Die Complexe des zweiten Grades.

Abschnitt I.

Zwiefache analytische Darstellung eines Complexes des zweiten Grades. Complex-Curven zweiter Classe, von Linien des Complexes umhüllt; Complex-Kegel zweiter Ordnung, von Linien desselben beschrieben. Complex-Flächen vierter Ordnung und Classe, einerseits von Complex-Curven beschrieben, andererseits von Complex-Kegeln umhüllt.

§ 1.

Die allgemeine Gleichung der Linien-Complexe des zweiten Grades in Strahlen- und Axen-Coordinaten.

149. Von den vier Strahlen-Coordinaten:

$$r, \; s, \; \varrho, \; \sigma$$

bedeuten r und s die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die beiden Projectionen des Strahles in den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ mit der Coordinaten-Axe OZ bilden, ϱ und σ die Segmente, welche diese beiden Projectionen von den Coordinaten-Axen OX und OY abschneiden. Daraus ist die fünfte Strahlen-Coordinate:

$$\eta \equiv r\sigma - s\varrho$$

abgeleitet.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen den fünf Coordinaten sei die folgende:

$$\begin{aligned} & Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ & + 2Gs + 2Hr + 2Jrs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ & - 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ & + 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0.^{*}) \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

*) Dieselben Rücksichten, die uns bestimmten, in der allgemeinen Gleichung der Complexe

Diese Gleichung enthält **neunzehn** von einander unabhängige Constante. Es ist unnöthig, ein letztes Glied $+ 2V\eta$ hinzuzufügen: das würde darauf hinauskommen, die absoluten Werthe der Constanten N und O um V zu vermindern. Durch Einführung eines solchen überzähligen Gliedes würde die Symmetrie im Allgemeinen zwar gewinnen; allein es ist nicht räthlich, bei speciellen Untersuchungen ein derartiges Glied beizubehalten, um so weniger, als wir es eintretenden Falles ohne Weiteres hinzufügen können.

150. Von dieser allgemeinen Gleichung können wir sogleich zu der folgenden übergehen, in welcher x', y', z' und x, y, z als die Coordinaten irgend zweier Puncte einer Linie des Complexes auftreten:*)

$$\begin{aligned}
&A(x-x')^2 + B(y-y')^2 + C(z-z')^2 \\
&+ D(yz'-y'z)^2 + E(x'z-xz')^2 + F(xy'-x'y)^2 \\
&+ 2G(y-y')(z-z') + 2H(x-x')(z-z') + 2J(x-x')(y-y') \\
&+ 2K(xy'-x'y)(x'z-xz') + 2L(xy'-x'y)(yz'-y'z) + 2M(x'z-xz')(yz'-y'z) \\
&+ 2N(x-x')(yz'-y'z) + 2O(y-y')(x'z-xz') \\
&+ 2P(x-x')(x'z-xz') + 2Q(x-x')(xy'-x'y) \\
&+ 2R(y-y')(xy'-x'y) + 2S(y-y')(yz'-y'z) \\
&+ 2T(z-z')(yz'-y'z) + 2U(z-z')(x'z-xz') = 0.^{**)} \qquad \text{(II)}
\end{aligned}$$

Diese allgemeine Complex-Gleichung wird, indem wir x', y', z' als die Coordinaten irgend eines festen Punctes betrachten und demnach constant nehmen, während wir x, y, z veränderlich lassen, die Gleichung **einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Diese Kegelfläche hat den festen Punct zu ihrem Mittelpuncte, und ihre Seiten sind diejenigen Lini'en des Complexes, welche durch den festen Punct gehen.**

151. Von den vier Axen-Coordinaten:

$$p, \ q, \ \pi, \ \varkappa$$

bedeuten die beiden letzten π und $\varkappa$, reciprok und negativ genommen, das

---

ersten Grades zwischen fünf Strahlen- oder Axen-Coordinaten bezüglich die Coefficienten von σ und $\varkappa$ mit negativen Vorzeichen zu nehmen (vergleiche die Note zur 26. Nummer), veranlassen uns, in den entsprechenden Gleichungen der Complexe zweiten Grades dasselbe zu thun.

*) Einleitende Betrachtungen Nr. 2.

**) Den beiden Gliedern:

$$2N(x-x')(yz'-y'z) + 2O(y-y')(x'z-xz')$$

würde sich das überzählige Glied:

$$2V\eta \equiv 2V(z-z')(xy'-x'y)$$

anschliessen. Dann aber liessen sich die drei Glieder in die folgenden beiden:

$$2(N-V)(x-x')(yz'-y'z) + 2(O-V)(y-y')(x'z-xz')$$

zusammenziehen.

x und y derjenigen beiden Puncte, in welchen die bezügliche gerade Linie die Ebene XZ und YZ schneidet. Verbindet man diese beiden Puncte mit dem Anfangspuncte der Coordinaten durch gerade Linien, so bilden diese Linien in den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ mit der Axe OZ zwei Winkel, deren trigonometrische Tangenten, reciprok und negativ genommen, p und q sind. Daraus ist die fünfte Coordinate:

$$\omega = p\varkappa - q\pi$$

abgeleitet.

Die Gleichung desselben Complexes zweiten Grades, den wir oben durch die Gleichung (I) in Strahlen-Coordinaten dargestellt haben, wird unter Anwendung der Axen-Coordinaten die folgende:

$$\begin{gathered} Dp^2 + Eq^2 + F + A\varkappa^2 + B\pi^2 + C\omega^2 \\ + 2Kq + 2Lp + 2Mpq + 2G\pi\omega - 2H\varkappa\omega - 2J\pi\varkappa \\ - 2Np\varkappa + 2Oq\pi \\ + 2Sp\pi + 2Tp\omega + 2Uq\omega - 2Pq\varkappa - 2Q\varkappa + 2R\pi = 0.^{*)} \end{gathered} \tag{III}$$

152. Von dieser allgemeinen Gleichung können wir sogleich zu derjenigen übergehen, in welcher t', u', v' und t, u, v als die Coordinaten irgend zweier Ebenen, welche in der bezüglichen Linie sich schneiden, auftreten:

$$\begin{gathered} D(t-t')^2 \quad + \quad E(u-u')^2 \quad + \quad F(v-v')^2 \\ + A(uv'-u'v)^2 \quad + \quad B(t'v-tv')^2 \quad + \quad C(tu'-t'u)^2 \\ + 2K(u-u')(v-v') + 2L(t-t')(v-v') + 2M(t-t')(u-u') \\ + 2G(tu'-t'u)(t'v-tv') + 2H(tu'-t'u)(uv'-u'v) + 2J(t'v-tv')(uv'-u'v) \\ + 2N(t-t')(uv'-u'v) + 2O(u-u')(t'v-tv') \\ + 2S(t-t')(t'v-tv') + 2T(t-t')(tu'-t'u) \\ + 2U(u-u')(tu'-t'u) + 2P(u-u')(uv'-u'v) \\ + 2Q(v-v')(uv'-u'v) + 2R(v-v')(t'v-tv') = 0.^{**)} \end{gathered} \tag{IV}$$

Die Gleichung (IV), welche die allgemeine Gleichung der Complexe des zweiten Grades ist, stellt, wenn wir t', u', v' auf eine beliebige feste Ebene beziehen und, dem entsprechend, als constant betrachten, eine Curve zweiter Classe dar, welche in der festen Ebene von den in derselben liegenden Linien des Complexes umhüllt wird.

153. Die Vertauschungen von

---

*) Einleit. Betr. Nr. 5.
**) Einleit. Betr. Nr. 3.

$$r,\ s,\ 1,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

und

$$-\varkappa,\ \pi,\ \omega,\ p,\ q,\ 1,$$

so wie die entsprechenden Vertauschungen von:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y)$$

und

$$(uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u),\ (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v'),$$

welche wir machen müssen, um bezüglich die Gleichungen (I) und (III) und die Gleichungen (II) und (IV) aus einander abzuleiten, kommen darauf hinaus, einerseits:

$$r,\ s,\ \sigma,\ \varrho,\ \eta$$

und

$$p,\ q,\ \varkappa,\ \pi,\ \omega$$

andererseits:

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'$$

und

$$t,\ u,\ v,\ t',\ u',\ v',$$

so wie beides Mal:

$$A,\ B,\ C, \qquad G,\ H,\ J, \qquad P,\ Q,\ R$$

und

$$D,\ E,\ F, \qquad K,\ L,\ M, \qquad S,\ T,\ U$$

gegenseitig mit einander zu vertauschen.

154. Die Gleichung (I) wird erst dann symmetrisch, wenn wir sie durch Einführung einer sechsten Veränderlichen, wie diess bereits (Einl. Betr. Nr. 6.) angedeutet ist, homogen machen. Ist h die neue Veränderliche, und behalten wir überdiess die überzählige Constante V bei, so geht (I) über in:

$$\begin{aligned} &Ar^2+Bs^2+Ch^2+D\sigma^2+E\varrho^2+F\eta^2\\ &+2Gsh+2Hrh+2Jrs+2K\varrho\eta-2L\sigma\eta-2M\varrho\sigma\\ &-2Nr\sigma+2Os\varrho+2Vh\eta\\ &+2Pr\varrho+2Qr\eta+2Rs\eta+2Ss\sigma-2Th\sigma+2Uh\varrho=0.^{*)} \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

---

*) Die Einführung von h kommt darauf hinaus, die beiden ersten der drei Projectionen der geraden Linie (r, ϱ, s, σ):

$$x=rz+\varrho, \qquad y=sz+\sigma, \qquad ry=sx+\eta$$

durch die folgenden beiden zu ersetzen:

$$hx=rz+\varrho, \qquad hy=sz+\sigma.$$

Hiernach können wir die gerade Linie in symmetrischer Weise durch die beiden Gleichungen je zweier ihrer drei Projectionen darstellen, durch die letzten beiden, wie durch die folgenden:

155. Einer Vertauschung der drei Coordinaten-Axen unter einander entspricht eine Vertauschung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Complexe zweiten Grades. Wir wollen dabei die Gleichung (II) zu Grunde legen, der Symmetrie wegen aber das Glied:

$$2V'(z-z')(xy'-x'y)$$

hinzufügen, indem wir N und O mit N' und O' vertauschen und

$$N = N' - V', \qquad O = O' - V'$$

setzen. Wenn wir alsdann erstens die beiden Coordinaten-Axen OX und OY mit einander vertauschen, so vertauschen sich gegenseitig $(x-x')$ und $(y-y')$, während $(z-z')$ unverändert bleibt, sowie $(x'z-xz')$ und $-(yz'-y'z)$, während $(xy'-x'y)$ sein Zeichen wechselt. Hiernach werden von der Vertauschung in keiner Weise berührt die Coefficienten:

$$C,\ F,\ J,\ M,$$

während bezüglich

$$A,\ D,\ G,\ K$$

und

$$B,\ E,\ H,\ L$$

ohne Zeichenänderung, mit gleichzeitigem Zeichenwechsel

$$N',\ P,\ R,\ T$$

und

$$O',\ S,\ Q,\ U$$

sich gegenseitig vertauschen und V' sein Zeichen ändert.

In der Gleichung (V) vertauschen sich hiernach gegenseitig:

$$r \text{ und } \varrho$$

bezüglich mit

$$s \text{ und } \sigma,$$

während η sein Zeichen wechselt.

Vertauschen wir zweitens die beiden Axen OX und OZ mit einander, so vertauschen sich in (II) die Ausdrücke $(x-x')$ und $(z-z')$, während $(y-y')$ ungeändert bleibt, ebenso $(yz'-y'z)$ und $-(xy'-x'y)$, während

---

$$sx = ry - \eta, \qquad sz = hy - \sigma,$$

und die folgenden:

$$ry = sx + \eta, \qquad rz = hx - \varrho,$$

wobei die Bedingungs-Gleichung erfüllt wird:

$$r\sigma - s\varrho = h\eta.$$

Es ist wohl kaum nothwendig, zu bemerken, dass, wenn wir $(z-z')$ für h schreiben, die Gleichung (V) in die Gleichung (II) übergeht.

$(x'z - xz')$ sein Zeichen ändert. Dem entsprechend vertauschen sich in (V)

$$r \text{ und } \varrho$$

mit

$$h \text{ und } -\eta,$$

während σ sein Zeichen wechselt. Von der Vertauschung werden hiernach nicht berührt die Coefficienten:

$$B,\ E,\ H,\ L,$$

während sich die Coefficienten

$$A,\ D,\ G,\ K$$

bezüglich mit

$$C,\ F,\ J,\ M$$

ohne Zeichenwechsel, mit gleichzeitiger Zeichenänderung:

$$N',\ P,\ R,\ T$$

bezüglich mit

$$V',\ U,\ S,\ Q$$

vertauschen und O' sein Zeichen wechselt.

Vertauschen wir drittens die beiden Axen OY und OZ mit einander, so vertauschen sich in (II) die Ausdrücke $(y-y')$ und $(z-z')$, so wie $(xy'-x'y)$ und $-(x'z - xz')$ mit einander, während $(x - x')$ unverändert bleibt und $(yz' - y'z)$ sein Zeichen wechselt. In (V) vertauschen sich:

$$s \text{ und } \sigma$$

mit

$$h \text{ und } \eta,$$

während ϱ sein Zeichen ändert. Von der Vertauschung werden hiernach nicht berührt:

$$A,\ D,\ G,\ K,$$

während sich die Coefficienten:

$$B,\ E,\ H,\ L$$

bezüglich mit

$$C,\ F,\ J,\ M$$

ohne Zeichenwechsel, unter gleichzeitigem Zeichenwechsel

$$O',\ P,\ R,\ T$$

bezüglich mit

$$V',\ Q,\ U,\ S$$

vertauschen und N' sein Zeichen wechselt.

Es bleiben noch die Modificationen zu erörtern, welche dann eintreten, wenn wir das überzählige Glied fortfallen lassen.

Setzen wir in der ersten Vertauschung V' gleich Null, so vertauschen sich zugleich mit den Coordinaten-Axen OX und OY die Coefficienten

$$N \text{ und } O$$

unter Zeichenänderung.

Setzen wir in der zweiten Vertauschung O' gleich Null, so kommt $V' = -O$, $N' = N-O$; mit den Coordinaten-Axen OX und OZ vertauschen sich V' und N' unter Zeichenwechsel, oder, was dasselbe ist,

$$O \text{ und } N-O$$

ohne Zeichenänderung.

Endlich vertauschen sich in dem dritten Falle gleichzeitig mit den Coordinaten-Axen OY und OZ unter Zeichenänderung die Coefficienten

$$N \text{ und } N-O.$$

Es ist nicht zu übersehen, dass in allen Gleichungen nach der Vertauschung die Drehungsmomente von OX nach OY, von OY nach OZ, von OZ nach OX genommen sind.

156. Da die Gleichung (III), wenn sie, auf dieselben Coordinaten-Axen bezogen, denselben Complex zweiten Grades darstellen soll, als die Gleichung (I), dieselben Constanten in anderer Reihenfolge enthält, so behalten die in der vorigen Nummer entwickelten Vertauschungs-Regeln auch für die Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten ihre vollständige und unmittelbare Geltung.

157. Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (x_0, y_0, z_0) verlegen, so treten, während r und s unverändert bleiben, an die Stelle von ϱ, σ, η (Einleit. Betr. Nr. 14.) die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{gathered}\varrho + rz_0 - x_0,\\ \sigma + sz_0 - y_0,\\ \eta + sx_0 - ry_0,\end{gathered}$$

wonach die Gleichung (I) in die folgende übergeht:

$$\begin{gathered}(A + Ez_0^2 + Fy_0^2 - 2Ky_0z_0 + 2Pz_0 - 2Qy_0)r^2\\ + (B + Dz_0^2 + Fx_0^2 - 2Lx_0z_0 + 2Rx_0 - 2Sz_0)s^2\\ + (C + Dy_0^2 + Ex_0^2 - 2Mx_0y_0 + 2Ty_0 - 2Ux_0)\\ + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2\\ + 2(G - Dy_0z_0 - Kx_0^2 + Lx_0y_0 + Mx_0z_0 - Ox_0 + Sy_0 - Tz_0)s\\ + 2(H - Ex_0z_0 + Kx_0y_0 - Ly_0^2 + My_0z_0 + Ny_0 - Px_0 + Uz_0)r\\ + 2(J - Fx_0y_0 + Kx_0z_0 + Ly_0z_0 - Mz_0^2 - (N-O)z_0 + Qx_0 - Ry_0)rs\\ + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
-2(N+Kx_0-2Ly_0+Mz_0)r\sigma &+ 2(O+2Kx_0-Ly_0-Mz_0)s\varrho \\
+2(P+Ez_0-Ky_0)r\varrho &+ 2(Q-Fy_0+Kz_0)r\eta \\
+2(R+Fx_0-Lz_0)s\eta &- 2(S-Dz_0+Lx_0)s\sigma \\
-2(T+Dy_0-Mx_0)\sigma &+ 2(U-Ex_0+My_0)\varrho = 0.^{*)} \qquad \text{(VI)}
\end{aligned}
$$

158. Um die Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten auf den neuen Anfangspunct zu beziehen, brauchen wir bloss in der vorstehenden Gleichung dieselben Vertauschungen vorzunehmen, durch welche wir in der 153. Nummer die Complex-Gleichung (III) aus (I) abgeleitet haben. Auf diese Weise ergibt sich unmittelbar:

$$
\begin{aligned}
& Dp^2 + Eq^2 + F \\
&+ (A + Ez_0^2 + Fy_0^2 - 2Ky_0z_0 + 2Pz_0 - 2Qy_0)\varkappa^2 \\
&+ (B + Dz_0^2 + Fx_0^2 - 2Lx_0z_0 + 2Rx_0 - 2Sz_0)\pi^2 \\
&+ (C + Dy_0^2 + Ex_0^2 - 2Mx_0y_0 + 2Ty_0 - 2Ux_0)\omega^2 \\
&+ 2Kq + 2Lp + 2Mpq \\
&+ 2(G - Dy_0z_0 - Kx_0^2 + Lx_0y_0 + Mx_0z_0 - Ox_0 + Sy_0 - Tz_0)\pi\omega \\
&- 2(H - Ex_0z_0 + Kx_0y_0 - Ly_0^2 + My_0z_0 + Ny_0 - Px_0 + Uz_0)\varkappa\omega \\
&- 2(J - Fx_0y_0 + Kx_0z_0 + Ly_0z_0 - Mz_0^2 - (N-O)z_0 + Qx_0 - Ry_0)\pi\varkappa \\
&- 2(N + Kx_0 - 2Ly_0 + Mz_0)p\varkappa + 2(O + 2Kx_0 - Ly_0 - Mz_0)q\pi \\
&+ 2(S - Dz_0 + Lx_0)p\pi + 2(T + Dy_0 - Mx_0)p\omega \\
&+ 2(U - Ex_0 + My_0)q\omega - 2(P + Ez_0 - Ky_0)q\varkappa \\
&- 2(Q - Fy_0 + Kz_0)\varkappa + 2(R + Fx_0 - Lz_0)\pi = 0. \qquad \text{(VII)}
\end{aligned}
$$

159. Wir wollen ferner das Coordinaten-System, auf welches der Complex (I) ursprünglich bezogen war, durch ein anderes ersetzen, dessen Axen sich in dem ursprünglichen Anfangspuncte schneiden, aber beliebig ihre Richtung geändert haben. In den einleitenden Betrachtungen ist diese Coordinaten-Verwandlung auf drei successive Operationen zurückgeführt worden, in welcher jedesmal eine der drei Coordinaten-Axen beibehalten wird, während die beiden anderen in ihrer Ebene beliebig gedreht werden. Wir begnügen uns hier damit, das Resultat einer dieser drei unter sich ähnlichen Operationen hinzuschreiben. Von einem rechtwinkligen Coordinaten-System aus-

---

*) Wenn wir statt der beiden Glieder

$$-2Nr\sigma + 2Os\varrho$$

die drei Glieder:

$$-2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta$$

einführen, so können wir die Werthe, welche wir nach der Umformung für diese Glieder erhalten, schreiben:

$$-2(N-Ly_0+Mz_0)r\sigma + 2(O+Kx_0-Mz_0)s\varrho + 2(V-Kx_0+Ly_0)\eta.$$

gehend, wollen wir die Coordinaten-Axe OZ beibehalten und die beiden anderen Coordinaten-Axen OX und OY in XY so drehen, dass sie in ihrer neuen Lage mit OX in der ursprünglichen Lage die Winkel α und α' bilden, wonach der Winkel, den die Axen OX und OY in der neuen Lage mit einander bilden, $(\alpha' - \alpha) \equiv \vartheta$ wird. Dann geht die Gleichung (I), indem wir (Einleit. Betr. Nr. 14):

$$r \text{ mit } r\cos\alpha + s\cos\alpha', \qquad s \text{ mit } r\sin\alpha + s\sin\alpha',$$
$$\varrho \text{ mit } \varrho\cos\alpha + \sigma\cos\alpha', \qquad \sigma \text{ mit } \varrho\sin\alpha + \sigma\sin\alpha',$$
$$\eta \text{ mit } \eta\sin\vartheta$$

vertauschen, in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&(A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + 2J\sin\alpha\cos\alpha)r^2 + (B\sin^2\alpha' + A\cos^2\alpha' + 2J\sin\alpha'\cos\alpha')s^2 \\
&\qquad + C \\
&+ (D\sin^2\alpha' + E\cos^2\alpha' - 2M\sin\alpha'\cos\alpha')\sigma^2 + (E\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha - 2M\sin\alpha\cos\alpha)\varrho^2 \\
&\qquad + F\sin^2\vartheta\cdot\eta^2 \\
&\qquad + 2(G\sin\alpha' + H\cos\alpha')s + 2(H\cos\alpha + G\sin\alpha)r \\
&\qquad + 2\big(J(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) + A\cos\alpha\cos\alpha' + B\sin\alpha\sin\alpha'\big)rs \\
&\qquad + 2(K\cos\alpha - L\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot\varrho\eta - 2(L\sin\alpha' - K\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot\sigma\eta \\
&\qquad - 2\big(M(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) - D\sin\alpha\sin\alpha' - E\cos\alpha\cos\alpha'\big)\varrho\sigma \\
&\qquad - 2(N\sin\alpha'\cos\alpha - O\sin\alpha\cos\alpha' - P\cos\alpha\cos\alpha' + S\sin\alpha\sin\alpha')r\sigma \\
&\qquad + 2(O\sin\alpha'\cos\alpha - N\sin\alpha\cos\alpha' + P\sin\alpha\sin\alpha' - S\cos\alpha\cos\alpha')s\varrho \\
&+ 2(P\cos^2\alpha - (N-O)\sin\alpha\cos\alpha - S\sin^2\alpha)r\varrho + 2(Q\cos\alpha + R\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot r\eta \\
&+ 2(R\sin\alpha' + Q\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot s\eta - 2(S\sin^2\alpha' + (N-O)\sin\alpha'\cos\alpha' - P\cos^2\alpha')s\sigma \\
&\qquad - 2(T\sin\alpha' - U\cos\alpha')\sigma + 2(U\cos\alpha - T\sin\alpha)\varrho = 0. \qquad \text{(VIII)}
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\alpha' = \cos\alpha, \qquad \cos\alpha' = -\sin\alpha,$$

so ist das Coordinaten-System ein rechtwinkliges geblieben und bloss durch einen Winkel α um die Axe OZ gedreht worden.

Bei derselben Aenderung des Coordinaten-Systems geht die Gleichung (III) in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&(D\sin^2\alpha' + E\cos^2\alpha' - 2M\sin\alpha'\cos\alpha')p^2 + (E\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha - 2M\sin\alpha\cos\alpha)q^2 \\
&\qquad + F\sin^2\vartheta \\
&+ (A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + 2J\sin\alpha\cos\alpha)\varkappa^2 + (B\sin^2\alpha' + A\cos^2\alpha' + 2J\sin\alpha'\cos\alpha')\pi^2 \\
&\qquad + C\omega^2 \\
&\qquad + 2(K\cos\alpha - L\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot q + 2(L\sin\alpha' - K\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot p \\
&\qquad + 2\big(M(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) - D\sin\alpha\sin\alpha' - E\cos\alpha\cos\alpha'\big)pq
\end{aligned}$$

$$+ 2(G\sin\alpha' + H\cos\alpha')\pi\omega - 2(H\cos\alpha + G\sin\alpha)\varkappa\omega$$
$$- 2\big(J(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) + A\cos\alpha\cos\alpha' + B\sin\alpha\sin\alpha'\big)\pi\varkappa$$
$$- 2(N\sin\alpha'\cos\alpha - O\sin\alpha\cos\alpha' - P\cos\alpha\cos\alpha' + S\sin\alpha\sin\alpha')p\varkappa$$
$$+ 2(O\sin\alpha'\cos\alpha - N\sin\alpha\cos\alpha' + P\sin\alpha\sin\alpha' - S\cos\alpha\cos\alpha')q\pi$$
$$+ 2(S\sin^2\alpha' + (N-O)\sin\alpha'\cos\alpha' - P\cos^2\alpha')p\pi + 2(T\sin\alpha' - U\cos\alpha')p\omega$$
$$+ 2(U\cos\alpha - T\sin\alpha)q\omega - 2(P\cos^2\alpha - (N-O)\sin\alpha\cos\alpha - S\sin^2\alpha)p\varkappa$$
$$- 2(Q\cos\alpha + R\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot\varkappa + 2(R\sin\alpha' + Q\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot\pi = 0. \qquad \text{(IX)}$$

§ 2.

Aequatorialflächen, beschrieben von einer Complex-Curve, deren Ebene parallel mit sich selbst fortrückt.

160. Bei der grossen Complication eines Complexes des zweiten Grades müssen wir darauf Bedacht nehmen, dass wir die Uebersicht erleichtern und dadurch der Anschauung zu Hülfe kommen. Hierzu ist uns ein Mittel in den beiden Sätzen geboten, welche wir in dem vorigen Paragraphen bereits als den unmittelbaren geometrischen Ausdruck der Gleichungen (II) und (IV), die, in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung, die Complexe des zweiten Grades darstellen, gegeben haben. Indem wir einerseits nämlich die unendlich vielen Linien des Complexes, welche in derselben Ebene liegen, in eine einzige Gruppe zusammenfassen, können wir, statt derselben, die von ihnen umhüllte Curve zweiter Classe einführen. Indem wir andererseits die unendlich vielen Linien des Complexes, welche durch denselben Punct gehen, zu einer Gruppe vereinigen, können wir, statt derselben, in analoger Weise diejenige Kegelfläche zweiter Ordnung einführen, welche von ihnen gebildet wird.

Dann brauchen wir einerseits, weil überhaupt alle Linien des Raumes mit einem gegebenen Puncte in einer Ebene liegen, um alle Linien des Complexes zu umfassen, nur diejenigen Complex-Curven in Betracht zu ziehen, deren Ebenen durch den gegebenen Punct gehen; andererseits erhalten wir, da alle Linien des Raumes eine gegebene Ebene schneiden, alle Linien des Complexes, wenn wir nur diejenigen Kegel in Betracht ziehen, deren Mittelpuncte in der gegebenen Ebene liegen. So treten an die Stelle von unendlich vielen (∞^3) Complex-Linien, unendlich viele (∞^2) Complex-Curven, beziehungsweise unendlich viele (∞^2) Complex-Kegel.