eine beliebige Seitenebene des Tetraeders (Q_2, Q_3, Q_4) ist eine Doppelebene der Fläche, der Punct, in welchem sie die Doppellinie schneidet, ist ein singulärer Punct P_1, die gerade Linie $P_1 Q_1$, welche diesen Punct mit dem gegenüberstehenden Eckpuncte Q_1 des Tetraeders verbindet, ein singulärer Strahl der Fläche, S_1. Projiciren wir diesen singulären Strahl auf die Doppelebene (Q_3, Q_3, Q_4), parallel mit der Doppellinie, so ist die Projection die ebenfalls durch den singulären Punct P_1 gehende singuläre Axe A_1 und die projicirende Ebene die singuläre Ebene E_1 der Fläche. Die Berührungs-Curve in der Doppelebene ist dadurch bestimmt, dass sie, in dieser Ebene, durch die drei Eckpuncte Q_2, Q_3, Q_4 und den singulären Punct P_1 geht und, in dem letztgenannten Puncte, die singuläre Axe A_1 berührt. Der Berührungs-Kegel in Q_1 ist dadurch bestimmt, dass er von den drei Seitenebenen des Tetraeders, welche in diesem Puncte sich schneiden, berührt wird, so wie auch von der singulären Ebene E_1, und zwar nach dem singulären Strahle S_1. Dieser Kegel hat in der Doppelebene (Q_2, Q_3, Q_4) zur Basis einen Kegelschnitt, der die drei in dieser Ebene liegenden Tetraeder-Kanten $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_4$, $Q_4 Q_2$ und ausserdem die singuläre Axe A_1 und zwar in ihrem Durchschnitte P_1 mit der Doppellinie berührt. Die singuläre Axe A_1 ist also eine gemeinschaftliche Tangente dieser Basis und der Berührungs-Curve in dem singulären Puncte P_1, in welchen beide die Doppellinie schneiden; während die Berührungs-Curve durch die drei Eckpuncte des Dreiecks $Q_2 Q_3 Q_4$ geht, berührt die Basis des Berührungskegels die drei Seiten desselben. In Gemässheit der Reciprocität erhalten wir zwei Kegel, den Berührungskegel in dem Doppelpuncte Q_1 und einen Kegel mit demselben Mittelpuncte, der die Berührungs-Curve in der gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraeders umhüllt. Beide Kegel haben den singulären Strahl S_1 zur gemeinschaftlichen Seite und berühren nach derselben die durch die Doppellinie gehende singuläre Ebene E_1. Während der Berührungskegel die in Q_1 sich schneidenden Seitenebenen des Tetraeders berührt, enthält der die Berührungs-Curve umhüllende Kegel die in demselben Puncte zusammenstossenden drei Kanten des Tetraeders.

Dieselben Constructionen können wir noch dreimal wiederholen und erhalten dann die sämmtlichen Singularitäten der Complex-Fläche.

Hiernach können wir die Complex-Fläche selbst in doppelter Weise bestimmen: einmal durch ihre Meridian-Curven, das andere Mal durch ihre Umhüllungskegel, deren Mittelpuncte auf der Doppellinie liegen. Zum Behuf der ersten Bestimmungsweise, auf die wir uns hier beschränken, legen wir durch die Doppellinie irgend eine Meridian-Ebene, welche die Berührungs-Curven in den vier Doppelebenen ausser in den vier singulären Puncten auf der Doppellinie noch in irgend vier Puncten schneidet. Die Curve, nach welcher die Fläche von der Meridian-Ebene geschnitten wird, geht durch diese vier Puncte und berührt überdiess die Doppellinie. Es gibt solcher Meridian-Curven zwei, und folglich gibt es auch zwei Complex-Flächen der besondern Art, welche die sämmtlichen Singularitäten: die Doppellinie, auf ihr die vier singulären Puncte, die durch sie gehenden vier singulären Ebenen, endlich die vier Doppelpuncte mit ihren Berührungskegeln, sowie die vier Doppelebenen mit ihren Berührungs-Curven, gemeinschaftlich haben.*)

231. Die Discussion der Singularitäten der allgemeinen Complex-Flächen überträgt sich unmittelbar auf den besonderen Fall der Aequatorialflächen, wenn wir die Doppellinie der Fläche unendlich weit rücken lassen. Die Ebenen aller Complex-Curven (Breitenebenen der Fläche) sind unter einander parallel, die Mittelpuncte derselben liegen auf dem Durchmesser der Fläche, der hier an die Stelle der Polaren tritt. Die umschriebenen Complex-Kegel werden Complex-Cylinder, deren Axen in Breitenebenen liegen. Es gibt vier Breitenebenen, die vier singulären Ebenen der Fläche, in welchen die Complex-Curve, als Curve zweiter Classe betrachtet, in zwei Puncte, als Curve zweiter Ordnung betrachtet, in zwei zusammenfallende gerade Linien ausartet. Die vier Linien, welche die vier Paare von

*) Wenn bloss die Singularitäten einer Complex-Fläche gegeben sind, so bleibt es unentschieden, welche von den beiden geraden Linien, die die sämmtlichen vier singulären Strahlen und vier singulären Axen schneiden, die Doppellinie der Fläche und welche die Polare derselben ist. Bei dieser Unentschiedenheit entsprechen denselben Singularitäten zwei verschiedene Complex-Flächen, welche zwei verschiedenen Complexen zweiten Grades angehören. In dem allgemeinen Falle hängt die Bestimmung der Doppellinie und Polaren der Fläche von der Auflösung einer quadratischen Gleichung ab. In dem besondern Falle, wo Doppellinie und Polare der Fläche in einer Linie des Complexes zusammenfallen und sich von einander nicht trennen lassen, liegt der Construction der Fläche aus ihren Singularitäten nothwendig die Auflösung einer quadratischen Gleichung zu Grunde, während, in dem allgemeinen Falle, die Construction der Fläche eine lineare wird, sobald wir annehmen, dass von den beiden geraden Linien, deren Bestimmung von einer quadratischen Gleichung abhängt, eine beliebige die Doppellinie und demnach die andere die Polare der Fläche ist (224).

Puncten verbinden, sind die vier, ganz in die Fläche fallenden, singulären Strahlen. Die vier singulären Ebenen berühren die Fläche nach der ganzen Erstreckung ihrer vier singulären Strahlen. Der Durchmesser der Fläche schneidet diese Strahlen in der Mitte der beiden auf ihnen liegenden Doppelpuncte. Vier der umschriebenen Complex-Cylinder arten in Systeme von zwei Ebenen aus, welche Doppelebenen der Fläche sind. Die die Axen der Cylinder vertretenden Durchschnittslinien der vier Ebenenpaare sind die vier singulären Axen der Fläche; sie liegen in Breitenebenen und schneiden den Durchmesser der Fläche. Die Durchschnittscurve eines der Fläche umschriebenen Complex-Cylinders mit einer gegebenen Ebene ist als die Projection der Fläche auf diese Fbene, nach der Richtung der Cylinder-Axe, zu betrachten. Wenn wir in den Breitenebenen die Axen der projicirenden Cylinder um die Doppellinie sich drehen lassen, so fallen sie in vier besonderen Lagen mit den singulären Axen der Fläche zusammen. Dann gehen die Projectionen durch zwei sich schneidende gerade Linien, den Durchschnitten der Bildebene mit den bezüglichen beiden Doppelebenen, hindurch. Diesem entspricht ein Uebergang von Hyperbel zu Hyperbel, deren reelle und imaginäre Axen, durch Null hindurchgehend, sich vertauschen.*) Die Berührungs-Curven in den beiden nach derselben singulären Axe sich schneidenden Doppelebenen haben diese Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote und sind dadurch bestimmt, dass sie überdiess die acht Doppelpuncte zu vier und vier enthalten. Die Berührungskegel in jedem der beiden auf demselben singulären Strahle liegenden Doppelpuncte werden nach diesem Strahle von der durch denselben gehenden singulären Ebene berührt und sind dadurch bestimmt, dass sie acht Doppelebenen zu vier und vier berühren.

232. Wenn wir endlich, weiter particularisirend, denjenigen Fall betrachten, dass eine Linie des Complexes, die unendlich weit liegt, zur Doppellinie der Complex-Fläche genommen wird, so liegen von den acht Doppel-

*) Wir dürfen hieraus nicht den Schluss ziehen, dass in dem Falle acht reeller Doppelpuncte und acht reeller Doppelebenen der Fläche — dieser Voraussetzung ist unsere Ausdrucksweise angepasst — die Complex-Cylinder sämmtlich hyperbolische, die Projectionen sämmtlich Hyperbeln sind. Es kann auch zwei parabolische Cylinder geben (Nr. 182.), und diese bezeichnen dann den Uebergang von hyperbolischen zu elliptischen Complex-Cylindern. Zwei Projectionen sind dann Parabeln — Projections-Richtungen entsprechend, welche beide innerhalb der Richtungen zweier auf einander folgenden singulären Axen liegen — durch welche Hyperbeln in Ellipsen und diese wieder in Hyperbeln übergehen.

Die Meridian-Curven sind, unter der gemachten Voraussetzung, zwischen je zwei auf einander folgenden singulären Ebenen entweder sämmtlich Ellipsen oder sämmtlich Hyperbeln. Bei dem Durchgange durch jede der vier singulären Ebene gehen Ellipsen und Hyperbeln in einander über.

puncten auf der Doppellinie, mit dieser zugleich, vier unendlich weit, vier Doppelebenen fallen, mit den vier singulären Ebenen zusammen. In jeder der letztgenannten Ebenen liegt einer der vier singulären Strahlen und, parallel mit demselben, eine der vier singulären Axen. Die Complex-Curven in allen Breitenebenen sind Parabeln, weil sie die unendlich weit liegende Doppellinie berühren. Wenn die Ebene derselben parallel mit sich selbst fortrückt, so ändern die Parabeln beim Durchgang durch eine singuläre Ebene, in der sie in zwei Puncte ausarten, von welchen einer unendlich weit liegt, den Sinn ihrer Erstreckung. Die umschriebenen Complex-Cylinder haben die unendlich weit liegende Doppellinie zur gemeinschaftlichen Seite und berühren nach derselben eine Breitenebene. Es sind hyperbolische Cylinder, welche Breitenebenen zu einer ihrer Asymptotenebenen haben. Diese Hyperbeln, in welchen sie von einer beliebigen Ebene geschnitten werden, sind als die Projectionen der Fläche selbst anzusehen; wenn wir der Axe des projicirenden Complex-Cylinders nach einander alle möglichen Richtungen geben, so rückt eine der beiden Asymptoten der Hyperbeln parallel mit sich selbst fort. Wenn wir insbesondere nach der Richtung einer singulären Axe (der ein singulärer Strahl parallel ist) projiciren, so artet die Hyperbel in ein System von zwei geraden Linien aus, in die Durchschnitte der Bildebene mit der singulären Ebene und der Doppelebene, welche durch die jedesmalige singuläre Axe geht.*)

Die vier nicht unendlich weit liegenden Doppelpuncte sind die Eckpuncte eines Tetraeders, dessen Seitenebenen die nicht durch die unendlich weit liegende Doppellinie gehenden Doppelebenen sind. Eine Seitenebene des Tetraeders und die singuläre Breitenebene, welche durch den gegenüberliegenden Eckpunct desselben geht, schneiden sich nach einer singulären Axe und parallel mit dieser geht, in der singulären Ebene, durch den Eckpunct des Tetraeders der bezügliche singuläre Strahl. Die Berührungs-Curve in der Doppelebene hat die singuläre Axe zur Asymptote und geht durch die drei Doppelpuncte in dieser Ebene. Der Berührungskegel in dem gegenüberliegenden Doppelpuncte schneidet dieselbe Doppelebene nach einer Hyperbel,

*) Während bei den Aequatorialflächen überhaupt zwei parabolische Complex-Cylinder auftreten, die, wenn sie reell sind, die Gränzen elliptischer Complex-Cylinder bezeichnen, fallen hier die beiden parabolischen Cylinder zusammen und elliptische Cylinder existiren nicht. In besondern Fällen können, bei Aequatorialflächen überhaupt und insbesondere bei parabolischen, alle Complex-Cylinder parabolische sein.

welche ebenfalls die in ihr liegende singuläre Axe zur Asymptote und die drei in ihr liegenden Kanten des Tetraeders zu Tangenten hat.

233. Die Complex-Flächen, deren allgemeiner Discussion der vorliegende erste Abschnitt vorzugsweise gewidmet ist, bilden eine merkwürdige Familie von Flächen vierter Ordnung und Classe, die wir auch unabhängig von der Betrachtung der Complexe selbstständig für sich als solche Flächen dieser Ordnung und Classe definiren können, welche neben einer Doppellinie, sich gegenseitig bedingend, acht Doppelpuncte und acht Doppelebenen haben. Die Discussion dieser Flächen erhält dadurch, dass wir ihre Entstehung an die Betrachtung der Complexe knüpfen, ungeachtet der unendlichen Mannigfaltigkeit ihrer Formen und der grossen Anzahl ihrer Constanten, eine überraschende Einfachheit und Symmetrie. Andererseits bieten diese Flächen ein unschätzbares Hülfsmittel zur analytischen Discussion und geometrischen Veranschaulichung der Complexe. Wir werden im nächsten Abschnitte zur Discussion der Complexe selbst übergehen, um später auf die Discussion ihrer Flächen zurückzukommen.

Aber es gibt noch einen neuen allgemeinen Gesichtspunct, unter welchem Complex-Flächen betrachtet werden können, den ich hier schon zu bezeichnen nicht unterlasse. Die von uns betrachteten Complex-Flächen werden von Linien umhüllt, die einer Congruenz angehören und zwar einer solchen, die aus den zusammenfallenden Linien zweier Complexe besteht, von welchen einer der allgemeine des zweiten Grades, der andere ein Complex des ersten Grades von der besondern Art ist, dass alle Linien desselben eine feste gerade Linie schneiden. Complex-Curven und Complex-Kegel werden von auf einander folgenden Linien der Congruenz, die sich schneiden, bezüglich umhüllt und beschrieben.

In analoger Weise steht jede Congruenz zu einer bestimmten Fläche in gegenseitiger Beziehung. Zwei auf einander folgende sich schneidende gerade Linien einer Congruenz bestimmen den Durchschnitt der beiden Linien und eine Ebene, welche beide enthält. Der Punct ist ein Punct der Fläche, die Ebene eine Ebene derselben.

Der allgemeine Ausdruck

$$2n(n-1),$$

den wir für die Ordnung und Classe der Flächen der Complexe eines beliebigen n. Grades erhalten haben (Nr. 212.), reducirt sich für einen Complex des ersten Grades auf Null. Es gibt in diesem Falle keine von den Linien der

Congruenz umhüllte Fläche: diese Fläche wird durch zwei gerade Linien vertreten, und solche zwei gerade Linien können wir weder in Punct- noch in Plan-Coordinaten durch eine einzige Gleichung darstellen. Die beiden geraden Linien sind zur Bestimmung der Congruenz hinreichend, und umgekehrt, wenn die Congruenz gegeben ist, erhalten wir in den beiden Directricen derselben die beiden fraglichen geraden Linien.