$$\left.\begin{aligned} Dw^2 - 2Svw + Bv^2 + 2Tuw - 2Guv + Cu^2 &= 0, \\ Ew^2 - 2Utw + Ct^2 + 2Pvw - 2Htv + Av^2 &= 0, \\ Fw^2 - 2Ouw + Au^2 + 2Rtw - 2Jtu + Bt^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

§ 3.

Meridianflächen, beschrieben von einer Complex-Curve, deren Ebene um eine feste gerade Linie sich dreht.

167. Die Aequatorialflächen, welche Gegenstand der Untersuchung des vorigen Paragraphen waren, sind der geometrische Ort solcher Curven, die in parallelen Ebenen von Linien des Complexes umhüllt werden, oder, mit anderen Worten, deren Ebenen sich in einer unendlich weit entfernten geraden Linie schneiden. Sie sind als eine Particularisation solcher Complex-Flächen zu betrachten, welche der geometrische Ort für Complex-Curven sind, deren Ebenen durch eine feste Axe gehen. Wir wollen derartige Complex-Flächen als Meridianflächen bezeichnen, indem wir zugleich die Complex-Curven, welche eine Meridianfläche bilden, Meridian-Curven, die Ebenen, in welchen sie liegen, Meridian-Ebenen nennen.

Die Bestimmung der Meridianflächen knüpft sich an dieselbe Gleichung:

$$\begin{aligned} &(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w^2 \\ &- 2(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)vw \\ &+ (Au'^2 + Bt'^2 + Fw'^2 - 2Jt'u' - 2Qu'w' + 2Rt'w')v^2 \\ &- 2(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w' + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')uw \\ &- 2(Au'v' + Gt'^2 - Ht'u' - Jt'v' - Kw'^2 - Ot'w' + Pu'w' - Qv'w')uv \\ &+ (Av'^2 + Ct'^2 + Ew'^2 - 2Ht'v' + 2Pv'w' - 2Ut'w')u^2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

durch welche wir im vorigen Paragraphen die Aequatorialfläche bestimmt haben.

168. Bei der willkürlichen Annahme des Coordinaten-Systems können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, für die feste Axe, um welche die Ebene der Complex-Curve sich dreht, eine der drei Coordinaten-Axen nehmen. Wählen wir für dieselbe die Axe OZ, so müssen wir in der vorstehenden Gleichung v' und w' gleich Null setzen. Dieselbe geht alsdann in die folgende über:

$$\begin{aligned} &(Dt'^2 + Eu'^2 + 2Mt'u')w^2 + 2((N-O)t'u' + Pu'^2 - St'^2)vw + (Au'^2 + Bt'^2 - 2Jt'u')v^2 \\ &+ 2(Tt' + Uu')t' \cdot uw - 2(Gt' - Hu')t'uv + Ct'^2u^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Lage der Meridian-Ebene ist durch $\frac{t'}{u'}$ bestimmt; wir können sie, wenn y und x zwei der drei Coordinaten irgend eines beliebigen Punctes der Ebene sind, in gleicher Weise durch:

$$\frac{y}{x} = -\frac{t'}{u'}$$

bestimmen. Die letzte Gleichung wird hiernach die folgende, wenn wir zugleich nach den Potenzen von x und y ordnen:

$$\begin{gathered}(Ex^2 - 2Mxy + Dy^2)w^2 + 2(Px^2 - (N-O)xy - Sy^2)vw + (Ax^2 + 2Jxy + By^2)v^2 \\ - 2(Ux - Ty)y \cdot uw - 2(Hx + Gy)y \cdot uv + Cy^2u^2 = 0. \qquad (10)\end{gathered}$$

Diese Gleichung geht, wenn wir die Axen OZ und OY mit einander vertauschen, nach den Vertauschungsregeln des ersten Paragraphen in die folgende über:

$$\begin{gathered}(Fx^2 - 2Lxz + Dz^2)w^2 - 2(Qx^2 - Nxz - Tz^2)uw + (Ax^2 + 2Hxz + Cz^2)u^2 \\ + 2(Rx - Sz)z \cdot vw - 2(Jx + Gz)z \cdot uv + Bz^2 \cdot v^2 = 0, \qquad (11)\end{gathered}$$

und diese Gleichung wiederum, wenn wir die beiden Axen OY und OX mit einander vertauschen, in die folgende:

$$\begin{gathered}(Fy^2 - 2Kyz + Ez^2)w^2 + 2(Ry^2 - Oyz - Uz^2)tw + (By^2 + 2Gyz + Cz^2)t^2 \\ - 2(Qy - Pz)z \cdot vw - 2(Jy + Hz)z \cdot tv + Az^2 \cdot v^2 = 0. \qquad (12)\end{gathered}$$

Die Gleichung (11) stellt die Projection auf YZ derjenigen Complex-Curven dar, deren Ebenen durch OY gehen, die Gleichung (12) die Projection auf XZ derjenigen Complex-Curven, deren Ebenen durch OX gehen. Wir wollen die letztere als die allgemeine Gleichung der Meridianflächen in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten ansehen.

Sie enthält, wie die allgemeine Gleichung der Aequatorialflächen (3), dreizehn von einander unabhängige Constante. Während aber, im Falle der Aequatorialflächen, das Coordinaten-System nur insofern von der Fläche abhängt, als die Richtung der Coordinaten-Ebene YZ durch dieselbe gegeben ist, wird hier durch die Meridianfläche die Axe OX bestimmt. Eine Meridianfläche hängt also, ausser von den dreizehn obigen Constanten, noch von vier neuen Constanten, im Ganzen also von siebenzehn Constanten ab.

169. Wir wollen der folgenden Discussion die letzte Gleichung zu Grunde legen.

Wenn wir den Winkel, welchen eine beliebige der Meridian-Ebenen mit XZ bildet, φ nennen, so ist:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{z} \cdot$$

Wir erhalten also die Gleichung der Projection der bezüglichen Meridian-Curve auf XZ, wenn wir in der letzten Gleichung für die Coordinaten

$$y \text{ und } z$$

die trigonometrischen Functionen

$$\sin\varphi \quad \text{und} \quad \cos\varphi$$

einsetzen. Dadurch geht dieselbe in die folgende über:

$$\begin{aligned}&(F\sin^2\varphi - 2K\sin\varphi\cos\varphi + E\cos^2\varphi)w^2\\&+2(R\sin^2\varphi - O\sin\varphi\cos\varphi - U\cos^2\varphi)tw\\&+(B\sin^2\varphi + 2G\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi)t^2\\&-2(Q\sin\varphi - P\cos\varphi)\cos\varphi\cdot vw - 2(J\sin\varphi + H\cos\varphi)\cos\varphi\cdot tv + A\cos^2\varphi\cdot v^2 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

und, wenn wir durch $\cos^2\varphi$ dividiren, kommt:

$$\begin{aligned}&(F\operatorname{tang}^2\varphi - 2K\operatorname{tang}\varphi + E)w^2\\&+2(R\operatorname{tang}^2\varphi - O\operatorname{tang}\varphi - U)tw\\&+(B\operatorname{tang}^2\varphi + 2G\operatorname{tang}\varphi + C)t^2\\&-2(Q\operatorname{tang}\varphi - P)vw - 2(J\operatorname{tang}\varphi + H)tv + Av^2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Wenn wir endlich die Coordinaten-Ebene XZ um OX durch einen Winkel φ drehen, so dass sie, nach der Drehung, in der neuen Lage XZ' mit der bezüglichen Meridian-Ebene zusammenfällt, so bleibt in der neuen Coordinaten-Bestimmung $\frac{t}{w}$ unverändert, während wir für $\frac{v}{w}\cdot\cos\varphi$ erhalten $\frac{v}{w}$, das auf OZ' als gewöhnliche Linien-Coordinate zu construiren ist. Um hiernach die Gleichung der Meridian-Curve in ihrer eigenen Ebene zu erhalten, haben wir in der Gleichung (13) v statt $v\cdot\cos\varphi$ zu schreiben, wonach dieselbe in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned}&(F\sin^2\varphi - 2K\sin\varphi\cos\varphi + E\cos^2\varphi)w^2\\&+2(R\sin^2\varphi - O\sin\varphi\cos\varphi - U\cos^2\varphi)tw\\&+(B\sin^2\varphi + 2G\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi)t^2\\&-2(Q\sin\varphi - P\cos\varphi)vw - 2(J\sin\varphi + H\cos\varphi)tv + Av^2 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Wenn wir φ als veränderlich betrachten, so stellen die letzten Gleichungen den Inbegriff aller Meridian-Curven dar, mit anderen Worten die Meridianfläche selbst.

In dem Falle der Gleichungen (13) und (14) geschieht dieses in der Weise, dass, nachdem, durch die Annahme der Meridian-Ebene, φ einen bestimmten Werth erhalten hat, diese Gleichungen die Projection der Meridian-Curve auf XZ in Linien-Coordinaten t, v, w darstellen, wonach diese Curve selbst gegeben ist. Durch die letzte Gleichung (15) wird dieselbe Curve, nach Annahme von φ, in ihrer eigenen Ebene dargestellt. Dreht sich die Meridian-Ebene um OX, so ändert sich in ihr, abhängig von φ, die Meridian-Curve, welche die Meridianfläche erzeugt. In jeder ihrer Lagen ist sie bezogen auf die unverändert gebliebene Axe OX und eine veränderliche Axe OZ', die, mit und in der Meridian-Ebene, welche sie enthält, um OX sich dreht.

Wir sind somit zu einer analytischen Darstellung und Construction der Meridianflächen gelangt, welche der Darstellung und Construction der Aequatorialflächen ganz analog ist.

170. Die Gleichung des Poles der Axe OX in Beziehung auf die Curve zweiter Classe, welche, dem jedesmaligen Werthe von φ entsprechend, durch die Gleichung (14) dargestellt wird, ist die folgende:

$$(Q \operatorname{tang} \varphi - P)w + (J \operatorname{tang} \varphi + H)t - Av = 0.$$

Diese Curve (14) ist die Projection auf XZ der bezüglichen Meridian-Curve und also der fragliche Pol zugleich die Projection des Poles der Axe OX in Beziehung auf die Meridian-Curve selbst. Es sind also zwei der drei Coordinaten dieses Punctes:

$$x = \frac{J \operatorname{tang} \varphi + H}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}, \qquad z = \frac{-A}{Q \operatorname{tang} \varphi - P},$$

und die dritte ist:

$$y = z \cdot \operatorname{tang} \varphi = \frac{-A \operatorname{tang} \varphi}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}.$$

Zur Bestimmung des geometrischen Ortes der Pole von OX in Beziehung auf die verschiedenen Meridian-Curven haben wir φ zwischen den vorstehenden drei Gleichungen zu eliminiren. Setzen wir zu diesem Ende für tang φ seinen Werth $\frac{y}{z}$ in die zweite Gleichung, so kommt:

$$Qy - Pz + A = 0. \tag{16}$$

Die erste Gleichung gibt:

$$x = \frac{Jy + Hz}{Qy - Pz} = -\frac{Jy + Hz}{A},$$

woraus folgt:

$$Ax + Jy + Hz = 0. \tag{17}$$

Wir sind sonach zu dem folgenden Resultate gelangt:

Wenn eine Ebene um eine in ihr liegende feste Axe sich dreht, so ist der geometrische Ort der Pole dieser festen Axe in

Beziehung auf alle Complex-Curven, welche die Ebene während ihrer Umdrehung enthält, eine gerade Linie.

Wir wollen diese gerade Linie die Polare der Meridianfläche nennen.

171. Die vorstehende Gleichung (15) ist wiederum als die Gleichung der Complex-Fläche in gemischten Coordinaten anzusehen. Denn tang φ ist als eine dreier linearer Coordinaten $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{1}{z}$ eines Punctes (x, y, z) zu betrachten, während t, v, w Linien-Coordinaten in der Ebene bedeuten.

Um die in Rede stehende Meridianfläche in Punct-Coordinaten x, y, z darzustellen, gehen wir zu der mit (15) gleichbedeutenden Gleichung (12) zurück. Wir brauchen bloss statt der Linien-Coordinaten t, v, w, in welchen diese Gleichung die Projectionen der Meridian-Curven auf YZ in dieser Ebene ausdrückt, die beiden Punct-Coordinaten x und z einzuführen. Die bekannten Transformationen (Nr. 165. Note), auf den vorliegenden Fall angewandt, geben, wenn wir zugleich durch z^2 dividiren, die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[(Ry^2 - Oyz - Uz^2)^2 - (Fy^2 - 2Kyz + Ez^2)(By^2 + 2Gyz + Cz^2)] \\
&- 2[(Jy + Hz)(Fy^2 - 2Kyz + Ez^2) - (Qy - Pz)(Ry^2 - Oyz - Uz^2)]x \\
&+ [(Qy - Pz)^2 - A(Fy^2 - 2Kyz + Ez^2)]x^2 \\
&- 2[(Qy - Pz)(By^2 + 2Gyz + Cz^2) - (Jy + Hz)(Ry^2 - Oyz - Uz^2)] \\
&+ 2[A(Ry^2 - Oyz - Uz^2) - (Qy - Pz)(Jy + Hz)]x \\
&+ [(Jy + Hz)^2 - A(By^2 + 2Gyz + Cz^2)] = 0. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Die Meridianflächen sind also, wie die Aequatorialflächen, von der vierten Ordnung.

172. Jede durch die Axe OX gehende gerade Linie schneidet die Fläche in vier Puncten, von welchen zwei auf dieser Axe zusammenfallen. Die Axe ist also ein Doppelstrahl der Meridianfläche. Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche in einer Curve vierter Ordnung, die auf dem Doppelstrahl derselben einen Doppelpunct hat. Dieser Punct rückt unendlich weit, wenn die schneidende Ebene dem Doppelstrahl parallel wird. Geht die Ebene durch den Doppelstrahl, so wird dieser auch eine Doppellinie der Durchschnitts-Curve. In Folge davon reducirt sich diese auf die zweite Ordnung, indem sie eine Complex-Curve wird.