§ 6.

Analytische Bestimmung der Doppelpuncte und Doppelebenen der Complex-Flächen.

186. Es sei

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + 2d\alpha\gamma + 2e\beta\gamma + f\gamma^2 = 0$$

eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den Veränderlichen α, β, γ. Dann erhalten wir die folgende algebraische Zerlegung:

$$\begin{aligned} & a(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + 2d\alpha\gamma + 2e\beta\gamma + f\gamma^2) \\ = & [a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma] \cdot [a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma] \\ & - 2[(bd-ae) - \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)}]\beta\gamma \\ = & [a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma] \cdot [a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma] \\ & - 2[(bd-ae) + \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)}]\beta\gamma. \end{aligned}$$

Wenn also

$$(bd-ae) - \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)} = 0, \tag{33}$$

so löst sich die gegebene Gleichung zweiten Grades in die folgenden beiden Gleichungen ersten Grades auf:

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma = 0, \\ a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

wenn

$$(bd-ae) + \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)} = 0, \tag{35}$$

in die folgenden beiden:

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma = 0, \\ a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Die beiden Bedingungs-Gleichungen (33) und (35) können wir in die folgende zusammenfassen:

$$(bd-ae)^2 - (b^2-ac)(d^2-af) = 0. \tag{37}$$

Wird also diese Bedingungs-Gleichung befriedigt, so löst sich die gegebene Gleichung zweiten Grades in zwei Gleichungen des ersten Grades auf.

In den Gleichungsformen (34) und (36) treten zwei der Veränderlichen, β und γ, in gleicher, die dritte α tritt in ausgezeichneter Weise auf. Wir erhalten also, und zwar durch blosse Buchstaben-Vertauschung, neben der vorstehenden Zerlegung noch zwei ganz analoge. Dem entsprechend können wir die Bedingungs-Gleichung (37) auch unter der folgenden Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned}(be-cd)^2-(b^2-ac)(c^2-cf)&=0,\\ (de-fb)^2-(d^2-af)(c^2-cf)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

Endlich gehen die drei vorstehenden, unter sich identischen Gleichungen wenn wir entwickeln, in die folgende über:

$$acf-ac^2-cd^2-fb^2+2bde=0. \qquad (39)$$

Die drei Gleichungsformen (37) und (38) zeigen, dass, im Falle die Zerlegung stattfindet, die drei Ausdrücke:

$$(b^2-ac),\qquad (d^2-af),\qquad (c^2-cf)$$

Werthe von gleichem Zeichen haben. Sind diese Zeichen positiv, so ist die Zerlegung eine reelle, sind sie negativ, eine imaginäre. Verschwinden gleichzeitig zwei der drei Ausdrücke, was in Folge der Bedingungs-Gleichungen (37) und (38) das Verschwinden des dritten nach sich zieht, so werden die beiden Gleichungen, in welche die gegebene sich auflöst, unter sich identisch. Zugleich hat man:

$$(bd-ae)=0,\qquad (be-cd)=0,\qquad (de-fb)=0.$$

Die gegebene homogene Gleichung zweiten Grades löst sich in die beiden Gleichungen ersten Grades (34) oder in die beiden Gleichungen (36) auf, je nachdem die Bedingungs-Gleichung (33) oder die Bedingungs-Gleichung (35) befriedigt wird. Diesem entspricht, dass, im Falle einer reellen Zerlegung, der Ausdruck $(bd-ae)$ einmal positiv, das andere Mal negativ ist, umgekehrt, dass, im Falle einer imaginären Zerlegung, derselbe Ausdruck einmal negativ, das andere Mal positiv ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet, je nachdem der Ausdruck $(bd-ae)$ mit einem der drei Ausdrücke

$$(b^2-ac),\qquad (d^2-af),\qquad (c^2-cf),$$

und also mit allen, im Zeichen übereinstimmt oder nicht.

An die vorstehenden Gleichungen (37) und (38) knüpfen sich noch einige Transformationen, welche in dem Folgenden ihre unmittelbare Anwendung finden.

Die Gleichung (37) gibt:

$$\frac{bd-ae}{d^2-af}=\frac{b^2-ac}{bd-ae}=\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{d^2-af}}. \qquad (40)$$

Hierbei ist das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet.

Ferner geben die Gleichungen (38):

$$\frac{be-cd}{de-fb} = \pm \frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{d^2-af}}, \tag{41}$$

wobei die Zeichen der Ausdrücke $(be-cd)$ und $(de-fb)$ unmittelbar das doppelte Vorzeichen bestimmen. Wenn überhaupt eine Zerlegung der gegebenen Function zweiten Grades in zwei lineare Factoren möglich ist, was durch die Bedingungs-Gleichung (39) ausgesprochen wird, so erhalten wir:

$$(bd-ae)(be-cd)(de-fb) = -(b^2-ac)(d^2-af)(e^2-cf).$$

Es folgt hieraus, dass wir in der Gleichung (41) das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen haben, jenachdem die Zerlegung (36) oder die Zerlegung (34) stattfindet.

187. Complex-Flächen in ihrer allgemeinsten Bestimmung, welche wir auch Meridianflächen genannt haben, sind solche Flächen, die einerseits durch eine veränderliche Complex-Curve, deren Ebene sich um eine feste in ihr liegende gerade Linie dreht, erzeugt, andererseits durch Complex-Kegel, deren Mittelpunct auf derselben geraden Linie fortrückt, umhüllt werden. An die erste Erzeugung der Fläche anknüpfend, haben wir zur analytischen Bestimmung der Fläche die Gleichung (15) erhalten. Setzen wir, der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} (F\sin^2\varphi - 2K\sin\varphi\cos\varphi + E\cos^2\varphi) &= a, \\ (R\sin^2\varphi - O\sin\varphi\cos\varphi - U\cos^2\varphi) &= b, \\ (B\sin^2\varphi + 2G\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi) &= c, \\ -(Q\sin\varphi - P\cos\varphi) &= d, \\ -(J\sin\varphi + H\cos\varphi) &= e, \\ A &= f, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

so können wir die Gleichung in der folgenden Weise schreiben:

$$aw^2 + 2btw + ct^2 + 2dvw + 2etv + fv^2 = 0. \tag{42}$$

Es ist hierbei OX für die feste gerade Linie, welche Doppellinie der Fläche wird, genommen und φ ist der Winkel, den die jedesmalige Meridianebene mit einer festen Ebene, der Coordinaten-Ebene XZ, bildet. Wenn wir in der jedesmaligen Meridianebene den Durchschnitt derselben mit YZ als Axe OZ nehmen und dieselbe als OZ' bezeichnen und die Doppellinie der Fläche als Axe OX beibehalten, so stellt die letzte Gleichung die bezügliche Complex-Curve in ihrer eigenen Ebene in gewöhnlichen Linien-Coordinaten dar.

Da die Constanten in der lezten Gleichung Functionen von φ sind, so ändert sich mit φ, das heisst mit der Lage der Meridianebene, die in derselben liegende Complex-Curve. Wenn wir zwischen diesen Constanten irgend eine Bedingungs-Gleichung statuiren und dadurch die Complex-Curve in ihr particularisiren, so gibt diese Gleichung die Meridianebene, in welcher die so particularisirte Curve liegt.

Die Complex-Curve artet insbesondere in ein System von zwei Puncten aus, wenn die Bedingungs-Gleichung (39), die wir auch so schreiben können:

$$f(b^2-ac)+ae^2+cd^2-2bde=0, \tag{44}$$

für die Constanten in ihrer Gleichung (43) erfüllt ist.

Die vorstehende Gleichung wird, wenn wir zu den Constanten des Complexes zurückgehen und zugleich durch $\cos^2\varphi$ dividiren:

$$\begin{aligned}A[(R\operatorname{tang}^2\varphi-O\operatorname{tang}\varphi-U)^2-(F\operatorname{tang}^2\varphi-2K\operatorname{tang}\varphi+E)(B\operatorname{tang}^2\varphi+2G\operatorname{tang}\varphi+C)]\\ +(J\operatorname{tang}\varphi+H)^2(F\operatorname{tang}^2\varphi-2K\operatorname{tang}\varphi+E)\\ +(Q\operatorname{tang}\varphi-P)^2(B\operatorname{tang}^2\varphi+2G\operatorname{tang}\varphi+C)\\ -2(J\operatorname{tang}\varphi+H)(Q\operatorname{tang}\varphi-P)(R\operatorname{tang}^2\varphi-O\operatorname{tang}\varphi-U)=0.\end{aligned} \tag{45}$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf $\operatorname{tang}\varphi$ vom vierten Grade. Es gibt also im Allgemeinen vier Meridianebenen, in welchen die Complex-Curven in Systemen von zwei Puncten ausarten. Da diese vier Ebenen durch die feste Coordinaten-Axe OX gehen, so liegen die vier Punctenpaare in den vier Ebenen auf vier geraden Linien, welche diese Axe schneiden. Die Punctenpaare, in welche die vier Complex-Curven ausarten, sind Doppelpuncte der Fläche. Wir wollen die vier geraden Linien, auf welchen diese Punctenpaare liegen, singuläre Strahlen der Complex-Fläche nennen.

Eine Complex-Fläche hat im Allgemeinen acht Doppelpuncte und vier, die Doppellinie der Fläche schneidende, singuläre Strahlen, welche die Doppelpuncte, paarweise genommen, enthalten.

188. Den vier Werthen von $\operatorname{tang}\varphi$ entsprechen vier Gruppen von Werthen für die Constanten der Gleichung (43). Für jede Gruppe von Werthen gibt diese Gleichung dann die Gleichungen der beiden Puncte in ihrer Meridianebene. Diese Gleichungen können wir in der folgenden zusammenfassen:

$$aw+(b\pm\sqrt{b^2-ac})t+(d\pm\sqrt{d^2-af})v'=0, \tag{46}$$

wobei wir, je nachdem die Zerlegung (34) oder (36) stattfindet, für die beiden

Puncte einmal die Wurzelausdrücke mit gleichem, das andere Mal mit ungleichem Vorzeichen nehmen müssen. Die beiden Coordinaten der beiden Puncte in der bezüglichen Meridianebene sind:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad z' = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a}, \tag{47}$$

wobei wir, wenn wir zu dem ursprünglichen Coordinaten-Systeme zurückgehen, statt des obigen Werthes von z' erhalten:

$$z = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a} \cdot \cos\varphi, \qquad y = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a} \cdot \sin\varphi. \tag{48}$$

Der singuläre Strahl, welcher die beiden Doppelpuncte verbindet, liegt in der durch φ bestimmten Meridianebene. Für seine Gleichung in dieser Ebene erhalten wir:

$$x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{d^2 - af}} \cdot z' + \frac{b\sqrt{d^2 - af} \mp d\sqrt{b^2 - ac}}{a\sqrt{d^2 - af}}, \tag{49}$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichung (40):

$$x = \frac{bd - ae}{d^2 - af} \cdot z' + \frac{de - fb}{d^2 - af} = \frac{b^2 - ac}{bd - ae} \cdot z' + \frac{e^2 - cf}{de - fb}. \tag{50}$$

In dieser Gleichung können wir statt z' nach einander $\frac{y}{\sin\varphi}$ und $\frac{z}{\cos\varphi}$ setzen und erhalten dann die Gleichungzn der Projectionen desselben Strahles auf XY und XZ.

Der singuläre Strahl schneidet von der Doppellinie OX ein Segment ab:

$$x_0 = \frac{de - fb}{d^2 - af} = \frac{e^2 - cf}{de - fe}, \tag{51}$$

und bildet mit derselben einen Winkel δ, bestimmt durch:

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{d^2 - af}{bd - ae} = \frac{bd - ae}{b^2 - ac}. \tag{52}$$

Der jedem der gefundenen Werthe von φ entsprechende singuläre Strahl ist immer reell, mögen die Ausdrücke

$$\sqrt{b^2 - ac} \quad \text{und} \quad \sqrt{d^2 - af}$$

reell oder imaginär sein. Die beiden Doppelpuncte auf dem singulären Strahle hingegen sind zugleich mit diesen beiden Ausdrücken reell oder imaginär.

Wenn eine beliebige Linie des Raumes als Doppellinie einer Fläche eines gegebenen Complexes zweiten Grades angnommen wird, so hängt die Bestimmung der vier Meridianebenen, welche die Doppelpuncte der Fläche enthalten, von der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades ab. Hiernach ist in dieser Meridianebene der singuläre Strahl, welcher die beiden Doppelpuncte in derselben verbindet, auf lineare Weise gegeben. Die Bestimmung der beiden Doppelpuncte auf dem singulären Strahl hängt dann schliesslich von der Auflösung einer quadratischen Gleichung ab. Die vier Meridianebenen, in welchen die singulären Strahlen der Fläche liegen, können paarweise imaginär sein; dann sind es auch die singulären Strahlen und die beiden Doppelpuncte. Aber auch wenn die singulären Strahlen reell sind, können die beiden auf ihnen liegenden Doppelpuncte sowohl imaginär als reell sein.

189. Dieselbe allgemeine Complex-Fläche, welche wir im dritten Paragraphen allgemein durch die Gleichung (15) bestimmt haben, haben wir, von der zweiten Bestimmungsweise eines Complexes ausgehend, im folgenden Paragraphen durch die Gleichung (20) dargestellt. Diese Gleichung können wir, indem wir, unter Fortlassung des Accentes von x':

$$\left.\begin{array}{r} (Fx^2-2Rx+B)\equiv a,\\ -(Kx^2-\;Ox\;-G)\equiv b,\\ (Ex^2+2Ux+C)\equiv c,\\ (Qx-J)\equiv d,\\ -(Px+H)\equiv e,\\ A\equiv f \end{array}\right\} \tag{53}$$

setzen, in folgender Weise schreiben:

$$ay^2+2byz+cz^2+2dy+2ez+f=0. \tag{54}$$

Sie stellt, nachdem x angenommen worden ist, in YZ die Basis derjenigen Kegelfläche dar, deren Mittelpunct auf der Doppellinie der Fläche liegt und durch die Annahme von x auf dieser Doppellinie bestimmt ist.

Die Coefficienten der vorstehenden Gleichung sind Functionen von x. Setzen wir insbesondere

$$f(b^2-ac)+ae^2+cd^2-2bde=0, \tag{44}$$

so ist die Basis der Kegelfläche keine Curve zweiter Ordnung mehr, sondern diese Curve artet in ein System von zwei geraden Linien, die entsprechende Kegelfläche also in ein System von zwei Ebenen aus, deren Durchschnittslinie die Doppellinie der Fläche in dem durch x bestimmten Puncte trifft. Führen wir in die vorstehende Gleichung die ursprünglichen Constanten des Complexes wieder ein, so kommt, nach Fortlassung des gemeinschaftlichen Factors x^2:

$$A[(Kx^2 - Ox - G)^2 - (Fx^2 - 2Rx + B)(Ex^2 + 2Ux + C)]$$
$$+ (Px + H)^2 (Fx^2 - 2Rx + B) + (Qx - J)^2 (Ex^2 + 2Ux + C)$$
$$+ 2(Px + H)(Qx - J)(Kx^2 - Ox - G) = 0. \qquad (55)$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf x vom vierten Grade. Es gibt also im Allgemeinen auf der Doppellinie der Meridianfläche vier Puncte, welche nicht mehr die Mittelpuncte umschriebener Complex-Kegel sind. Diese Complex-Kegel arten in Systeme von zwei Ebenen aus, deren Durchschnittslinie durch die vier Puncte geht. Diese Ebenen sind Doppelebenen der Fläche. Die Doppelebenen der Fläche ordnen sich zu vier Paaren zusammen; die beiden Doppelebenen jedes Paares schneiden sich nach vier geraden Linien, welche die Doppellinie der Fläche in den durch die Werthe von x bestimmten vier Puncten treffen. Wir nennen diese vier geraden Linien singuläre Axen der Meridianfläche.

Eine Complex-Fläche hat im Allgemeinen acht Doppelebenen, die, paarweise genommen, sich in den vier singulären Axen der Fläche schneiden. Die vier singulären Axen schneiden, wie die vier singulären Strahlen, die Doppellinie der Fläche.

190. Den vier Werthen von x entsprechen vier Gruppen von Werthen für die Constanten der Gleichung (51). Für jede Werthen-Gruppe stellt diese Gleichung ein System von zwei geraden Linien dar, in welchen die Coordinaten-Ebene YZ von zwei zusammengehörigen Doppelebenen geschnitten wird. Diese beiden Linien schneiden sich in demjenigen Puncte, in welchem die singuläre Axe, nach welcher die beiden Doppelebenen sich schneiden, die Ebene YZ trifft.

Für die Gleichung der beiden geraden Linien in YZ erhalten wir unmittelbar, nach den Entwickelungen der 185. Nummer, die folgenden:

$$ay + (b \pm \sqrt{b^2 - ac})z + (d \pm \sqrt{d^2 - af}) = 0, \qquad (56)$$

wobei wir, jenachdem die Zerlegung (34) oder (36) stattfindet, für die beiden Linien einmal die Wurzelausdrücke mit gleichem, das andere Mal mit ungleichem Vorzeichen zu nehmen haben. Die Coordinaten der beiden geraden Linien in YZ sind:

$$\frac{v}{u} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad \frac{w}{u} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a}, \qquad (57)$$

und für die Gleichung ihres Durchschnittspunctes erhalten wir hiernach

$$v = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{d^2 - af}} \cdot w + \frac{b\sqrt{d^2 - af} \mp d\sqrt{b^2 - ac}}{a\sqrt{d^2 - af}} \cdot u, \qquad (58)$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichung (40):

$$v = \frac{bd - ae}{d^2 - af} \cdot w + \frac{de - fb}{d^2 - af} \cdot u = \frac{b^2 - ac}{bd - ae} \cdot w + \frac{e^2 - cf}{de - fb} \cdot u. \tag{59}$$

Die Coordinaten dieses Punctes sind also:

$$y = \frac{de - fb}{bd - ae} = -\frac{be - cd}{b^2 - ac} = -\frac{e^2 - cf}{be - cd}, \quad z = -\frac{d^2 - af}{bd - ae} = -\frac{bd - ae}{b^2 - ac}. \tag{60}$$

Durch die Gleichung (58), verbunden mit der folgenden:

$$tx + w = 0, \tag{61}$$

ist die singuläre Axe analytisch bestimmt. Der Winkel φ_0, welchen die Meridianebene, die ihn enthält, mit XZ bildet, ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{be - cd}{bd - ae} = -\frac{de - fb}{d^2 - af} = -\frac{e^2 - cf}{de - fb}. \tag{62}$$

Wir erhalten endlich zur Bestimmung desjenigen Winkels ε, welchen die singuläre Axe mit OX, der Doppellinie der Fläche, bildet:

$$x \operatorname{tang} \varepsilon = \sqrt{\frac{(bd - ae)^2 + (be - cd)^2}{(b^2 - ac)^2}}. \tag{63}$$

Die Bestimmung der vier singulären Axen der Meridianfläche ist eine lineare, nachdem die vier Puncte, in welchen sie die Doppellinie schneiden, durch Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade bestimmt worden sind. Die Bestimmung der beiden Doppelebenen der Fläche, welche auf einer der singulären Axen sich schneiden, hängt von der Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades ab. Die vier Puncte, in welchen die singulären Axen die Doppellinie schneiden, können paarweise imaginär sein; dann sind es auch die singulären Axen. Aber auch, wenn die singulären Axen reell sind, können die in ihnen sich schneidenden Doppelebenen sowohl imaginär als reell sein.

191. Meridianflächen von besonderer Art haben zu ihrer Doppellinie eine Linie des Complexes selbst. In diesem Falle wird die Doppellinie von den die Fläche erzeugenden Curven in den verschiedenen Meridianebenen berührt. Zugleich ist sie gemeinschaftliche Seite der die Fläche umhüllenden Complex-Kegel.

Wenn wir wiederum die Axe OX zur Doppellinie der Meridianfläche nehmen, so erhalten wir, um auszudrücken, dass diese Linie dem Complexe angehört, die Bedingung, dass in der Gleichung desselben A verschwinde. In Folge davon verschwindet auch f in der Gleichung (43), so wie in der

Gleichung (54). Die Gleichung (45), durch welche die Lage der Meridianebenen, in denen die singulären Strahlen liegen, bestimmt wird, reducirt sich auf die folgende:

$$
\begin{aligned}
&(J \operatorname{tang} \varphi + H)^2 (F \operatorname{tang}^2 \varphi - 2K \operatorname{tang} \varphi + E) \\
&+ (Q \operatorname{tang} \varphi - P)^2 (B \operatorname{tang}^2 \varphi + 2G \operatorname{tang} \varphi + C) \\
&- 2(J \operatorname{tang} \varphi + H)(Q \operatorname{tang} \varphi - P)(R \operatorname{tang}^2 \varphi - O \operatorname{tang} \varphi - U) = 0. \quad (64)
\end{aligned}
$$

Die Gleichung bleibt in Beziehung auf tang φ vom vierten Grade. Die Meridianfläche behält also ihre vier singulären Strahlen. Die beiden Doppelpuncte auf denselben haben nach (47) die folgenden Coordinaten:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad z' = \frac{2d}{a},\ 0. \qquad (65)$$

Der eine der beiden Puncte fällt in die Doppellinie der Fläche. Weil diese Bestimmung unabhängig ist von dem jedesmaligen Werthe von φ, so fällt einer der beiden Doppelpuncte auf jedem der vier singulären Strahlen in die Doppellinie der Fläche.

Der Werth von x_0, durch welchen auf der Doppellinie derjenige Punct, in welchem in dieselbe der singuläre Strahl einschneidet, bestimmt wird, reducirt sich, indem wir in (51) f verschwinden lassen, auf:

$$x_0 = \frac{e}{d} = \frac{J \operatorname{tang} \varphi + H}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}. \qquad (66)$$

192. In Folge der Voraussetzung, dass die Doppellinie der Meridianfläche selbst eine Linie des Complexes sei, reducirt sich die Gleichung (55), vermittelst welcher die Puncte bestimmt sind, in welchen die singulären Axen in die Doppellinie einschneiden, durch das Verschwinden von A auf:

$$
\begin{aligned}
&(Px + H)^2 (Fx^2 - 2Rx + B) + (Qx - J)^2 (Ex^2 + 2Ux + C) \\
&- 2(Px + H)(Qx - J)(Kx^2 - Ox - G) = 0. \qquad (67)
\end{aligned}
$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf x vom vierten Grade bleibt, behält die Meridianfläche ihre vier singulären Axen. Für die beiden Doppelebenen, welche durch eine der vier singulären Axen gehen, deren Durchschnitt mit der Doppellinie durch die vorstehende Gleichung bestimmt worden ist, erhalten wir aus der Gleichung (57) die folgenden Coordinaten:

$$u = a, \qquad v = b \pm \sqrt{b^2 - ac}, \qquad w = 2d,\ 0. \qquad (68)$$

Eine der beiden in einer der vier singulären Axen der Fläche sich schneidenden Doppelebenen der Fläche geht also durch die Doppellinie derselben.

Für den Winkel φ_0, den die durch die singuläre Axe gehende Meridianebene mit XZ bildet, haben wir, wenn wir in der Gleichung (62) f verschwinden lassen,

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = -\frac{e}{d} = \frac{Px + H}{Qx - J}. \tag{69}$$

193. Wir können die beiden Gleichungen

$$x_0 = \frac{J \operatorname{tang} \varphi + H}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}, \tag{66}$$

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{Px + H}{Qx - J} \tag{69}$$

in folgender Weise schreiben:

$$\Phi(x_0, \operatorname{tang} \varphi) = 0, \qquad \Phi(x, \operatorname{tang} \varphi_0) = 0, \tag{70}$$

indem wir mit Φ beidesmal dieselbe Function bezeichnen. Führen wir den vorstehenden Werth von x_0 in die Gleichung (64) und den Werth von $\operatorname{tang} \varphi_0$ in die Gleichung (67) ein, so kommt:

$$\left.\begin{array}{c} x_0^2(F \operatorname{tang}^2 \varphi - 2K \operatorname{tang} \varphi + E) + (B \operatorname{tang}^2 \varphi + 2G \operatorname{tang} \varphi + C) \\ -2x_0(R \operatorname{tang}^2 \varphi - O \operatorname{tang} \varphi - U) \equiv \\ \operatorname{tang}^2 \varphi (F x_0^2 - 2R x_0 + B) + (E x_0^2 + 2U x_0 + C) \\ -2 \operatorname{tang} \varphi (K x_0^2 - O x_0 - G) = 0, \\ \operatorname{tang}^2 \varphi_0 (F x^2 - 2R x + B) + (E x^2 + 2U x + C) \\ -2 \operatorname{tang} \varphi_0 (K x^2 - O x - G) \equiv \\ x^2(F \operatorname{tang}^2 \varphi_0 - 2K \operatorname{tang} \varphi_0 + E) + (B \operatorname{tang}^2 \varphi_0 + 2G \operatorname{tang} \varphi_0 + C) \\ -2x(R \operatorname{tang}^2 \varphi_0 - O \operatorname{tang} \varphi_0 - U) = 0. \end{array}\right\} \tag{71}$$

Indem wir durch Ψ wiederum dieselbe Function bezeichnen, können wir die vorstehenden Gleichungen schreiben:

$$\Psi(x_0, \operatorname{tang} \varphi) = 0, \qquad \Psi(x, \operatorname{tang} \varphi_0) = 0. \tag{72}$$

Wenn wir dann zwischen den beiden ersten Gleichungen (70) und (72) x_0, zwischen den beiden zweiten Gleichungen (70) und (72) x eliminiren, erhalten wir dieselbe Gleichung vierten Grades zur Bestimmung von φ und φ_0. Wenn wir zwischen denselben beiden Gleichungen-Paaren einmal $\operatorname{tang} \varphi$, das andere Mal $\operatorname{tang} \varphi_0$ eliminiren, erhalten wir dieselbe Gleichung vierten Grades zur Bestimmung von x_0 und x.

Die vier singulären Strahlen und die vier singulären Axen schneiden sich bezüglich in denselben Puncten der Doppellinie und liegen bezüglich in denselben, durch die Doppellinie gehenden, Ebenen.

Zur Bestimmung dieser Puncte und Ebenen erhalten wir also, wenn wir zusammenfassen, dieselben beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x, \operatorname{tang}\varphi) = 0,\\ \Psi(x, \operatorname{tang}\varphi) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

in denen wir x und tang φ als veränderlich betrachten.*)

194. In dem Falle, dass die Doppellinie der Complex-Fläche unendlich weit liegt, haben wir diese Fläche eine Aequatorialfläche genannt.

---

*) Jede der beiden Gleichungen (73) drückt, einzeln für sich genommen, wenn x und tang φ $\left(= -\frac{v}{u}\right)$ als veränderliche Grössen betrachtet werden, eine Relation zwischen der Lage eines auf der Coordinaten-Axe OX fortrückenden Punctes und einer um diese Axe sich drehenden Ebene aus: sie stellt einen geometrischen Ort dar. Die erste Gleichung, auf welche wir uns hier beschränken wollen, bestimmt in allgemeinster Weise, wie jeder Lage des Punctes eine einzige Lage der Ebene entspricht, und umgekehrt. Das ist beispielsweise der Fall, wenn der Punct auf einer Erzeugenden einer Linienfläche des zweiten Grades fortrückt, während die entsprechende Tangential-Ebene um dieselbe Erzeugende sich dreht. Es sei, zur analytischen Bestätigung, indem wir durch p und q irgend zwei lineare Functionen bezeichnen,

$$qy = pz$$

die Gleichung einer solchen Linienfläche, welche d e Coordinaten-Axe OX zu einer ihrer Erzeugenden hat. Dann ist die Gleichung der Tangential-Ebene der Fläche in irgend einem Puncte ihrer Erzeugenden, dem die Functionen-Werthe p' und q' entsprechen, die folgende:

$$q'y = p'z.$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p'}{q'} = \frac{gx + h}{g'x + h'},$$

wenn x auf den Berührungspunct bezogen wird und g, h, g', h' gehörig zu bestimmende Constanten bedeuten. Diese Gleichung hat die fragliche Form.

Wir können bei der geometrischen Deutung der durch eine solche Gleichung ausgedrückten Abhängigkeit zwischen einer Ebene und einem in ihr liegenden Puncte zwei gerade Linien von vorne herein beliebig annehmen und, indem wir die Ebene um die eine dieser beiden Linien sich drehen lassen, ihre verschiedenen Lagen durch tang φ bestimmen, während auf der zweiten geraden Linie die Lage des auf derselben fortrückenden Durchschnittspunctes mit der sich drehenden Ebene durch x bestimmt wird. Wenn wir zum Beispiel für die beiden geraden Linien irgend zwei zugeordnete Polaren eines linearen Complexes nehmen, so dreht sich, wenn ein Punct auf einer der beiden Polaren fortrückt, die diesem Puncte in dem Complexe entsprechende Ebene um die andere. Die obige Gleichungsform gibt das Drehungsgesetz der Ebene für ein gegebenes Fortrücken des Punctes.

Dasselbe Drehungsgesetz gilt für eine Ebene, welche durch einen Punct geht, der auf einer Erzeugenden einer Linienfläche fortrückt, und zugleich um eine zweite Linie derselben Erzeugung sich dreht. Dasselbe Gesetz gilt endlich für die Drehung der Meridianebene um die Doppellinie einer Complex-Fläche, wenn die Ebene durch einen Punct gelegt wird, welcher auf der Polare der Complex-Fläche fortrückt. Die analytische Bestätigung dieser letzten geometrischen Relation entnehmen wir unmittelbar der 170. Nummer, nach welcher die Gleichung des Textes:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Px + H}{Qx - J},$$

welche wir auch unter der folgenden Form schreiben können:

$$x = \frac{J \operatorname{tang}\varphi + H}{Q \operatorname{tang}\varphi - P},$$

für einen gegebenen Werth von φ, auf der Polaren der Complex-Fläche, durch den entsprechenden Werth von x, den Pol der Doppellinie, in Beziehung auf die Complex-Curve in der durch φ bestimmten Meridian-Ebene, gibt.

Nehmen wir die Ebene YZ für diejenige, in welcher die Doppellinie unendlich weit gerückt ist, so haben wir für die Gleichung der Aequatorialfläche die folgende erhalten:

$$\begin{aligned} & Dw^2 + 2(Lx - S)vw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 \\ & + 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C) = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Wir denken uns dabei die Fläche durch eine veränderliche Complex-Curve erzeugt, deren Ebene parallel mit YZ ist und parallel mit dieser Ebene fortrückt. Die jedesmalige Ebene dieser Curve ist durch x bestimmt. In besonderen Fällen kann, wie bei den Meridianflächen, die Curve in ein System zweier Puncte ausarten. Die geraden Linien, welche solche zwei Puncte verbinden, sind singuläre Strahlen der Aequatorialfläche, die Puncte selbst Doppelpuncte derselben. Die singulären Strahlen der Aequatorialfläche sind der Coordinaten-Ebene YZ parallel, mit anderen Worten, sie schneiden die unendlich weit liegende Doppellinie derselben Fläche.

Setzen wir, der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} D &\equiv a, \\ (Lx - S) &\equiv b, \\ (Fx^2 - 2Rx + B) &\equiv c, \\ (Mx + T) &\equiv d, \\ (Kx^2 - Ox - G) &\equiv e, \\ (Ex^2 + 2Ux + C) &\equiv f, \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

so geht die vorstehende Gleichung (3) in die folgende über:

$$aw^2 + 2bvw + cv^2 + 2duw + 2euv + fu^2 = 0, \qquad (75)$$

und um auszudrücken, dass diese Gleichung ein System von zwei Puncten darstelle, gibt die Entwickelung von (41):

$$\begin{aligned} & D[(Kx^2 - Ox - G)^2 - (Fx^2 - 2Rx + B)(Ex^2 + 2Ux + C)] \\ & + (Mx + T)^2 (Fx^2 - 2Rx + B) + (Lx - S)^2 (Ex^2 + 2Ux + C) \\ & + (Lx - S)(Mx + T)(Kx^2 - Ox - G) = 0. \qquad (76) \end{aligned}$$

Da der Grad dieser Gleichung in Beziehung auf x der vierte ist, so hat auch eine Aequatorialfläche, wie eine Meridianfläche, im Allgemeinen vier singuläre Strahlen.

195. Der Mittelpunct der die Fläche erzeugenden Complex-Curve beschreibt bei der Erzeugung einen Durchmesser des Complexes, den wir als den Durchmesser der Aequatorialfläche bezeichnet haben (Nr. 164.). Wenn wir diesen Durchmesser für die bisher unbestimmt gebliebene Axe OX neh-

men, so verschwinden aus der Gleichung (3) diejenigen Glieder, welche w in der ersten Potenz enthalten, und damit dieses für jeden Werth von x geschehe, müssen die vier Complex-Constanten L, M, S und T verschwinden. Alsdann reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

$$(Kx^2 - Ox - G)^2 - (Fx^2 - 2Rx + B)(Ex^2 + 2Ux + C) = 0. \qquad (77)$$

Nachdem wir durch diese Gleichung die Ebenen bestimmt haben, welche die vier singulären Strahlen enthalten, erhalten wir, indem wir, der Coordinaten-Bestimmung gemäss, b und d gleich Null setzen, auf jedem dieser Strahlen zur Bestimmung der beiden Doppelpuncte:

$$y = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \qquad z = \pm\sqrt{-\frac{f}{a}}. \qquad (78)$$

Jenachdem die Zerlegung (34) oder (36) stattfindet, das heisst, je nachdem e und f im Zeichen übereinstimmen oder nicht, müssen wir die vorstehenden Ausdrücke für y und z für jeden der beiden Puncte mit gleichem oder entgegengesetzten Vorzeichen nehmen. Der singuläre Strahl wird von dem Durchmesser der Fläche geschnitten, und zwar so, dass die beiden Doppelpuncte auf ihm zu beiden Seiten des Durchmessers in gleichem Abstand von demselben liegen. Der Winkel δ, welchen der jedesmalige singuläre Strahl mit der Ebene XZ bildet, ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\text{tang}\,\delta = \pm\sqrt{\frac{c}{f}} = \frac{e}{f} = \frac{c}{e}, \qquad (79)$$

wobei in dem ersten und zweiten der beiden oben unterschiedenen Fälle das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist.

196. Wenn wir dieselbe Aequatorialfläche, welche wir vorstehend durch ihre Breiten-Curven bestimmt haben, durch umhüllende Cylinder bestimmen, deren Axen der Ebene YZ parallel sind, so tritt die Gleichung (28) an die Stelle der Gleichung (3). Die neue Gleichung stellt für die durch den Winkel γ bestimmte Richtung der Cylinder-Axe den Durchschnitt dieses Cylinders mit der Ebene XZ dar. Setzen wir, der Kürze halber:

$$\left.\begin{aligned} (F\,\text{tang}^2\gamma - 2K\,\text{tang}\,\gamma + E) &= a, \\ -(L\,\text{tang}\,\gamma - M)\,\text{tang}\,\gamma &= b, \\ D\,\text{tang}^2\gamma &= c, \\ -(R\,\text{tang}^2\gamma - O\,\text{tang}\,\gamma - U) &= d, \\ (S\,\text{tang}\,\gamma + T)\,\text{tang}\,\gamma &= e, \\ (B\,\text{tang}^2\gamma + 2G\,\text{tang}\,\gamma + C) &= f, \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

so wird die Gleichung der Durchschnitts-Curve:

$$ax^2 + 2bxz + cz^2 + 2dx + 2ez + f = 0. \tag{81}$$

Um auszudrücken, dass diese Gleichung ein System von zwei geraden Linien darstelle und also der umhüllende Cylinder in ein System zweier Ebenen ausarte, welche die Ebene XZ nach diesen beiden geraden Linien schneiden, gibt die Entwicklung der Gleichung (39):

$$\begin{gathered}D[(R\,\mathrm{tang}^2\gamma - O\,\mathrm{tang}\,\gamma - U)^2 - (F\,\mathrm{tang}^2\gamma - 2K\,\mathrm{tang}\,\gamma + E)(B\,\mathrm{tang}^2\gamma + 2G\,\mathrm{tang}\,\gamma + C)] \\ + (S\,\mathrm{tang}\,\gamma + T)^2(F\,\mathrm{tang}^2\gamma - 2K\,\mathrm{tang}\,\gamma + E) + (L\,\mathrm{tang}\,\gamma - M)^2(B\,\mathrm{tang}^2\gamma + 2G\,\mathrm{tang}\,\gamma + C) \\ + 2(L\,\mathrm{tang}\,\gamma - M)(S\,\mathrm{tang}\,\gamma + T)(R\,\mathrm{tang}^2\gamma - O\,\mathrm{tang}\,\gamma - U) = 0. \end{gathered} \tag{82}$$

Es gibt also, den vier Werthen von tang γ, welche die Auflösung dieser Gleichung gibt, entsprechend, vier Paare von Doppelebenen der Aequatorialfläche, in welche sich vier der umschriebenen Cylinder auflösen; die beiden Ebenen jedes Paares schneiden sich in einer der vier singulären Axen der Fläche. Nach jeder Richtung, welche der Ebene YZ parallel ist, wird die Aequatorialfläche nach Curven zweiter Ordnung projicirt; nach den Richtungen der vier singulären Axen sind die Projectionen Systeme von zwei geraden Linien.

197. Wenn wir den der Ebene YZ zugeordneten Durchmesser des Complexes als Axe OX nehmen, so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

$$(R\,\mathrm{tang}^2\gamma - O\,\mathrm{tang}\,\gamma - U)^2 - (F\,\mathrm{tang}^2\gamma - 2K\,\mathrm{tang}\,\gamma + E)(B\,\mathrm{tang}^2\gamma + 2G\,\mathrm{tang}\,\gamma + C) = 0, \tag{83}$$

und die Gleichung der Durchschnitts-Curve des bezüglichen umhüllenden Cylinders mit der Ebene XZ auf:

$$ax^2 + cz^2 + 2ez + f = 0. \tag{84}$$

Diese Gleichung löst sich, wenn die vorstehende Bedingung (83) erfüllt ist, in die folgenden beiden auf:

$$ax \pm \sqrt{-ac} \cdot z \pm \sqrt{-af} = 0, \tag{85}$$

wobei wir, je nachdem die Bedingung (33) oder die Bedingung (35) erfüllt ist, für jede der beiden geraden Linien, welche die vorstehende Gleichung darstellt, den Wurzelausdrücken übereinstimmende oder entgegengesetzte Vorzeichen geben müssen.

Die durch die Doppelgleichung (85) dargestellten geraden Linien schneiden OX in demselben Puncte. Für diesen Schnittpunct erhalten wir:

$$x = \mp \sqrt{-\frac{f}{a}}. \tag{86}$$

Durch denselben Punct geht also auch die singuläre Axe der Aequatorialfläche, in welcher zwei Doppelebenen derselben sich schneiden. Die vier singulären Axen also, wie die vier singulären Strahlen der Fläche, schneiden einerseits, weil sie der Ebene YZ parallel sind, die unendlich weit liegende Doppellinie, andererseits den Durchmesser der Fläche, den wir als die Polare derselben betrachten können.

Zur Bestimmung des Winkels, welchen die Durchschnittslinien der beiden Doppelebenen, welche in einer singulären Axe sich schneiden, mit der Ebene XZ in dieser Ebene mit OX bilden, erhalten wir aus (85):

$$\frac{z}{x \pm \sqrt{-\frac{f}{a}}} = \mp \sqrt{-\frac{a}{c}}. \tag{87}$$

Die beiden Doppelebenen bilden also mit den zwei in derselben singulären Axe sich schneidenden Ebenen, von denen die eine durch den Durchmesser der Fläche geht und die andere demselben zugeordnet ist, vier harmonische Ebenen, und sind somit, wenn der Durchmesser auf seinen zugeordneten Ebenen senkrecht steht, gleich gegen denselben geneigt.

198. Wir begegnen einer besonderen Art von Aequatorialflächen, wenn wir eine unendlich weit liegende Linie, die dem Complexe angehört, als Doppellinie der Fläche nehmen. Es kommt das darauf hinaus, dass alle Breiten-Curven der Fläche Parabeln werden.

Nehmen wir, wie bisher, die Doppellinie in der Ebene YZ unendlich weit, so verschwindet, unter der gemachten Voraussetzung, in der Gleichung des Complexes die Constante D. Alsdann geht die Gleichung (76), durch welche wir den Abstand der singulären Strahlen, die der Coordinaten-Ebene parallel sind, von dieser Ebene bestimmt haben, in die folgende über:

$$\begin{aligned}(Mx+T)^2(Kx^2-Ox-G)+(Lx-S)^2(Ex^2+2Ux+C)&\\ +(Lx-S)(Mx+T)(Fx^2-2Rx+B)&=0.\end{aligned} \tag{88}$$

Die Fläche hat ihren Durchmesser, der unendlich weit gerückt ist, verloren.

Die Gleichung (3) geht, wenn wir:

$$\left.\begin{aligned}(Ex^2+2Ux+C)&\equiv a,\\ (Rx^2-\ Ox\ -G)&\equiv b,\\ (Fx^2-2Rx+B)&\equiv c,\\ (Mx+T)&\equiv d,\\ (Lx-S)&\equiv e,\\ D\equiv f&=0\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

setzen, in die folgende über:

$$au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw=0, \tag{90}$$

und diese Gleichung löst sich, wenn wir für x eine der vier Wurzeln der Gleichung (88) nehmen, in die folgenden beiden auf:

$$\left.\begin{aligned} au + (b \pm \sqrt{b^2 - ac})v + 2dw &= 0, \\ au + (b \mp \sqrt{b^2 - ac})v &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

wo wir, je nachdem die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet, das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen haben.

Ein Doppelpunct der Fläche liegt also auf dem singulären Strahl unendlich weit, der andere hat zu Coordinaten in seiner Ebene:

$$y = \frac{a}{2d}, \qquad z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2d}. \tag{92}$$

Der Winkel γ_0, welchen die Richtung des singulären Strahles mit OZ bildet, ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \gamma_0 = \frac{a}{b \pm \sqrt{b^2 - ac}} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{c} = \frac{d}{e} \tag{93}$$

bestimmt. Führen wir die Constanten des Complexes wieder ein, so kommt:

$$\operatorname{tang} \gamma_0 = \frac{Mx + T}{Lx - S}. \tag{94}$$

199. Bestimmen wir die Aequatorialfläche durch ihre umhüllenden Cylinder, so müssen wir von der Gleichung (28) ausgehen. Unter der gemachten Annahme, dass die in YZ unendlich weit liegende Linie dem Complexe angehöre, wird die Bedingung (76), durch die ausgedrückt wird, dass sich die durch (28) dargestellte Curve in ein Linienpaar auflöst, die folgende:

$$\begin{gathered}(S \operatorname{tang} \gamma + T)^2 (F \operatorname{tang}^2 \gamma - 2K \operatorname{tang} \gamma + E) + (L \operatorname{tang} \gamma - M)^2 (B \operatorname{tang}^2 \gamma + 2G \operatorname{tang} \gamma - C) \\ + 2(L \operatorname{tang} \gamma - M)(S \operatorname{tang} \gamma + T)(R \operatorname{tang}^2 \gamma - O \operatorname{tang} \gamma - U) = 0. \end{gathered} \tag{95}$$

Die Gleichung (28) geht, wenn wir, der Kürze wegen, die Constanten-Bestimmung (80) wieder einführen und c verschwinden lassen, in die folgende über:

$$ax^2 + 2bxz + 2dx + 2ez + f = 0, \tag{96}$$

und diese Gleichung löst sich, wenn für $\operatorname{tang} \gamma$ eine der Wurzeln der vorstehenden Gleichung genommen wird, in die beiden folgenden auf:

$$\left.\begin{aligned} ax + 2bz + (d \pm \sqrt{d^2 - af}) &= 0, \\ ax + (d \mp \sqrt{d^2 - af}) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

wo wir die oberen, bezüglich die unteren Vorzeichen zu nehmen haben, je nachdem die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet.

Eine der beiden Doppelebenen, in die sich der die Fläche umhüllende

Complex-Cylinder auflöst, geht also immer durch die unendlich weit liegende Doppellinie der Fläche. Sie schneidet von OX ein Stück ab:

$$x_0 = -\frac{d \mp \sqrt{d^2 - af}}{a} = -\frac{f}{d \pm \sqrt{d^2 - af}} = -\frac{e}{b}, \tag{98}$$

oder, wenn wir die Constanten des Complexes wieder einführen:

$$x_0 = \frac{S \operatorname{tang} \gamma + T}{L \operatorname{tang} \gamma - M}. \tag{99}$$

200. Indem wir den Werth von tang γ_0 aus der Gleichung (94) in die Gleichung (88) und den Werth von x_0 aus der Gleichung (99) in die Gleichung (95) einführen, gelangen wir, wie wir es in der 193. Nummer für Meridianflächen gethan haben, nun für Aquatorialflächen der besonderen Art zu dem folgenden Satze:

Die vier singulären Strahlen und die vier singulären Axen liegen bezüglich in derselben Ebene, welche durch die unendlich weit entfernte Doppellinie der Fläche geht, und sind, in dieser Ebene, bezüglich einander parallel.

§ 7.

Allgemeine Betrachtungen über Complex-Flächen, ihre Doppellinien, Doppelpuncte und Doppelebenen.

201. Wenn eine gerade Linie im Raume sich bewegt, so erzeugt sie eine Linienfläche. Es ist hierbei gleichgültig, ob wir sie als einen Strahl oder als eine Axe betrachten. Wir können die Linienfläche durch drei Gleichungen entweder in Strahlen-Coordinaten oder in Axen-Coordinaten darstellen, die sich in dem ersten Falle auf eine einzige Gleichung in Punct-Coordinaten, in dem zweiten Falle auf eine einzige Gleichung in Plan-Coordinaten zurückführen lassen.

202. Wenn insbesondere die gerade Linie im Raume so sich bewegt, dass sie in je zwei auf einander folgenden Lagen in derselben Ebene enthalten ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch denselben Punct geht, so beschreibt sie, wenn sie als Strahl betrachtet wird, eine Abwicklungsfläche; sie umhüllt, wenn sie als Axe betrachtet wird, eine räumliche Curve. Je nach der zwiefachen Auffassung der geraden Linie geht dann die Linienfläche in die Curve oder in die Abwicklungsfläche über. Die verschiedenen Lagen