§ 4.

Meridianflächen, umhüllt von Complex-Kegeln, deren Mittelpuncte in gerader Linie liegen.

173. Alle Linien eines Complexes des zweiten Grades, welche einer gegebenen geraden Linie begegnen, lassen sich in doppelter Weise zusammengruppiren; einerseits bilden sie die Gesammtheit der Tangenten unendlich vieler Complex-Curven zweiter Classe, deren Ebenen durch die gerade Linie gehen, andererseits die Gesammtheit der Seiten unendlich vieler Complex-Kegel zweiter Ordnung, deren Mittelpuncte auf der gegebenen geraden Linie liegen. Wir können hiernach dieselben Complex-Flächen, welche wir in den beiden vorhergehenden Paragraphen als durch Complex-Curven beschrieben ansahen, nunmehr von Complex-Kegeln umhüllt betrachten.

In Uebereinstimmung hiermit lassen sich von einem beliebigen Puncte einer gegebenen geraden Linie aus in jeder durch diese Linie gehenden Ebene zwei Tangenten an die in ihr liegende Complex-Curve legen. Diese beiden Linien sind Linien des Complexes und erzeugen, wenn die Ebene um die gegebene gerade Linie als Axe sich dreht, eine Kegelfläche, die dem Complexe angehört, die den angenommenen Punct zum Mittelpuncte hat und die der betreffenden Complexfläche umschrieben ist. So entspricht jedem Puncte der gegebenen geraden Linie ein Complex-Kegel, der, weil er von jeder durch seinen Mittelpunct gehenden Ebene in zwei geraden Linien geschnitten wird, von der zweiten Ordnung ist. Die Curve, in welcher ein solcher Kegel die Complex-Fläche berührt, ist im Allgemeinen keine ebene Curve, so wie die Tangential-Ebenen der Fläche in den Puncten einer Complex-Curve im Allgemeinen keine Kegelfläche umhüllen.

174. Wir wollen von der allgemeinen Gleichung:

$$\begin{aligned}
&A(x-x')^2 + B(y-y')^2 + C(z-z')^2\\
&+ D(yz'-y'z)^2 + E(x'z-xz')^2 + F(xy'-x'y)^2\\
&+ 2G(y-y')(z-z') + 2H(x-x')(z-z') + 2J(x-x')(y-y')\\
&+ 2K(xy'-x'y)(x'z-xz') + 2L(xy'-x'y)(yz'-y'z) + 2M(x'z-xz')(yz'-y'z)\\
&+ 2N(x-x')(yz'-y'z) + 2O(y-y')(x'z-xz')\\
&+ 2P(x-x')(x'z-xz') + 2Q(x-x')(xy'-x'y)\\
&+ 2R(y-y')(xy'-x'y) + 2S(y-y')(yz'-y'z)\\
&+ 2T(z-z')(yz'-y'z) + 2U(z-z')(x'z-xz') = 0, \qquad \text{(II)}
\end{aligned}$$

welche den Complex zweiten Grades in Strahlen-Coordinaten darstellt, ausgehen. Betrachten wir in dieser Gleichung x', y', z' als constant, so stellt dieselbe einen Kegel zweiter Ordnung dar, welcher durch alle diejenigen Puncte des Raumes geht, deren Coordinaten x, y, z die Gleichung befriedigen. Dieser Kegel hat den Punct (x', y', z') zum Mittelpunct und ist der geometrische Ort für die durch denselben gehenden Linien des Complexes.

Der Durchschnitt dieses Kegels mit einer der drei Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der vorstehenden Gleichung bezüglich x, y, z gleich Null setzen. Auf diese Weise erhalten wir, wenn wir nur den Durchschnitt mit YZ berücksichtigen, die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Gy'z' + 2Hx'z' + 2Jx'y') \\
&-2(Cz' + Gy' + Hx' - (N-O)x'y' + Px'^2 - Sy'^2 - Ty'z' + Ux'z')z \\
&+(C + Dy'^2 + Ex'^2 - 2Mx'y' - 2Ty' + Ux')z^2 \\
&-2(By' + Gz' + Jx' + Nx'z' - Qx'^2 - Rx'y' + Sy'z' + Tz'^2)y \\
&-2(Dy'z' - G + Kx'^2 - Lx'y' - Mx'z' - Ox' + Sy' - Tz')yz \\
&+(B + Dz'^2 + Fx'^2 - 2Lx'z' - 2Rx' + 2Sz')y^2 = 0. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist derjenigen analog, welche wir Nr. 162. aus der Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten abgeleitet haben, um die Projection der in der Ebene (t', u', v', w') liegenden Complex-Curve auf die Coordinaten-Ebene YZ darzustellen. Um die neue Gleichung aus der früheren (1) direct abzuleiten, haben wir in dieser nur w und w' gleich 1 zu setzen und dann nach den Vertauschungsregeln der 153. Nummer zu verfahren.

175. Die Gleichung (19) stellt in der Coordinaten-Ebene YZ eine Curve zweiter Ordnung dar, den Ort der Durchschnittspuncte aller Linien des Complexes, welche durch den gegebenen Punct (x', y', z') gehen, mit dieser Ebene. Der Kegel ist damit vollkommen bestimmt.

Wenn wir in dieser Gleichung neben y und z auch x', y', z' als veränderlich betrachten und als die Coordinaten des Mittelpunctes eines Complex-Kegels ansehen, so können wir sagen, dass die vorstehende Gleichung (19) den Inbegriff aller Complex-Kegel und demnach auch den Complex selbst darstelle.

Wir wollen den Punct (x', y', z') auf einer geraden Linie fortrücken lassen. Alsdann umhüllen die bezüglichen Complex-Kegel eine Complex-Fläche. Nehmen wir für diese gerade Linie insbesondere die Coordinaten-Axe OX, so ist die umhüllte Fläche dieselbe Meridianfläche, die wir im vorigen Paragraphen als den geometrischen Ort solcher Complex-Curven, deren Ebenen in derselben Axe sich schneiden, bestimmt haben.

176. Indem wir, der gemachten Voraussetzung entsprechend, y' und z' gleich Null setzen, geht die letzte Gleichung in die folgende über:

$$(Fx'^2 - 2Rx' + B)y^2 - 2(Kx'^2 - Ox' - G)yz + (Ex'^2 + 2Ux' + C)z^2 \\ + 2(Qx' - J)x'y - 2(Px' + H)x'z + Ax'^2 = 0. \qquad (20)$$

Diese Gleichung stellt also, wenn wir neben y und z auch x' als veränderlich betrachten, den Inbegriff aller Kegelflächen des Complexes dar, deren Mittelpuncte auf der Axe OX liegen, und ist daher, in dem oben festgestellten Sinne, als die Gleichung der von ihnen umhüllten Complex-Fläche anzusehen. Die Gleichung gibt in Punct-Coordinaten die Basis einer solchen Kegelfläche in YZ, nachdem der Mittelpunct derselben durch x' bestimmt worden ist. Jede gerade Linie, welche diesen Punct mit einem Puncte der Basis verbindet, ist eine Seite des Kegels.

Wir können die Tangential-Ebenen des Kegels direct construiren und zwar dadurch, dass wir durch seinen Mittelpunct und die Tangenten der Basis in YZ Ebenen legen. Eine Coordinate einer solchen Tangential-Ebene ist:

$$\frac{t}{w} = -\frac{1}{x'},$$

wonach wir die letzte Gleichung unter der folgenden Form schreiben können:

$$(Fw^2 + 2Rtw + Bt^2)y^2 - 2(Kw^2 + Otw - Gt^2)yz + (Ew^2 - 2Utw + Ct^2)z^2 \\ + 2(Qw + Jt)wy - 2(Pw - Ht)wz + Aw^2 = 0. \qquad (21)$$

Die vorstehende Gleichung stellt in gemischten Punct- und Ebenen-Coordinaten die Meridianfläche dar.

177. Es sind die Tangential-Ebenen der Umhüllungskegel zugleich Tangential-Ebenen der umhüllten Complex-Fläche. Durch die Annahme von $\frac{t}{w}$, der einen Coordinate einer solchen Ebene, ist der Mittelpunct des entsprechenden Umhüllungskegels bestimmt. Die beiden anderen Coordinaten einer solchen Tangential-Ebene sind, weil diese Ebene durch eine Tangente der Basis des Kegels in YZ geht, identisch mit den beiden Coordinaten dieser Tangente in ihrer Ebene. Führen wir also statt der beiden Punct-Coordinaten y und z in die letzte Gleichung die Linien-Coordinaten $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ ein, wonach diese Gleichung unter Anwendung der Transformationsformeln (Nr. 165. Note) nach Division durch w^2 in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned}
&[(Kw^2+Otw-Gt^2)^2-(Fw^2+2Rtw+Bt^2)(Ew^2-2Utw+Ct^2)]\\
&-2[(Pw-Ht)(Fw^2+2Rtw+Bt^2)-(Qw+Jt)(Kw^2+Otw-Gt^2)]v\\
&+[(Qw+Jt)^2-A(Fw^2+2Rtw+Bt^2)]v^2\\
&+2[(Qw+Jt)(Ew^2-2Utw+Ct^2)-(Pw-Ht)(Kw^2+Otw-Gt^2)]u\\
&-2[A(Kw^2+Otw-Gt^2)-(Qw+Jt)(Pw-Ht)]uv\\
&+[(Pw-Ht)^2-A(Ew^2-2Utw+Ct^2)]u^2=0, \qquad (22)
\end{aligned}$$

so stellt diese Gleichung in Plan-Coordinaten dieselbe Meridianfläche dar, welche wir im vorigen Paragraphen durch die Gleichung (18) in Punct-Coordinaten dargestellt haben.

Die Meridianflächen sind sowohl Flächen der vierten Ordnung als Flächen der vierten Classe.

178. Um die Polar-Ebene der Axe OX in Beziehung auf eine beliebige der Kegelflächen zu erhalten, deren Mittelpuncte auf dieser Axe liegen, brauchen wir bloss durch den jedesmaligen Mittelpunct derselben und die Polare des Anfangspunctes der Coordinaten in Bezug auf die Durchschnitts-Curve in YZ eine Ebene zu legen. Nehmen wir, nachdem x' angenommen worden ist, die Gleichung (20) für die Gleichung dieser Durchschnitts-Curve, so erhalten wir bekanntlich für die fragliche Polare, nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors x', die Gleichung:

$$(Qx'-J)y-(Px'+H)z+Ax'=0.$$

Danach wird die Gleichung der Polarebene:

$$-Ax+(Qx'-J)y-(Px'+H)z+Ax'=0. \qquad (23)$$

Diese Gleichung wird insbesondere, unabhängig von x', befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\begin{aligned}
Ax+Jy+Hz&=0,\\
Qy-Pz+A\ &=0.
\end{aligned}$$

Also schneiden sich die Polarebenen der Coordinaten-Axe OX in Beziehung auf alle Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf OX liegen, in derselben geraden Linie, die durch die letzten beiden Gleichungen dargestellt wird.

Diese beiden Gleichungen sind aber dieselben, welche wir früher (Nr. 170.) für die Polare der Meridianfläche erhalten haben.

Die Polare einer Meridianfläche steht also zu derselben in der doppelten Beziehung, dass sie einerseits der geometrische Ort ist für die Pole des Doppelstrahles der Fläche in Beziehung auf alle Meridian-Curven, und dass sie andererseits umhüllt wird von den Polarebenen derselben geraden Linie in Beziehung auf alle umhüllenden Complex-Kegel.

179. Durch jede die Axe OX schneidende gerade Linie lassen sich an die Complex-Fläche vier Tangential-Ebenen legen, von welchen zwei durch diese Axe gehen. Diese Axe ist also eine Doppelaxe der Meridianfläche. Von einem beliebigen Puncte aus lässt sich an die Fläche ein Kegel vierter Classe legen, der eine durch OX gehende Doppelebene hat. Wenn insbesondere der Punct auf der Doppelaxe der Complex-Fläche angenommen wird, so wird dieselbe auch eine Doppellinie des Berührungskegels vierter Classe, das heisst eine durch den Mittelpunct desselben gehende gerade Linie, welche von unendlich vielen Tangential-Ebenen umhüllt wird. Dadurch reducirt sich der Kegel auf die zweite Classe, indem er ein Complex-Kegel wird.

Wenn wir die in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate in Verbindung bringen, so gelangen wir zu der Folgerung, dass die Coordinaten-Axe OX zugleich ein Doppelstrahl und eine Doppelaxe derselben Meridianfläche ist. Wir können also von der Doppellinie der Meridianfläche sprechen und dieselbe einmal als Doppelstrahl, das andere Mal als Doppelaxe auffassen.

§ 5.

Aequatorialflächen, von Cylinderflächen des Complexes umhüllt, deren Seiten einer festen Ebene parallel sind.

180. In die Reihe der Complex-Kegel, welche eine Meridianfläche umhüllen, gehört ein Cylinder, dessen Mittelpunct auf der Doppellinie derselben unendlich weit liegt. Es gibt unendlich viele solcher Cylinderflächen. Jeder gegebenen Richtung sind die Seiten eines solchen Cylinders so wie die Axe desselben parallel. Es ist augenscheinlich, dass nicht irgend zwei Cylinder eine gemeinsame Seite haben, dass alle Seiten aller Cylinder den Inbegriff aller Linien des Complexes bilden. Wir können die Cylinder zu Gruppen von je unendlich vielen zusammennehmen, deren Axen einer gegebenen Ebene parallel sind. Dann umhüllen solche Cylinder eine Fläche. Zur leichtern Uebersicht eines Complexes können wir also auch die unendlich vielen (∞^3) Linien desselben zu unendlich vielen (∞^2) Gruppen verbinden, deren jede aus den Seiten eines Cylinders besteht, und wiederum statt der unendlich vielen