wird von den Polarebenen derselben geraden Linie in Beziehung auf alle umhüllenden Complex-Kegel.

179. Durch jede die Axe OX schneidende gerade Linie lassen sich an die Complex-Fläche vier Tangential-Ebenen legen, von welchen zwei durch diese Axe gehen. Diese Axe ist also eine Doppelaxe der Meridianfläche. Von einem beliebigen Puncte aus lässt sich an die Fläche ein Kegel vierter Classe legen, der eine durch OX gehende Doppelebene hat. Wenn insbesondere der Punct auf der Doppelaxe der Complex-Fläche angenommen wird, so wird dieselbe auch eine Doppellinie des Berührungskegels vierter Classe, das heisst eine durch den Mittelpunct desselben gehende gerade Linie, welche von unendlich vielen Tangential-Ebenen umhüllt wird. Dadurch reducirt sich der Kegel auf die zweite Classe, indem er ein Complex-Kegel wird.

Wenn wir die in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate in Verbindung bringen, so gelangen wir zu der Folgerung, dass die Coordinaten-Axe OX zugleich ein Doppelstrahl und eine Doppelaxe derselben Meridianfläche ist. Wir können also von der Doppellinie der Meridianfläche sprechen und dieselbe einmal als Doppelstrahl, das andere Mal als Doppelaxe auffassen.

§ 5.

Aequatorialflächen, von Cylinderflächen des Complexes umhüllt, deren Seiten einer festen Ebene parallel sind.

180. In die Reihe der Complex-Kegel, welche eine Meridianfläche umhüllen, gehört ein Cylinder, dessen Mittelpunct auf der Doppellinie derselben unendlich weit liegt. Es gibt unendlich viele solcher Cylinderflächen. Jeder gegebenen Richtung sind die Seiten eines solchen Cylinders so wie die Axe desselben parallel. Es ist augenscheinlich, dass nicht irgend zwei Cylinder eine gemeinsame Seite haben, dass alle Seiten aller Cylinder den Inbegriff aller Linien des Complexes bilden. Wir können die Cylinder zu Gruppen von je unendlich vielen zusammennehmen, deren Axen einer gegebenen Ebene parallel sind. Dann umhüllen solche Cylinder eine Fläche. Zur leichtern Uebersicht eines Complexes können wir also auch die unendlich vielen (∞^3) Linien desselben zu unendlich vielen (∞^2) Gruppen verbinden, deren jede aus den Seiten eines Cylinders besteht, und wiederum statt der unendlich vielen

(∞^2) Cylinder unendlich viele (∞) Flächen, deren jede von unendlich vielen (∞) solchen Cylindern umhüllt wird, einführen.

Diejenige Fläche, welche von den unendlich vielen Complex-Cylindern umhüllt wird, deren Axen einer gegebenen Ebene parallel sind, ist keine andere, als diejenige Aequatorialfläche, die von Complex-Curven in Ebenen, welche der gegebenen parallel sind, gebildet wird. Die Aequatorialfläche ist als eine der vorhin betrachteten Complex-Flächen anzusehen, deren Doppellinie unendlich weit liegt und deren Polare ihr Durchmesser ist.

181. Um durch eine einzige Gleichung den Inbegriff aller Complex-Cylinder darzustellen, brauchen wir bloss in der Gleichung (19) des vorigen Paragraphen x', y', z' unendlich gross zu nehmen. Dann erhalten wir die folgende, in Beziehung auf diese Grössen homogene Gleichung:

$$\begin{aligned}[Fx'^2-2Lx'z'+Dz'^2]y^2-2[Kx'^2-Lx'y'-Mx'z'+Dy'z']yz+[Ex'^2-2Mx'y'+Dy'^2]z^2\\+2[Qx'^2+Rx'y'-Nx'z'-Sy'z'-Tz'^2]y-2[Px'^2-(N-O)x'y'-Sy'^2+Ux'z'+Ty'z']z\\+[Ax'^2+2Jx'y'+By'^2+2Hx'z'+2Gy'z'+Cz'^2]=0.\qquad(24)\end{aligned}$$

Wenn wir, unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen, die Winkel, welche die jedesmalige Richtung der Axe des Cylinders mit den drei Coordinaten-Axen bildet, durch α, β, γ bezeichnen, so ist:

$$x' : y' : z' = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma;$$

wir können demnach $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ an die Stelle von x', y', z' in die letzte Gleichung einführen. Nachdem diese drei Cosinus bestimmt worden sind, stellt dann die vorstehende Gleichung diejenige Curve zweiter Ordnung dar, in welcher der bezügliche Cylinder die Coordinaten-Ebene YZ schneidet. Wenn wir die drei Cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, zwischen welchen die bekannte Relation besteht:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

ebenfalls als veränderlich ansehen, *so können wir dieselbe Gleichung* (24), welche jetzt die folgende Form angenommen hat:

$$\begin{aligned}&[F\cos^2\alpha-2L\cos\alpha\cos\gamma-D\cos^2\gamma]y^2\\&-2[K\cos^2\alpha-L\cos\alpha\cos\beta-M\cos\alpha\cos\gamma+D\cos\beta\cos\gamma]yz\\&+[E\cos^2\alpha-2M\cos\alpha\cos\beta+D\cos^2\beta]z^2\\&+2[Q\cos^2\alpha+R\cos\alpha\cos\beta-N\cos\alpha\cos\gamma-S\cos\beta\cos\gamma-T\cos^2\gamma]y\\&-2[P\cos^2\alpha-(N-O)\cos\alpha\cos\beta-S\cos^2\beta+U\cos\alpha\cos\gamma-T\cos\beta\cos\gamma]z\\&+[A\cos^2\alpha+2J\cos\alpha\cos\beta+B\cos^2\beta+2H\cos\alpha\cos\gamma+2G\cos\beta\cos\gamma+C\cos^2\gamma]=0,\qquad(25)\end{aligned}$$

auch als die Gleichung des Complexes selbst ansehen. In ihr kommen sämmtliche Constante der allgemeinen Complex-Gleichung vor. Die hier auftretenden Grössen:

$$y,\ z,\qquad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\qquad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$$

vertreten bei dieser Darstellung des Complexes die Veränderlichen r, s, ϱ, σ der Gleichung (I) oder $p, q, \pi, \varkappa$ der Gleichung (III).

182. Setzen wir voraus, dass die Axen aller Cylinder einer gegebenen Ebene, für welche wir die Ebene XZ nehmen wollen, parallel sind, so verschwindet y' gegen x' und z', oder $\cos\alpha$ wird gleich Null. Die vorstehende allgemeine Gleichung (24) geht alsdann in die folgende über:

$$\begin{aligned}&[Fx'^2-2Lx'z'+Dz'^2]y^2-2[Kx'-Mz']x'\cdot yz+Ex'^2\cdot z^2\\ &+2[Qx'^2-Nx'z'-Tz'^2]y-2[Px'+Uz']x'\cdot z+[Ax'^2+2Hx'z'+Cz'^2]=0. \quad (26)\end{aligned}$$

Zum Behuf der Uebereinstimmung mit den Entwickelungen des zweiten Paragraphen wollen wir, unter Berücksichtigung der Vertauschungsregeln des ersten Paragraphen, die beiden Axen OX und OY mit einander vertauschen. Dann finden wir:

$$\begin{aligned}&[Fy'^2-2Ky'z'+Ez'^2]x^2-2[Ly'-Mz']y'\cdot xz+Dy'^2\cdot z^2\\ &-2[Ry'^2-Oy'z'-Uz'^2]x+2[Sy'+Tx']y'\cdot z+[By'^2+2Gy'z'+Cz'^2]=0. \quad (27)\end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt den Inbegriff der Cylinder dar, deren Axen der Ebene YZ parallel sind, oder, was dasselbe heisst, die Aequatorialfläche, welche von diesen Cylindern umhüllt wird.

Die letzte Gleichung geht, wenn wir durch z^2 dividiren und nach der Division:

$$\frac{y'}{z'}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\operatorname{tang}\gamma$$

setzen, in die folgende über:

$$\begin{aligned}&[F\operatorname{tang}^2\gamma-2K\operatorname{tang}\gamma+E]x^2-2[L\operatorname{tang}\gamma-M]\operatorname{tang}\gamma\cdot xz+D\operatorname{tang}^2\gamma\cdot z^2\\ &\quad-2[R\operatorname{tang}^2\gamma-O\operatorname{tang}\gamma-U]x+2[S\operatorname{tang}\gamma+J]\operatorname{tang}\gamma\cdot z\\ &\qquad+[B\operatorname{tang}^2\gamma+2G\operatorname{tang}\gamma+C]=0. \quad (28)\end{aligned}$$

Wir wollen schliesslich, statt der bisher betrachteten Durchschnittscurve mit XZ, die Durchschnitts-Curve des Cylinders mit derjenigen Ebene bestimmen, welche auf der Axe des Cylinders senkrecht steht. Zu diesem Ende vertauschen wir in der vorstehenden Gleichung, während x ungeändert bleibt, z mit $z\cdot\cos\gamma$. Dann kommt, wenn wir mit $\cos^2\gamma$ multipliciren:

$$\begin{aligned}&[F\sin^2\gamma-2K\sin\gamma\cos\gamma+E\cos^2\gamma]x^2-2[L\sin\gamma-M\cos\gamma]\sin\gamma\cdot xz+D\sin^2\gamma\cdot z^2\\ &\quad-2[R\sin^2\gamma-O\sin\gamma\cos\gamma-U\cos^2\gamma]x+2[S\sin\gamma+T\cos\gamma]\sin\gamma\cdot z\\ &\qquad+[B\sin^2\gamma+2G\sin\gamma\cos\gamma+C\cos^2\gamma]=0. \quad (29)\end{aligned}$$

183. Um die Gleichung der Aequatorialfläche in Plan-Coordinaten zu erhalten, führen wir zunächst in die Gleichung (28) vermittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tang} \gamma = -\frac{v}{u}$$

den Quotienten der beiden Coordinaten $\frac{v}{w}$ und $\frac{u}{w}$ einer Tangential-Ebene des Cylinders ein, die auch eine Tangential-Ebene der Aequatorialfläche ist. Die Gleichung (28) verwandelt sich hiernach in die folgende, wenn wir zugleich mit u^2 multipliciren:

$$\begin{aligned}&[Fv^2 + 2Kuv + Eu^2]x^2 - 2[Lv + Mu]v \cdot xz + Dv^2 \cdot z^2 \\ &- 2[Rv^2 + Ouv - Uu^2]x + 2(Sv - Tu)v \cdot z + [Bv^2 - 2Guv + Cu^2] = 0. \quad (30)\end{aligned}$$

Die Gleichung (28) stellt für einen gegebenen Werth von γ die Durchschnittscurve des bezüglichen Cylinders mit der Coordinaten-Ebene XZ in Punct-Coordinaten x und z dar. Wir wollen, statt dieser Coordinaten, die Coordinaten der Tangenten der Curve einführen und für dieselben $\frac{t}{u}$ und $\frac{w}{u}$ nehmen. Diese beiden Coordinaten der Tangente an die Durchschnittscurve sind aber zugleich zwei Coordinaten der Tangential-Ebene des Cylinders und der Aequatorialfläche, deren dritte Coordinate $\frac{v}{u}$ ist. Auf diese Weise finden wir für die Gleichung der Aequatorialfläche in Plan-Coordinaten, nach Division durch v^2:

$$\begin{aligned}&[(Lv + Mu)^2 - D(Fv^2 + 2Kuv + Eu^2)]w^2 \\ &+ 2[(Sv - Tu)(Fv^2 + 2Kuv + Eu^2) - (Lv + Mu)(Rv^2 + Ouv - Uu^2)]w \\ &+ [(Rv^2 + Ouv - Uu^2)^2 - (Fv^2 + 2Kuv + Eu^2)(Bv^2 - 2Guv + Cu^2)] \\ &- 2[D(Rv^2 + Ouv - Uu^2) - (Lv + Mu)(Sv - Tu)]tw \\ &- 2[(Lv + Mu)(Bv^2 - 2Guv + Cu^2) - (Sv - Tu)(Rv^2 + Ouv - Uu^2)]t \\ &+ [(Sv - Tu)^2 - D(Bv^2 - 2Guv + Cu^2)]t^2 = 0. \quad (31)\end{aligned}$$

Die Aequatorialflächen sind also, wie die Meridianflächen, zugleich von der vierten Ordnung und der vierten Classe. Die in YZ unendlich weit liegende Doppelaxe der Fläche ist in der vorstehenden Gleichung dadurch angezeigt, dass u und v in keiner niederen Potenz vorkommen, als der zweiten. Die unendlich weit liegende Doppelaxe der Aequatorialfläche ist nach dem zweiten Paragraphen zugleich ein Doppelstrahl derselben. Wir können also sagen, dass die Aequatorialflächen eine unendlich weit liegende Doppellinie haben.

184. Die Polarebene der in YZ unendlich weit liegenden Doppellinie

in Beziehung auf einen beliebigen Complex-Cylinder, der die Ebene XZ nach der Curve (28) schneidet, geht durch denjenigen Durchmesser der Durchschnittscurve, welche der Richtung der Coordinaten-Axe OZ zugeordnet ist. Für die Gleichung dieses Durchmessers erhalten wir, indem wir die Gleichung (28) nach z differentiiren:

$$-(L \operatorname{tang} \gamma - M)x + D \operatorname{tang} \gamma \cdot z + (S \operatorname{tang} \gamma + T) = 0$$

und hieraus für die Gleichung der Polarebene:

$$-(L \operatorname{tang} \gamma - M)x - Dy + D \operatorname{tang} \gamma \cdot z + (S \operatorname{tang} \gamma + T) = 0.$$

Diese Gleichung wird insbesondere, unabhängig von $\operatorname{tang} \gamma$, befriedigt, wenn zugleich:

$$Dz - Lx + S = 0,$$
$$Dy - Mx - T = 0.$$

Also schneiden sich die Polarebenen der in YZ unendlich weit liegenden geraden Linie in Beziehung auf alle Complex-Cylinder, deren Axen dieser Ebene parallel sind, in einer festen geraden Linie, die durch die vorstehenden beiden Gleichungen dargestellt wird.

Diese beiden Gleichungen sind aber dieselben, welche wir früher (Nr. 164.) zur Bestimmung des Durchmessers der Aequatorialfläche erhalten haben.

Der Durchmesser einer Aequatorialfläche steht also zu derselben in der doppelten Beziehung, dass er einmal der geometrische Ort ist für die Mittelpuncte der Breiten-Curven, welche die Fläche erzeugen, andererseits dass er umhüllt wird von den Polarebenen derjenigen geraden Linie, welche in den Ebenen der Breiten-Curven unendlich weit liegt, in Beziehung auf die umhüllenden Complex-Cylinder.

185. Die folgenden drei Gleichungen stellen in YZ, XZ, XY die Basen derjenigen drei Complex-Cylinder dar, deren Axen bezüglich den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel sind:

$$\left.\begin{aligned} Fy^2 - 2Kyz + Ez^2 + 2Qy - 2Pz + A &= 0, \\ Fx^2 - 2Lxz + Dz^2 + 2Sz - 2Rx + B &= 0, \\ Ex^2 - 2Mxy + Dy^2 + 2Ux - 2Ty + C &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Die zweite dieser Gleichungen ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung (30), wenn wir in dieser Gleichung U gleich Null setzen, und dann ergeben sich nach den Vertauschungsregeln der 155. Nummer die beiden übrigen.