$$
\begin{aligned}
&+ 2(G\sin\alpha' + H\cos\alpha')\pi\omega - 2(H\cos\alpha + G\sin\alpha)\varkappa\omega \\
&- 2\big(J(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) + A\cos\alpha\cos\alpha' + B\sin\alpha\sin\alpha'\big)\pi\varkappa \\
&- 2(N\sin\alpha'\cos\alpha - O\sin\alpha\cos\alpha' - P\cos\alpha\cos\alpha' + S\sin\alpha\sin\alpha')p\varkappa \\
&+ 2(O\sin\alpha'\cos\alpha - N\sin\alpha\cos\alpha' + P\sin\alpha\sin\alpha' - S\cos\alpha\cos\alpha')q\pi \\
&+ 2(S\sin^2\alpha' + (N-O)\sin\alpha'\cos\alpha' - P\cos^2\alpha')p\pi + 2(T\sin\alpha' - U\cos\alpha')p\omega \\
&+ 2(U\cos\alpha - T\sin\alpha)q\omega - 2(P\cos^2\alpha - (N-O)\sin\alpha\cos\alpha - S\sin^2\alpha)p\varkappa \\
&- 2(Q\cos\alpha + R\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot\varkappa + 2(R\sin\alpha' + Q\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot\pi = 0. \qquad \text{(IX)}
\end{aligned}
$$

§ 2.

Aequatorialflächen, beschrieben von einer Complex-Curve, deren Ebene parallel mit sich selbst fortrückt.

160. Bei der grossen Complication eines Complexes des zweiten Grades müssen wir darauf Bedacht nehmen, dass wir die Uebersicht erleichtern und dadurch der Anschauung zu Hülfe kommen. Hierzu ist uns ein Mittel in den beiden Sätzen geboten, welche wir in dem vorigen Paragraphen bereits als den unmittelbaren geometrischen Ausdruck der Gleichungen (II) und (IV), die, in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung, die Complexe des zweiten Grades darstellen, gegeben haben. Indem wir einerseits nämlich die unendlich vielen Linien des Complexes, welche in derselben Ebene liegen, in eine einzige Gruppe zusammenfassen, können wir, statt derselben, die von ihnen umhüllte Curve zweiter Classe einführen. Indem wir andererseits die unendlich vielen Linien des Complexes, welche durch denselben Punct gehen, zu einer Gruppe vereinigen, können wir, statt derselben, in analoger Weise diejenige Kegelfläche zweiter Ordnung einführen, welche von ihnen gebildet wird.

Dann brauchen wir einerseits, weil überhaupt alle Linien des Raumes mit einem gegebenen Puncte in einer Ebene liegen, um alle Linien des Complexes zu umfassen, nur diejenigen Complex-Curven in Betracht zu ziehen, deren Ebenen durch den gegebenen Punct gehen; andererseits erhalten wir, da alle Linien des Raumes eine gegebene Ebene schneiden, alle Linien des Complexes, wenn wir nur diejenigen Kegel in Betracht ziehen, deren Mittelpuncte in der gegebenen Ebene liegen. So treten an die Stelle von unendlich vielen (∞^3) Complex-Linien, unendlich viele (∞^2) Complex-Curven, bezüglich unendlich viele (∞^2) Complex-Kegel.

161. Wir können einen Schritt weiter thun. Wenn eine Ebene sich bewegt, so beschreibt die in ihr von Linien des Complexes umhüllte, veränderliche Curve zweiter Classe eine Fläche; wenn ein Punct sich bewegt, so wird eine Fläche von dem veränderlichen Complex-Kegel, der diesen Punct zum Mittelpuncte hat, umhüllt. In der Bestimmung des Complexes vertreten diese Flächen unendlich viele (∞) Complex-Curven, bezüglich unendlich viele (∞) Complex-Kegel. Die einfachsten Flächen dieser Art entsprechen einerseits dem Falle, dass die Ebene der beschreibenden Curve um eine feste Axe sich dreht oder parallel mit sich selbst fortrückt, und andererseits dem Falle, dass der Mittelpunct des umhüllenden Kegels eine feste gerade Linie beschreibt, oder, wenn diese feste Linie unendlich weit rückt, dass die Kegel in umhüllende Cylinder ausarten, deren Axen einer gegebenen Ebene parallel sind.

Die so bestimmten Flächen wollen wir überhaupt Complex-Flächen nennen.

Indem wir diese Complex-Flächen einführen, können wir die unendlich vielen (∞^3) Complex-Linien durch unendlich viele (∞) solcher Complex-Flächen ersetzen, deren feste Axen in einer gegebenen Ebene liegen und in einem gegebenen Puncte dieser Ebene sich schneiden.

Die angegebenen Erzeugungen der Complex-Flächen wollen wir nach einander einer analytischen Discussion unterwerfen.

162. Wir wollen von der allgemeinen Gleichung:

$$\begin{aligned}
&D(t-t')^2 + E(u-u')^2 + F(v-v')^2\\
&+ A(uv'-u'v)^2 + B(t'v-tv')^2 + C(tu'+t'u)^2\\
&+ 2K(u-u')(v-v') + 2L(t-t')(v-v') + 2M(t-t')(u-u')\\
&+ 2G(tu'-t'u)(t'v-tv') + 2H(tu'-t'u)(uv'-u'v) + 2J(t'v-tv')(uv'-u'v)\\
&+ 2N(t-t')(uv'-u'v) + 2O(u-u')(t'v-tv')\\
&+ 2S(t-t')(t'v-tv') + 2T(t-t')(tu'-t'u)\\
&+ 2U(u-u')(tu'-t'u) + 2P(u-u')(uv'-u'v)\\
&+ 2Q(v-v')(uv'-u'v) + 2R(v-v')(t'v-tv') = 0, \qquad \text{(IV)}
\end{aligned}$$

welche den Complex zweiten Grades in Axen-Coordinaten darstellt, ausgehen. Betrachten wir in dieser Gleichung t', u', v' als constant, so stellt dieselbe eine Curve zweiter Classe im Raume dar, welche von allen denjenigen Ebenen berührt wird, deren Coordinaten t, u, v die Gleichung befriedigen. Diese Curve liegt in der Ebene (t', u', v') und wird in derselben von Linien des Complexes umhüllt.

Die Projection dieser Curve auf eine der drei Coordinaten Ebenen YZ, XZ, XY ergibt sich unmittelbar, wenn wir bezüglich t, u, v gleich Null setzen. Auf diese Weise erhalten wir, wenn wir nur die Projection auf YZ berücksichtigen und zugleich die Gleichung durch Einführung von w und w' homogen machen:

$$\begin{aligned}
&(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w^2 \\
&- 2(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)vw \\
&+ (Au'^2 + Bt'^2 + Fw'^2 - 2Jt'u' - 2Qu'w' + 2Rt'w')v^2 \\
&- 2(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w' + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')uw \\
&- 2(Au'v' + Gt'^2 - Ht'u' - Jt'v' - Kw'^2 - Ot'w' + Pu'w' - Qv'w')uv \\
&+ (Av'^2 + Ct'^2 + Ew'^2 - 2Ht'v' + 2Pv'w' - 2Ut'w')u^2 = 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

163. Wenn wir in der vorstehenden Gleichung t', u', v' constant nehmen und w' sich verändern lassen, so rückt die Ebene (t', u', v', w'), welche die Complex-Curve enthält, parallel mit sich selbst fort. Machen wir insbesondere die Voraussetzung, dass diese Ebene mit YZ parallel ist, so kommt:

$$u' = 0, \qquad v' = 0, \qquad \frac{w'}{t'} = -x',$$

wobei x' den Abstand der jedesmaligen Ebene der Complex-Curve von YZ bedeutet. Die Gleichung (1) verwandelt sich hiernach, wenn wir zugleich durch t'^2 dividiren, in die folgende: .

$$\begin{aligned}
&Dw^2 + 2(Lx' - S)vw + (Fx'^2 - 2Rx' + B)v^2 \\
&+ 2(Mx' + T)uw + 2(Kx'^2 - Ox' - G)uv + (Ex'^2 + 2Ux' + C)u^2 = 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung gibt, nachdem der Abstand x' einer mit YZ parallelen Ebene bestimmt worden ist, in gewöhnlichen Linien-Coordinaten u, v, w die Projection der in dieser Ebene liegenden Complex-Curve auf YZ, oder auch diese Curve selbst in ihrer eigenen Ebene, wenn wir die Coordinaten-Ebene YZ parallel mit sich selbst so verschieben, dass sie mit der Ebene der jedesmaligen Complex-Curve zusammenfällt. Wenn wir hiernach auch x' als veränderlich betrachten und demnach die Accente fortlassen, so stellt dieselbe Gleichung:

$$\begin{aligned}
&Dw^2 + 2(Lx - S)vw + 2(Fx^2 - 2Rx + B)v^2 \\
&+ 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten x, u, v, w den Inbegriff aller Complex-Curven dar, deren Ebenen mit YZ parallel sind.

Complex-Curven in Ebenen, die unter einander parallel sind, bilden eine

Complex-Fläche, die wir eine Aequatorialfläche nennen wollen, während die einzelnen Complex-Curven Breiten-Curven heissen mögen.

Die Gleichung (3) schliesst dreizehn von einander unabhängige Constanten ein. Da die Coordinaten-Bestimmung in keiner weiteren Beziehung zu der Aequatorialfläche steht, als dass die Richtung der Coordinaten-Ebene YZ eine ausgezeichnete ist, so hängt die Aequatorialfläche im Ganzen von fünfzehn Constanten ab.

164. In bekannter Weise erhalten wir die Bestimmung des Mittelpunctes der durch ihre Gleichung in Linien-Coordinaten dargestellten Breiten-Curve in einer durch x' bestimmten Ebene. Die Coordinaten dieses Punctes sind:

$$z = \frac{Lx' - S}{D}, \qquad y = \frac{Mx' + T}{D}, \tag{4}$$

und darnach ergibt sich, wenn wir die Accente fortlassen:

$$\left.\begin{aligned} Dz - Lx + S = 0, \\ Dy - Mx - T = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Indem wir x als veränderlich betrachten, stellen diese beiden Gleichungen eine gerade Linie dar, und diese gerade Linie ist der geometrische Ort für die Mittelpuncte der Complex-Curven, welche die Aequatorialfläche bilden. Wir wollen diese gerade Linie den Durchmesser der Aequatorialfläche und die Ebenen der Breiten-Curven zugeordnete Ebenen dieses Durchmessers nennen.

Jedem Systeme paralleler Ebenen entspricht im Complexe eine Aequatorialfläche mit einem Durchmesser, der die parallelen Ebenen zu seinen zugeordneten hat.

165. Die Gleichung (3) gibt jede der Breiten-Curven in ihrer Ebene, nachdem diese Ebene durch den Werth von x bestimmt worden ist, in Linien-Coordinaten u, v, w. Wir können aber auch dieselbe Curve in ihrer Ebene durch die gewöhnlichen Punct-Coordinaten y und z darstellen. Dann finden wir für ihre Gleichung in bekannter Weise:*)

---

*) Wenn derselbe Kegelschnitt in der Ebene YZ einmal vermittelst Punct-Coordinaten y, z, das andere Mal vermittelst Linien-Coordinaten u, v, w durch die beiden Gleichungen:

$$ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dy + 2ez + f = 0,$$
$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = 0$$

dargestellt wird, so können wir die Constanten der einen Gleichung durch die Constanten der anderen auf folgende Weise bestimmen:

$$\begin{aligned}
&[(Lx-S)^2 - D(Fx^2-2Rx+B)]y^2\\
&+2[D(Kx^2-Ox-G)-(Lx-S)(Mx+T)]yz\\
&+[(Mx+T)^2 - D(Ex^2-2Ux+C)]z^2\\
&+2[(Mx+T)(Fx^2-2Rx+B)-(Lx-S)(Kx^2-Ox-G)]y\\
&+2[(Lx-S)(Ex^2-2Ux+C)-(Mx+T)(Kx^2-Ox-G)]z\\
&+[(Kx^2-Ox-G)^2-(Fx^2-2Rx+B)(Ex^2-2Ux+C)]=0. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Wenn wir in dieser Gleichung nicht nur y und z, sondern auch x als veränderlich betrachten, so stellt sie, in gewöhnlichen Punct-Coordinaten, die Aequatorialfläche dar.

Die Aequatorialflächen sind also Flächen der vierten Ordnung. Sie werden von den ihrem Durchmesser conjugirten Ebenen in Curven zweiter Ordnung geschnitten, weil in diesen Ebenen unendlich weit ein Doppelstrahl der Fläche liegt.

166. Wir erhalten die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&Dw^2+2(Lx-S)vw+(Fx^2-2Rx+B)v^2\\
&+2(Mx+T)uw+2(Kx^2-Ox-G)uv+(Ex^2+2Ux+C)u^2=0,\\
&Ew^2+2(My-U)tw+(Dy^2-2Ty+C)t^2\\
&+2(Ky+P)vw+2(Ly^2+Ny-H)tv+(Fy^2+2Qy+A)v^2=0,\\
&Fw^2+2(Kz-Q)uw+(Ez^2-2Pz+A)u^2\\
&+2(Lz+R)tw+2(Mz^2-(N-O)z-J)tu+(Dz^2+2Sz+B)t^2=0
\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

für die Gleichungen derjenigen Aequatorialflächen, deren Breiten-Curven bezüglich YZ, XZ, XY parallel sind, in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten. Die erste der vorstehenden drei Gleichungen ist die Gleichung (3) der 163. Nummer und aus ihr sind die beiden anderen nach den Vertauschungsregeln der 155. Nummer abgeleitet. Sie stellen, wenn wir für die drei Veränderlichen x, y, z nach einander alle möglichen Werthe einsetzen, die einzelnen Breiten-Curven in ihren Ebenen dar. Setzen wir insbesondere x, y, z gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen der drei Complex-Curven in den drei Coordinaten-Ebenen:

$$\begin{aligned}
a &= B^2-AC, & A &= b^2-ac,\\
b &= AE-BD, & B &= ae-bd,\\
c &= D^2-AF, & C &= d^2-af,\\
d &= CD-BE, & D &= cd-be,\\
e &= BF-DE, & E &= bf-de,\\
f &= E^2-CF, & F &= e^2-cf.
\end{aligned}$$

Ich entnehme diese Ausdrücke dem 2. Bande der „Entwicklungen“, Nr. 484. und Nr. 552.

$$\left.\begin{aligned} Dw^2 - 2Svw + Bv^2 + 2Tuw - 2Guv + Cu^2 &= 0, \\ Ew^2 - 2Utw + Ct^2 + 2Pvw - 2Htv + Av^2 &= 0, \\ Fw^2 - 2Ouw + Au^2 + 2Rtw - 2Jtu + Bt^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

§ 3.

Meridianflächen, beschrieben von einer Complex-Curve, deren Ebene um eine feste gerade Linie sich dreht.

167. Die Aequatorialflächen, welche Gegenstand der Untersuchung des vorigen Paragraphen waren, sind der geometrische Ort solcher Curven, die in parallelen Ebenen von Linien des Complexes umhüllt werden, oder, mit anderen Worten, deren Ebenen sich in einer unendlich weit entfernten geraden Linie schneiden. Sie sind als eine Particularisation solcher Complex-Flächen zu betrachten, welche der geometrische Ort für Complex-Curven sind, deren Ebenen durch eine feste Axe gehen. Wir wollen derartige Complex-Flächen als Meridianflächen bezeichnen, indem wir zugleich die Complex-Curven, welche eine Meridianfläche bilden, Meridian-Curven, die Ebenen, in welchen sie liegen, Meridian-Ebenen nennen.

Die Bestimmung der Meridianflächen knüpft sich an dieselbe Gleichung:

$$\begin{aligned} &(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w^2 \\ &- 2(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)vw \\ &+ (Au'^2 + Bt'^2 + Fw'^2 - 2Jt'u' - 2Qu'w' + 2Rt'w')v^2 \\ &- 2(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w' + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')uw \\ &- 2(Au'v' + Gt'^2 - Ht'u' - Jt'v' - Kw'^2 - Ot'w' + Pu'w' - Qv'w')uv \\ &+ (Av'^2 + Ct'^2 + Ew'^2 - 2Ht'v' + 2Pv'w' - 2Ut'w')u^2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

durch welche wir im vorigen Paragraphen die Aequatorialfläche bestimmt haben.

168. Bei der willkürlichen Annahme des Coordinaten-Systems können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, für die feste Axe, um welche die Ebene der Complex-Curve sich dreht, eine der drei Coordinaten-Axen nehmen. Wählen wir für dieselbe die Axe OZ, so müssen wir in der vorstehenden Gleichung v' und w' gleich Null setzen. Dieselbe geht alsdann in die folgende über:

$$\begin{aligned} &(Dt'^2 + Eu'^2 + 2Mt'u')w^2 + 2((N-O)t'u' + Pu'^2 - St'^2)vw + (Au'^2 + Bt'^2 - 2Jt'u')v^2 \\ &+ 2(Tt' + Uu')t' \cdot uw - 2(Gt' - Hu')t'uv + Ct'^2u^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$