Die Complexe des zweiten Grades.

Abschnitt I.

Zwiefache analytische Darstellung eines Complexes des zweiten Grades. Complex-Curven zweiter Classe, von Linien des Complexes umhüllt; Complex-Kegel zweiter Ordnung, von Linien desselben beschrieben. Complex-Flächen vierter Ordnung und Classe, einerseits von Complex-Curven beschrieben, andererseits von Complex-Kegeln umhüllt.

§ 1.

Die allgemeine Gleichung der Linien-Complexe des zweiten Grades in Strahlen- und Axen-Coordinaten.

149. Von den vier Strahlen-Coordinaten:

$$r,\ s,\ \varrho,\ \sigma$$

bedeuten r und s die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die beiden Projectionen des Strahles in den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ mit der Coordinaten-Axe OZ bilden, ϱ und σ die Segmente, welche diese beiden Projectionen von den Coordinaten-Axen OX und OY abschneiden. Daraus ist die fünfte Strahlen-Coordinate:

$$\eta \equiv r\sigma - s\varrho$$

abgeleitet.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen den fünf Coordinaten sei die folgende:

$$\begin{aligned} &Ar^2 + Bs^2 + C + D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2 \\ &+ 2Gs + 2Hr + 2Jrs + 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma \\ &- 2Nr\sigma + 2Os\varrho \\ &+ 2Pr\varrho + 2Qr\eta + 2Rs\eta - 2Ss\sigma - 2T\sigma + 2U\varrho = 0.^{*)} \qquad (\mathrm{I}) \end{aligned}$$

*) Dieselben Rücksichten, die uns bestimmten, in der allgemeinen Gleichung der Complexe

Diese Gleichung enthält neunzehn von einander unabhängige Constante. Es ist unnöthig, ein letztes Glied $+ 2V\eta$ hinzuzufügen: das würde darauf hinauskommen, die absoluten Werthe der Constanten N und O um V zu vermindern. Durch Einführung eines solchen überzähligen Gliedes würde die Symmetrie im Allgemeinen zwar gewinnen; allein es ist nicht räthlich, bei speciellen Untersuchungen ein derartiges Glied beizubehalten, um so weniger, als wir es eintretenden Falles ohne Weiteres hinzufügen können.

150. Von dieser allgemeinen Gleichung können wir sogleich zu der folgenden übergehen, in welcher x', y', z' und x, y, z als die Coordinaten irgend zweier Puncte einer Linie des Complexes auftreten:*)

$$\begin{aligned} & A(x-x')^2 + B(y-y')^2 + C(z-z')^2 \\ & + D(yz'-y'z)^2 + E(x'z-xz')^2 + F(xy'-x'y)^2 \\ & + 2G(y-y')(z-z') + 2H(x-x')(z-z') + 2J(x-x')(y-y') \\ & + 2K(xy'-x'y)(x'z-xz') + 2L(xy'-x'y)(yz'-y'z) + 2M(x'z-xz')(yz'-y'z) \\ & + 2N(x-x')(yz'-y'z) + 2O(y-y')(x'z-xz') \\ & + 2P(x-x')(x'z-xz') + 2Q(x-x')(xy'-x'y) \\ & + 2R(y-y')(xy'-x'y) + 2S(y-y')(yz'-y'z) \\ & + 2T(z-z')(yz'-y'z) + 2U(z-z')(x'z-xz') = 0.^{**)} \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Diese allgemeine Complex-Gleichung wird, indem wir x', y', z' als die Coordinaten irgend eines festen Punctes betrachten und demnach constant nehmen, während wir x, y, z veränderlich lassen, die Gleichung einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Diese Kegelfläche hat den festen Punct zu ihrem Mittelpuncte, und ihre Seiten sind diejenigen Linien des Complexes, welche durch den festen Punct gehen.

151. Von den vier Axen-Coordinaten:

$$p, \; q, \; \pi, \; \varkappa$$

bedeuten die beiden letzten π und $\varkappa$, reciprok und negativ genommen, das

---

ersten Grades zwischen fünf Strahlen- oder Axen-Coordinaten bezüglich die Coefficienten von σ und $\varkappa$ mit negativen Vorzeichen zu nehmen (vergleiche die Note zur 26. Nummer), veranlassen uns, in den entsprechenden Gleichungen der Complexe zweiten Grades dasselbe zu thun.

*) Einleitende Betrachtungen Nr. 2.

**) Den beiden Gliedern:

$$2N(x-x')(yz'-y'z) + 2O(y-y')(x'z-xz')$$

würde sich das überzählige Glied:

$$2V\eta \equiv 2V(z-z')(xy'-x'y)$$

anschliessen. Dann aber liessen sich die drei Glieder in die folgenden beiden:

$$2(N-V)(x-x')(yz'-y'z) + 2(O-V)(y-y')(x'z-xz')$$

zusammenziehen.

x und y derjenigen beiden Puncte, in welchen die bezügliche gerade Linie die Ebene XZ und YZ schneidet. Verbindet man diese beiden Puncte mit dem Anfangspuncte der Coordinaten durch gerade Linien, so bilden diese Linien in den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ mit der Axe OZ zwei Winkel, deren trigonometrische Tangenten, reciprok und negativ genommen, p und q sind. Daraus ist die fünfte Coordinate:

$$\omega = p\varkappa - q\pi$$

abgeleitet.

Die Gleichung desselben Complexes zweiten Grades, den wir oben durch die Gleichung (I) in Strahlen-Coordinaten dargestellt haben, wird unter Anwendung der Axen-Coordinaten die folgende:

$$\begin{gathered} Dp^2 + Eq^2 + F + A\varkappa^2 + B\pi^2 + C\omega^2 \\ + 2Kq + 2Lp + 2Mpq + 2G\pi\omega - 2H\varkappa\omega - 2J\pi\varkappa \\ - 2Np\varkappa + 2Oq\pi \\ + 2Sp\pi + 2Tp\omega + 2Uq\omega - 2Pq\varkappa - 2Q\varkappa + 2R\pi = 0.^{*)} \end{gathered} \tag{III}$$

152. Von dieser allgemeinen Gleichung können wir sogleich zu derjenigen übergehen, in welcher t', u', v' und t, u, v als die Coordinaten irgend zweier Ebenen, welche in der bezüglichen Linie sich schneiden, auftreten:

$$\begin{gathered} D(t-t')^2 \quad + \quad E(u-u')^2 \quad + \quad F(v-v')^2 \\ + A(uv'-u'v)^2 \quad + \quad B(t'v-tv')^2 \quad + \quad C(tu'-t'u)^2 \\ + 2K(u-u')(v-v') + 2L(t-t')(v-v') + 2M(t-t')(u-u') \\ + 2G(tu'-t'u)(t'v-tv') + 2H(tu'-t'u)(uv'-u'v) + 2J(t'v-tv')(uv'-u'v) \\ + 2N(t-t')(uv'-u'v) + 2O(u-u')(t'v-tv') \\ + 2S(t-t')(t'v-tv') + 2T(t-t')(tu'-t'u) \\ + 2U(u-u')(tu'-t'u) + 2P(u-u')(uv'-u'v) \\ + 2Q(v-v')(uv'-u'v) + 2R(v-v')(t'v-tv') = 0.^{**)} \end{gathered} \tag{IV}$$

Die Gleichung (IV), welche die allgemeine Gleichung der Complexe des zweiten Grades ist, stellt, wenn wir t', u', v' auf eine beliebige feste Ebene beziehen und, dem entsprechend, als constant betrachten, eine Curve zweiter Classe dar, welche in der festen Ebene von den in derselben liegenden Linien des Complexes umhüllt wird.

153. Die Vertauschungen von

---

*) Einleit. Betr. Nr. 5.
**) Einleit. Betr. Nr. 3.

$$r,\ s,\ 1,\ -\sigma,\ \varrho,\ \eta$$

und

$$-\varkappa,\ \pi,\ \omega,\ p,\ q,\ 1,$$

so wie die entsprechenden Vertauschungen von:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y)$$

und

$$(uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u),\ (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v'),$$

welche wir machen müssen, um bezüglich die Gleichungen (I) und (III) und die Gleichungen (II) und (IV) aus einander abzuleiten, kommen darauf hinaus, einerseits:

$$r,\ s,\ \sigma,\ \varrho,\ \eta$$

und

$$p,\ q,\ \varkappa,\ \pi,\ \omega$$

andererseits:

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'$$

und

$$t,\ u,\ v,\ t',\ u',\ v',$$

so wie beides Mal:

$$A,\ B,\ C,\qquad G,\ H,\ J,\qquad P,\ Q,\ R$$

und

$$D,\ E,\ F,\qquad K,\ L,\ M,\qquad S,\ T,\ U$$

gegenseitig mit einander zu vertauschen.

154. Die Gleichung (I) wird erst dann symmetrisch, wenn wir sie durch Einführung einer sechsten Veränderlichen, wie diess bereits (Einl. Betr. Nr. 6.) angedeutet ist, homogen machen. Ist h die neue Veränderliche, und behalten wir überdiess die überzählige Constante V bei, so geht (I) über in:

$$\begin{aligned} & Ar^2+Bs^2+Ch^2+D\sigma^2+E\varrho^2+F\eta^2 \\ & +2Gsh+2Hrh+2Jrs+2K\varrho\eta-2L\sigma\eta-2M\varrho\sigma \\ & -2Nr\sigma+2Os\varrho+2Vh\eta \\ & +2Pr\varrho+2Qr\eta+2Rs\eta+2Ss\sigma-2Th\sigma+2Uh\varrho=0.^{*)} \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

---

*) Die Einführung von h kommt darauf hinaus, die beiden ersten der drei Projectionen der geraden Linie $(r,\ \varrho,\ s,\ \sigma)$:

$$x=rz+\varrho,\qquad y=sz+\sigma,\qquad ry=sx+\eta$$

durch die folgenden beiden zu ersetzen:

$$hx=rz+\varrho,\qquad hy=sz+\sigma.$$

Hiernach können wir die gerade Linie in symmetrischer Weise durch die beiden Gleichungen je zweier ihrer drei Projectionen darstellen, durch die letzten beiden, wie durch die folgenden:

155. Einer Vertauschung der drei Coordinaten-Axen unter einander entspricht eine Vertauschung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Complexe zweiten Grades. Wir wollen dabei die Gleichung (II) zu Grunde legen, der Symmetrie wegen aber das Glied:

$$2V'(z-z')(xy'-x'y)$$

hinzufügen, indem wir N und O mit N' und O' vertauschen und

$$N = N' - V', \qquad O = O' - V'$$

setzen. Wenn wir alsdann erstens die beiden Coordinaten-Axen OX und OY mit einander vertauschen, so vertauschen sich gegenseitig $(x-x')$ und $(y-y')$, während $(z-z')$ unverändert bleibt, sowie $(x'z-xz')$ und $-(yz'-y'z)$, während $(xy'-x'y)$ sein Zeichen wechselt. Hiernach werden von der Vertauschung in keiner Weise berührt die Coefficienten:

$$C, F, J, M,$$

während bezüglich

$$A, D, G, K$$

und

$$B, E, H, L$$

ohne Zeichenänderung, mit gleichzeitigem Zeichenwechsel

$$N', P, R, T$$

und

$$O', S, Q, U$$

sich gegenseitig vertauschen und V' sein Zeichen ändert.

In der Gleichung (V) vertauschen sich hiernach gegenseitig:

$$r \text{ und } \varrho$$

bezüglich mit

$$s \text{ und } \sigma,$$

während η sein Zeichen wechselt.

Vertauschen wir zweitens die beiden Axen OX und OZ mit einander, so vertauschen sich in (II) die Ausdrücke $(x-x')$ und $(z-z')$, während $(y-y')$ ungeändert bleibt, ebenso $(yz'-y'z)$ und $-(xy'-x'y)$, während

---

$$sx = ry - \eta, \qquad sz = hy - \sigma,$$

und die folgenden:

$$ry = sx + \eta, \qquad rz = hx - \varrho,$$

wobei die Bedingungs-Gleichung erfüllt wird:

$$r\sigma - s\varrho = h\eta.$$

Es ist wohl kaum nothwendig, zu bemerken, dass, wenn wir $(z-z')$ für h schreiben, die Gleichung (V) in die Gleichung (II) übergeht.

$(x'z - xz')$ sein Zeichen ändert. Dem entsprechend vertauschen sich in (V)

$$r \text{ und } \varrho$$

mit

$$h \text{ und } -\eta,$$

während σ sein Zeichen wechselt. Von der Vertauschung werden hiernach nicht berührt die Coefficienten:

$$B,\ E,\ H,\ L,$$

während sich die Coefficienten

$$A,\ D,\ G,\ K$$

bezüglich mit

$$C,\ F,\ J,\ M$$

ohne Zeichenwechsel, mit gleichzeitiger Zeichenänderung:

$$N',\ P,\ R,\ T$$

bezüglich mit

$$V',\ U,\ S,\ Q$$

vertauschen und O' sein Zeichen wechselt.

Vertauschen wir drittens die beiden Axen OY und OZ mit einander, so vertauschen sich in (II) die Ausdrücke $(y-y')$ und $(z-z')$, so wie $(xy'-x'y)$ und $-(x'z-xz')$ mit einander, während $(x-x')$ unverändert bleibt und $(yz'-y'z)$ sein Zeichen wechselt. In (V) vertauschen sich:

$$s \text{ und } \sigma$$

mit

$$h \text{ und } \eta,$$

während ϱ sein Zeichen ändert. Von der Vertauschung werden hiernach nicht berührt:

$$A,\ D,\ G,\ K,$$

während sich die Coefficienten:

$$B,\ E,\ H,\ L$$

bezüglich mit

$$C,\ F,\ J,\ M$$

ohne Zeichenwechsel, unter gleichzeitigem Zeichenwechsel

$$O',\ P,\ R,\ T$$

bezüglich mit

$$V',\ Q,\ U,\ S$$

vertauschen und N' sein Zeichen wechselt.

Es bleiben noch die Modificationen zu erörtern, welche dann eintreten, wenn wir das überzählige Glied fortfallen lassen.

Setzen wir in der ersten Vertauschung V' gleich Null, so vertauschen sich zugleich mit den Coordinaten-Axen OX und OY die Coefficienten

$$N \text{ und } O$$

unter Zeichenänderung.

Setzen wir in der zweiten Vertauschung O' gleich Null, so kommt $V' = -O$, $N' = N - O$; mit den Coordinaten-Axen OX und OZ vertauschen sich V' und N' unter Zeichenwechsel, oder, was dasselbe ist,

$$O \text{ und } N - O$$

ohne Zeichenänderung.

Endlich vertauschen sich in dem dritten Falle gleichzeitig mit den Coordinaten-Axen OY und OZ unter Zeichenänderung die Coefficienten

$$N \text{ und } N - O.$$

Es ist nicht zu übersehen, dass in allen Gleichungen nach der Vertauschung die Drehungsmomente von OX nach OY, von OY nach OZ, von OZ nach OX genommen sind.

156. Da die Gleichung (III), wenn sie, auf dieselben Coordinaten-Axen bezogen, denselben Complex zweiten Grades darstellen soll, als die Gleichung (I), dieselben Constanten in anderer Reihenfolge enthält, so behalten die in der vorigen Nummer entwickelten Vertauschungs-Regeln auch für die Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten ihre vollständige und unmittelbare Geltung.

157. Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (x_0, y_0, z_0) verlegen, so treten, während r und s unverändert bleiben, an die Stelle von ϱ, σ, η (Einleit. Betr. Nr. 14.) die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{gathered}\varrho + rz_0 - x_0,\\ \sigma + sz_0 - y_0,\\ \eta + sx_0 - ry_0,\end{gathered}$$

wonach die Gleichung (I) in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned}
&(A + Ez_0^2 + Fy_0^2 - 2Ky_0z_0 + 2Pz_0 - 2Qy_0)r^2\\
&+ (B + Dz_0^2 + Fx_0^2 - 2Lx_0z_0 + 2Rx_0 - 2Sz_0)s^2\\
&+ (C + Dy_0^2 + Ex_0^2 - 2Mx_0y_0 + 2Ty_0 - 2Ux_0)\\
&+ D\sigma^2 + E\varrho^2 + F\eta^2\\
&+ 2(G - Dy_0z_0 - Kx_0^2 + Lx_0y_0 + Mx_0z_0 - Ox_0 + Sy_0 - Tz_0)s\\
&+ 2(H - Ex_0z_0 + Kx_0y_0 - Ly_0^2 + My_0z_0 + Ny_0 - Px_0 + Uz_0)r\\
&+ 2(J - Fx_0y_0 + Kx_0z_0 + Ly_0z_0 - Mz_0^2 - (N-O)z_0 + Qx_0 - Ry_0)rs\\
&+ 2K\varrho\eta - 2L\sigma\eta - 2M\varrho\sigma
\end{aligned}$$

$$- 2(N + Kx_0 - 2Ly_0 + Mz_0) r\sigma + 2(O + 2Kx_0 - Ly_0 - Mz_0) s\varrho$$
$$+ 2(P + Ez_0 - Ky_0) r\varrho + 2(Q - Fy_0 + Kz_0) r\eta$$
$$+ 2(R + Fx_0 - Lz_0) s\eta - 2(S - Dz_0 + Lx_0) s\sigma$$
$$- 2(T + Dy_0 - Mx_0)\sigma + 2(U - Ex_0 + My_0)\varrho = 0.\text{*)} \qquad \text{(VI)}$$

158. Um die Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten auf den neuen Anfangspunct zu beziehen, brauchen wir bloss in der vorstehenden Gleichung dieselben Vertauschungen vorzunehmen, durch welche wir in der 153. Nummer die Complex-Gleichung (III) aus (I) abgeleitet haben. Auf diese Weise ergibt sich unmittelbar:

$$Dp^2 + Eq^2 + F$$
$$+ (A + Ez_0^2 + Fy_0^2 - 2Ky_0z_0 + 2Pz_0 - 2Qy_0)\varkappa^2$$
$$+ (B + Dz_0^2 + Fx_0^2 - 2Lx_0z_0 + 2Rx_0 - 2Sz_0)\pi^2$$
$$+ (C + Dy_0^2 + Ex_0^2 - 2Mx_0y_0 + 2Ty_0 - 2Ux_0)\omega^2$$
$$+ 2Kq + 2Lp + 2Mpq$$
$$+ 2(G - Dy_0z_0 - Kx_0^2 + Lx_0y_0 + Mx_0z_0 - Ox_0 + Sy_0 - Tz_0)\pi\omega$$
$$- 2(H - Ex_0z_0 + Kx_0y_0 - Ly_0^2 + My_0z_0 + Ny_0 - Px_0 + Uz_0)\varkappa\omega$$
$$- 2(J - Fx_0y_0 + Kx_0z_0 + Ly_0z_0 - Mz_0^2 - (N-O)z_0 + Qx_0 - Ry_0)\pi\varkappa$$
$$- 2(N + Kx_0 - 2Ly_0 + Mz_0)p\varkappa + 2(O + 2Kx_0 - Ly_0 - Mz_0)q\pi$$
$$+ 2(S - Dz_0 + Lx_0)p\pi + 2(T + Dy_0 - Mx_0)p\omega$$
$$+ 2(U - Ex_0 + My_0)q\omega - 2(P + Ez_0 - Ky_0)q\varkappa$$
$$- 2(Q - Fy_0 + Kz_0)\varkappa + 2(R + Fx_0 - Lz_0)\pi = 0. \qquad \text{(VII)}$$

159. Wir wollen ferner das Coordinaten-System, auf welches der Complex (I) ursprünglich bezogen war, durch ein anderes ersetzen, dessen Axen sich in dem ursprünglichen Anfangspuncte schneiden, aber beliebig ihre Richtung geändert haben. In den einleitenden Betrachtungen ist diese Coordinaten-Verwandlung auf drei successive Operationen zurückgeführt worden, in welcher jedesmal eine der drei Coordinaten-Axen beibehalten wird, während die beiden anderen in ihrer Ebene beliebig gedreht werden. Wir begnügen uns hier damit, das Resultat einer dieser drei unter sich ähnlichen Operationen hinzuschreiben. Von einem rechtwinkligen Coordinaten-System aus-

---

*) Wenn wir statt der beiden Glieder

$$-2Nr\sigma + 2Os\varrho$$

die drei Glieder:

$$-2Nr\sigma + 2Os\varrho + 2Vh\eta$$

einführen, so können wir die Werthe, welche wir nach der Umformung für diese Glieder erhalten, schreiben:

$$-2(N - Ly_0 + Mz_0)r\sigma + 2(O + Kx_0 - Mz_0)s\varrho + 2(V - Kx_0 + Ly_0)\eta.$$

gehend, wollen wir die Coordinaten-Axe OZ beibehalten und die beiden anderen Coordinaten-Axen OX und OY in XY so drehen, dass sie in ihrer neuen Lage mit OX in der ursprünglichen Lage die Winkel α und α' bilden, wonach der Winkel, den die Axen OX und OY in der neuen Lage mit einander bilden, $(\alpha' - \alpha) \equiv \vartheta$ wird. Dann geht die Gleichung (I), indem wir (Einleit. Betr. Nr. 14):

$$r \text{ mit } r\cos\alpha + s\cos\alpha', \qquad s \text{ mit } r\sin\alpha + s\sin\alpha',$$
$$\varrho \text{ mit } \varrho\cos\alpha + \sigma\cos\alpha', \qquad \sigma \text{ mit } \varrho\sin\alpha + \sigma\sin\alpha',$$
$$\eta \text{ mit } \eta\sin\vartheta$$

vertauschen, in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&(A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + 2J\sin\alpha\cos\alpha)r^2 + (B\sin^2\alpha' + A\cos^2\alpha' + 2J\sin\alpha'\cos\alpha')s^2 \\
&\qquad + C \\
&+ (D\sin^2\alpha' + E\cos^2\alpha' - 2M\sin\alpha'\cos\alpha')\sigma^2 + (E\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha - 2M\sin\alpha\cos\alpha)\varrho^2 \\
&\qquad + F\sin^2\vartheta\cdot\eta^2 \\
&\qquad + 2(G\sin\alpha' + H\cos\alpha')s + 2(H\cos\alpha + G\sin\alpha)r \\
&\quad + 2\big(J(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) + A\cos\alpha\cos\alpha' + B\sin\alpha\sin\alpha'\big)rs \\
&\quad + 2(K\cos\alpha - L\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot\varrho\eta - 2(L\sin\alpha' - K\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot\sigma\eta \\
&\quad - 2\big(M(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) - D\sin\alpha\sin\alpha' - E\cos\alpha\cos\alpha'\big)\varrho\sigma \\
&\quad - 2(N\sin\alpha'\cos\alpha - O\sin\alpha\cos\alpha' - P\cos\alpha\cos\alpha' + S\sin\alpha\sin\alpha')r\sigma \\
&\quad + 2(O\sin\alpha'\cos\alpha - N\sin\alpha\cos\alpha' + P\sin\alpha\sin\alpha' - S\cos\alpha\cos\alpha')s\varrho \\
&+ 2(P\cos^2\alpha - (N-O)\sin\alpha\cos\alpha - S\sin^2\alpha)r\varrho + 2(Q\cos\alpha + R\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot r\eta \\
&+ 2(R\sin\alpha' + Q\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot s\eta - 2(S\sin^2\alpha' + (N-O)\sin\alpha'\cos\alpha' - P\cos^2\alpha')s\sigma \\
&\qquad - 2(T\sin\alpha' - U\cos\alpha')\sigma + 2(U\cos\alpha - T\sin\alpha)\varrho = 0. \qquad \text{(VIII)}
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\alpha' = \cos\alpha, \qquad \cos\alpha' = -\sin\alpha,$$

so ist das Coordinaten-System ein rechtwinkliges geblieben und bloss durch einen Winkel α um die Axe OZ gedreht worden.

Bei derselben Aenderung des Coordinaten-Systems geht die Gleichung (III) in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&(D\sin^2\alpha' + E\cos^2\alpha' - 2M\sin\alpha'\cos\alpha')p^2 + (E\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha - 2M\sin\alpha\cos\alpha)q^2 \\
&\qquad + F\sin^2\vartheta \\
&+ (A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + 2J\sin\alpha\cos\alpha)\varkappa^2 + (B\sin^2\alpha' + A\cos^2\alpha' + 2J\sin\alpha'\cos\alpha')\pi^2 \\
&\qquad + C\omega^2 \\
&\quad + 2(K\cos\alpha - L\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot q + 2(L\sin\alpha' - K\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot p \\
&\quad + 2\big(M(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) - D\sin\alpha\sin\alpha' - E\cos\alpha\cos\alpha'\big)pq
\end{aligned}$$

$$+ 2(G\sin\alpha' + H\cos\alpha')\pi\omega - 2(H\cos\alpha + G\sin\alpha)\varkappa\omega$$
$$- 2\big(J(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) + A\cos\alpha\cos\alpha' + B\sin\alpha\sin\alpha'\big)\pi\varkappa$$
$$- 2(N\sin\alpha'\cos\alpha - O\sin\alpha\cos\alpha' - P\cos\alpha\cos\alpha' + S\sin\alpha\sin\alpha')p\varkappa$$
$$+ 2(O\sin\alpha'\cos\alpha - N\sin\alpha\cos\alpha' + P\sin\alpha\sin\alpha' - S\cos\alpha\cos\alpha')q\pi$$
$$+ 2(S\sin^2\alpha' + (N-O)\sin\alpha'\cos\alpha' - P\cos^2\alpha')p\pi + 2(T\sin\alpha' - U\cos\alpha')p\omega$$
$$+ 2(U\cos\alpha - T\sin\alpha)q\omega - 2(P\cos^2\alpha - (N-O)\sin\alpha\cos\alpha - S\sin^2\alpha)p\varkappa$$
$$- 2(Q\cos\alpha + R\sin\alpha)\sin\vartheta\cdot\varkappa + 2(R\sin\alpha' + Q\cos\alpha')\sin\vartheta\cdot\pi = 0. \qquad \text{(IX)}$$

§ 2.

Aequatorialflächen, beschrieben von einer Complex-Curve, deren Ebene parallel mit sich selbst fortrückt.

160. Bei der grossen Complication eines Complexes des zweiten Grades müssen wir darauf Bedacht nehmen, dass wir die Uebersicht erleichtern und dadurch der Anschauung zu Hülfe kommen. Hierzu ist uns ein Mittel in den beiden Sätzen geboten, welche wir in dem vorigen Paragraphen bereits als den unmittelbaren geometrischen Ausdruck der Gleichungen (II) und (IV), die, in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung, die Complexe des zweiten Grades darstellen, gegeben haben. Indem wir einerseits nämlich die unendlich vielen Linien des Complexes, welche in derselben Ebene liegen, in eine einzige Gruppe zusammenfassen, können wir, statt derselben, die von ihnen umhüllte Curve zweiter Classe einführen. Indem wir andererseits die unendlich vielen Linien des Complexes, welche durch denselben Punct gehen, zu einer Gruppe vereinigen, können wir, statt derselben, in analoger Weise diejenige Kegelfläche zweiter Ordnung einführen, welche von ihnen gebildet wird.

Dann brauchen wir einerseits, weil überhaupt alle Linien des Raumes mit einem gegebenen Puncte in einer Ebene liegen, um alle Linien des Complexes zu umfassen, nur diejenigen Complex-Curven in Betracht zu ziehen, deren Ebenen durch den gegebenen Punct gehen; andererseits erhalten wir, da alle Linien des Raumes eine gegebene Ebene schneiden, alle Linien des Complexes, wenn wir nur diejenigen Kegel in Betracht ziehen, deren Mittelpuncte in der gegebenen Ebene liegen. So treten an die Stelle von unendlich vielen (∞^3) Complex-Linien, unendlich viele (∞^2) Complex-Curven, bezüglich unendlich viele (∞^2) Complex-Kegel.

161. Wir können einen Schritt weiter thun. Wenn eine Ebene sich bewegt, so beschreibt die in ihr von Linien des Complexes umhüllte, veränderliche Curve zweiter Classe eine Fläche; wenn ein Punct sich bewegt, so wird eine Fläche von dem veränderlichen Complex-Kegel, der diesen Punct zum Mittelpuncte hat, umhüllt. In der Bestimmung des Complexes vertreten diese Flächen unendlich viele (∞) Complex-Curven, bezüglich unendlich viele (∞) Complex-Kegel. Die einfachsten Flächen dieser Art entsprechen einerseits dem Falle, dass die Ebene der beschreibenden Curve um eine feste Axe sich dreht oder parallel mit sich selbst fortrückt, und andererseits dem Falle, dass der Mittelpunct des umhüllenden Kegels eine feste gerade Linie beschreibt, oder, wenn diese feste Linie unendlich weit rückt, dass die Kegel in umhüllende Cylinder ausarten, deren Axen einer gegebenen Ebene parallel sind.

Die so bestimmten Flächen wollen wir überhaupt Complex-Flächen nennen.

Indem wir diese Complex-Flächen einführen, können wir die unendlich vielen (∞^3) Complex-Linien durch unendlich viele (∞) solcher Complex-Flächen ersetzen, deren feste Axen in einer gegebenen Ebene liegen und in einem gegebenen Puncte dieser Ebene sich schneiden.

Die angegebenen Erzeugungen der Complex-Flächen wollen wir nach einander einer analytischen Discussion unterwerfen.

162. Wir wollen von der allgemeinen Gleichung:

$$\begin{aligned}
&D(t-t')^2 + E(u-u')^2 + F(v-v')^2 \\
&+ A(uv'-u'v)^2 + B(t'v-tv')^2 + C(tu'+t'u)^2 \\
&+ 2K(u-u')(v-v') + 2L(t-t')(v-v') + 2M(t-t')(u-u') \\
&+ 2G(tu'-t'u)(t'v-tv') + 2H(tu'-t'u)(uv'-u'v) + 2J(t'v-tv')(uv'-u'v) \\
&+ 2N(t-t')(uv'-u'v) + 2O(u-u')(t'v-tv') \\
&+ 2S(t-t')(t'v-tv') + 2T(t-t')(tu'-t'u) \\
&+ 2U(u-u')(tu'-t'u) + 2P(u-u')(uv'-u'v) \\
&+ 2Q(v-v')(uv'-u'v) + 2R(v-v')(t'v-tv') = 0, \qquad \text{(IV)}
\end{aligned}$$

welche den Complex zweiten Grades in Axen-Coordinaten darstellt, ausgehen. Betrachten wir in dieser Gleichung t', u', v' als constant, so stellt dieselbe eine Curve zweiter Classe im Raume dar, welche von allen denjenigen Ebenen berührt wird, deren Coordinaten t, u, v die Gleichung befriedigen. Diese Curve liegt in der Ebene (t', u', v') und wird in derselben von Linien des Complexes umhüllt.

Die Projection dieser Curve auf eine der drei Coordinaten Ebenen YZ, XZ, XY ergibt sich unmittelbar, wenn wir bezüglich t, u, v gleich Null setzen. Auf diese Weise erhalten wir, wenn wir nur die Projection auf YZ berücksichtigen und zugleich die Gleichung durch Einführung von w und w' homogen machen:

$$\begin{aligned}
&(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w^2 \\
&- 2(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)vw \\
&+ (Au'^2 + Bt'^2 + Fw'^2 - 2Jt'u' - 2Qu'w' + 2Rt'w')v^2 \\
&- 2(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w' + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')uw \\
&- 2(Au'v' + Gt'^2 - Ht'u' - Jt'v' - Kw'^2 - Ot'w' + Pu'w' - Qv'w')uv \\
&+ (Av'^2 + Ct'^2 + Ew'^2 - 2Ht'v' + 2Pv'w' - 2Ut'w')u^2 = 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

163. Wenn wir in der vorstehenden Gleichung t', u', v' constant nehmen und w' sich verändern lassen, so rückt die Ebene (t', u', v', w'), welche die Complex-Curve enthält, parallel mit sich selbst fort. Machen wir insbesondere die Voraussetzung, dass diese Ebene mit YZ parallel ist, so kommt:

$$u' = 0, \qquad v' = 0, \qquad \frac{w'}{t'} = -x',$$

wobei x' den Abstand der jedesmaligen Ebene der Complex-Curve von YZ bedeutet. Die Gleichung (1) verwandelt sich hiernach, wenn wir zugleich durch t'^2 dividiren, in die folgende:

$$\begin{aligned}
&Dw^2 + 2(Lx' - S)vw + (Fx'^2 - 2Rx' + B)v^2 \\
&+ 2(Mx' + T)uw + 2(Kx'^2 - Ox' - G)uv + (Ex'^2 + 2Ux' + C)u^2 = 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung gibt, nachdem der Abstand x' einer mit YZ parallelen Ebene bestimmt worden ist, in gewöhnlichen Linien-Coordinaten u, v, w die Projection der in dieser Ebene liegenden Complex-Curve auf YZ, oder auch diese Curve selbst in ihrer eigenen Ebene, wenn wir die Coordinaten-Ebene YZ parallel mit sich selbst so verschieben, dass sie mit der Ebene der jedesmaligen Complex-Curve zusammenfällt. Wenn wir hiernach auch x' als veränderlich betrachten und demnach die Accente fortlassen, so stellt dieselbe Gleichung:

$$\begin{aligned}
&Dw^2 + 2(Lx - S)vw + 2(Fx^2 - 2Rx + B)v^2 \\
&+ 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C)u^2 = 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten x, u, v, w den Inbegriff aller Complex-Curven dar, deren Ebenen mit YZ parallel sind.

Complex-Curven in Ebenen, die unter einander parallel sind, bilden eine

Complex-Fläche, die wir eine Aequatorialfläche nennen wollen, während die einzelnen Complex-Curven Breiten-Curven heissen mögen.

Die Gleichung (3) schliesst dreizehn von einander unabhängige Constanten ein. Da die Coordinaten-Bestimmung in keiner weiteren Beziehung zu der Aequatorialfläche steht, als dass die Richtung der Coordinaten-Ebene YZ eine ausgezeichnete ist, so hängt die Aequatorialfläche im Ganzen von fünfzehn Constanten ab.

164. In bekannter Weise erhalten wir die Bestimmung des Mittelpunctes der durch ihre Gleichung in Linien-Coordinaten dargestellten Breiten-Curve in einer durch x' bestimmten Ebene. Die Coordinaten dieses Punctes sind:

$$z = \frac{Lx' - S}{D}, \qquad y = \frac{Mx' + T}{D}, \tag{4}$$

und darnach ergibt sich, wenn wir die Accente fortlassen:

$$\left.\begin{array}{l} Dz - Lx + S = 0, \\ Dy - Mx - T = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Indem wir x als veränderlich betrachten, stellen diese beiden Gleichungen eine gerade Linie dar, und diese gerade Linie ist der geometrische Ort für die Mittelpuncte der Complex-Curven, welche die Aequatorialfläche bilden. Wir wollen diese gerade Linie den Durchmesser der Aequatorialfläche und die Ebenen der Breiten-Curven zugeordnete Ebenen dieses Durchmessers nennen.

Jedem Systeme paralleler Ebenen entspricht im Complexe eine Aequatorialfläche mit einem Durchmesser, der die parallelen Ebenen zu seinen zugeordneten hat.

165. Die Gleichung (3) gibt jede der Breiten-Curven in ihrer Ebene, nachdem diese Ebene durch den Werth von x bestimmt worden ist, in Linien-Coordinaten u, v, w. Wir können aber auch dieselbe Curve in ihrer Ebene durch die gewöhnlichen Punct-Coordinaten y und z darstellen. Dann finden wir für ihre Gleichung in bekannter Weise:*)

---

*) Wenn derselbe Kegelschnitt in der Ebene YZ einmal vermittelst Punct-Coordinaten y, z, das andere Mal vermittelst Linien-Coordinaten u, v, w durch die beiden Gleichungen:

$$ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dy + 2ez + f = 0,$$
$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = 0$$

dargestellt wird, so können wir die Constanten der einen Gleichung durch die Constanten der anderen auf folgende Weise bestimmen:

$$
\begin{aligned}
&[(Lx-S)^2 - D(Fx^2-2Rx+B)]y^2\\
&+2[D(Kx^2-Ox-G)-(Lx-S)(Mx+T)]yz\\
&+[(Mx+T)^2-D(Ex^2-2Ux+C)]z^2\\
&+2[(Mx+T)(Fx^2-2Rx+B)-(Lx-S)(Kx^2-Ox-G)]y\\
&+2[(Lx-S)(Ex^2-2Ux+C)-(Mx+T)(Kx^2-Ox-G)]z\\
&+[(Kx^2-Ox-G)^2-(Fx^2-2Rx+B)(Ex^2-2Ux+C)]=0. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Wenn wir in dieser Gleichung nicht nur y und z, sondern auch x als veränderlich betrachten, so stellt sie, in gewöhnlichen Punct-Coordinaten, die Aequatorialfläche dar.

Die Aequatorialflächen sind also Flächen der vierten Ordnung. Sie werden von den ihrem Durchmesser conjugirten Ebenen in Curven zweiter Ordnung geschnitten, weil in diesen Ebenen unendlich weit ein Doppelstrahl der Fläche liegt.

166. Wir erhalten die folgenden drei Gleichungen:

$$
\left.
\begin{aligned}
&Dw^2+2(Lx-S)vw+(Fx^2-2Rx+B)v^2\\
&+2(Mx+T)uw+2(Kx^2-Ox-G)uv+(Ex^2+2Ux+C)u^2=0,\\
&Ew^2+2(My-U)tw+(Dy^2-2Ty+C)t^2\\
&+2(Ky+P)vw+2(Ly^2+Ny-H)tv+(Fy^2+2Qy+A)v^2=0,\\
&Fw^2+2(Kz-Q)uw+(Ez^2-2Pz+A)u^2\\
&+2(Lz+R)tw+2(Mz^2-(N-O)z-J)tu+(Dz^2+2Sz+B)t^2=0
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

für die Gleichungen derjenigen Aequatorialflächen, deren Breiten-Curven bezüglich YZ, XZ, XY parallel sind, in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten. Die erste der vorstehenden drei Gleichungen ist die Gleichung (3) der 163. Nummer und aus ihr sind die beiden anderen nach den Vertauschungsregeln der 155. Nummer abgeleitet. Sie stellen, wenn wir für die drei Veränderlichen x, y, z nach einander alle möglichen Werthe einsetzen, die einzelnen Breiten-Curven in ihren Ebenen dar. Setzen wir insbesondere x, y, z gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen der drei Complex-Curven in den drei Coordinaten-Ebenen:

$$
\begin{aligned}
a &= B^2-AC, & A &= b^2-ac,\\
b &= AE-BD, & B &= ae-bd,\\
c &= D^2-AF, & C &= d^2-af,\\
d &= CD-BE, & D &= cd-be,\\
e &= BF-DE, & E &= bf-de,\\
f &= E^2-CF, & F &= e^2-cf.
\end{aligned}
$$

Ich entnehme diese Ausdrücke dem 2. Bande der „Entwicklungen“, Nr. 484. und Nr. 552.

$$\left.\begin{aligned} Dw^2 - 2Svw + Bv^2 + 2Tuw - 2Guv + Cu^2 = 0, \\ Ew^2 - 2Utw + Ct^2 + 2Pvw - 2Htv + Av^2 = 0, \\ Fw^2 - 2Ouw + Au^2 + 2Rtw - 2Jtu + Bt^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

§ 3.

Meridianflächen, beschrieben von einer Complex-Curve, deren Ebene um eine feste gerade Linie sich dreht.

167. Die Aequatorialflächen, welche Gegenstand der Untersuchung des vorigen Paragraphen waren, sind der geometrische Ort solcher Curven, die in parallelen Ebenen von Linien des Complexes umhüllt werden, oder, mit anderen Worten, deren Ebenen sich in einer unendlich weit entfernten geraden Linie schneiden. Sie sind als eine Particularisation solcher Complex-Flächen zu betrachten, welche der geometrische Ort für Complex-Curven sind, deren Ebenen durch eine feste Axe gehen. Wir wollen derartige Complex-Flächen als Meridianflächen bezeichnen, indem wir zugleich die Complex-Curven, welche eine Meridianfläche bilden, Meridian-Curven, die Ebenen, in welchen sie liegen, Meridian-Ebenen nennen.

Die Bestimmung der Meridianflächen knüpft sich an dieselbe Gleichung:

$$\begin{aligned} &(Dt'^2 + Eu'^2 + Fv'^2 + 2Ku'v' + 2Lt'v' + 2Mt'u')w^2 \\ &- 2(Fv'w' + Ku'w' + Lt'w' - (N-O)t'u' - Pu'^2 - Qu'v' + Rt'v' + St'^2)vw \\ &+ (Au'^2 + Bt'^2 + Fw'^2 - 2Jt'u' - 2Qu'w' + 2Rt'w')v^2 \\ &- 2(Eu'w' + Kv'w' + Mt'w' + Nt'v' + Pu'v' + Qv'^2 - Tt'^2 - Ut'u')uw \\ &- 2(Au'v' + Gt'^2 - Ht'u' - Jt'v' - Kw'^2 - Ot'w' + Pu'w' - Qv'w')uv \\ &+ (Av'^2 + Ct'^2 + Ew'^2 - 2Ht'v' + 2Pv'w' - 2Ut'w')u^2 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

durch welche wir im vorigen Paragraphen die Aequatorialfläche bestimmt haben.

168. Bei der willkürlichen Annahme des Coordinaten-Systems können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, für die feste Axe, um welche die Ebene der Complex-Curve sich dreht, eine der drei Coordinaten-Axen nehmen. Wählen wir für dieselbe die Axe OZ, so müssen wir in der vorstehenden Gleichung v' und w' gleich Null setzen. Dieselbe geht alsdann in die folgende über:

$$\begin{aligned} &(Dt'^2 + Eu'^2 + 2Mt'u')w^2 + 2((N-O)t'u' + Pu'^2 - St'^2)vw + (Au'^2 + Bt'^2 - 2Jt'u')v^2 \\ &+ 2(Tt' + Uu')t' \cdot uw - 2(Gt' - Hu')t'uv + Ct'^2u^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Lage der Meridian-Ebene ist durch $\frac{t'}{u'}$ bestimmt; wir können sie, wenn y und x zwei der drei Coordinaten irgend eines beliebigen Punctes der Ebene sind, in gleicher Weise durch:

$$\frac{y}{x} = -\frac{t'}{u'}$$

bestimmen. Die letzte Gleichung wird hiernach die folgende, wenn wir zugleich nach den Potenzen von x und y ordnen:

$$\begin{aligned}(Ex^2-2Mxy+Dy^2)w^2+2(Px^2-(N-O)xy-Sy^2)vw+(Ax^2+2Jxy+By^2)v^2\\ -2(Ux-Ty)y\cdot uw-2(Hx+Gy)y\cdot uv+Cy^2u^2=0.\qquad(10)\end{aligned}$$

Diese Gleichung geht, wenn wir die Axen OZ und OY mit einander vertauschen, nach den Vertauschungsregeln des ersten Paragraphen in die folgende über:

$$\begin{aligned}(Fx^2-2Lxz+Dz^2)w^2-2(Qx^2-Nxz-Tz^2)uw+(Ax^2+2Hxz+Cz^2)u^2\\ +2(Rx-Sz)z\cdot vw-2(Jx+Gz)z\cdot uv+Bz^2\cdot v^2=0,\qquad(11)\end{aligned}$$

und diese Gleichung wiederum, wenn wir die beiden Axen OY und OX mit einander vertauschen, in die folgende:

$$\begin{aligned}(Fy^2-2Kyz+Ez^2)w^2+2(Ry^2-Oyz-Uz^2)tw+(By^2+2Gyz+Cz^2)t^2\\ -2(Qy-Pz)z\cdot vw-2(Jy+Hz)z\cdot tv+Az^2\cdot v^2=0.\qquad(12)\end{aligned}$$

Die Gleichung (11) stellt die Projection auf YZ derjenigen Complex-Curven dar, deren Ebenen durch OY gehen, die Gleichung (12) die Projection auf XZ derjenigen Complex-Curven, deren Ebenen durch OX gehen. Wir wollen die letztere als die allgemeine Gleichung der Meridianflächen in gemischten Punct- und Linien-Coordinaten ansehen.

Sie enthält, wie die allgemeine Gleichung der Aequatorialflächen (3), dreizehn von einander unabhängige Constante. Während aber, im Falle der Aequatorialflächen, das Coordinaten-System nur insofern von der Fläche abhängt, als die Richtung der Coordinaten-Ebene YZ durch dieselbe gegeben ist, wird hier durch die Meridianfläche die Axe OX bestimmt. Eine Meridianfläche hängt also, ausser von den dreizehn obigen Constanten, noch von vier neuen Constanten, im Ganzen also von siebenzehn Constanten ab.

169. Wir wollen der folgenden Discussion die letzte Gleichung zu Grunde legen.

Wenn wir den Winkel, welchen eine beliebige der Meridian-Ebenen mit XZ bildet, φ nennen, so ist:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{z}\cdot$$

Wir erhalten also die Gleichung der Projection der bezüglichen Meridian-Curve auf XZ, wenn wir in der letzten Gleichung für die Coordinaten

$$y \text{ und } z$$

die trigonometrischen Functionen

$$\sin\varphi \text{ und } \cos\varphi$$

einsetzen. Dadurch geht dieselbe in die folgende über:

$$\begin{aligned}&(F\sin^2\varphi - 2K\sin\varphi\cos\varphi + E\cos^2\varphi)w^2\\ &+ 2(R\sin^2\varphi - O\sin\varphi\cos\varphi - U\cos^2\varphi)tw\\ &+ (B\sin^2\varphi + 2G\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi)t^2\\ -2(Q\sin\varphi - P\cos\varphi)\cos\varphi\cdot vw - 2(J\sin\varphi &+ H\cos\varphi)\cos\varphi\cdot tv + A\cos^2\varphi\cdot v^2 = 0,\end{aligned} \tag{13}$$

und, wenn wir durch $\cos^2\varphi$ dividiren, kommt:

$$\begin{aligned}&(F\operatorname{tang}^2\varphi - 2K\operatorname{tang}\varphi + E)w^2\\ &+ 2(R\operatorname{tang}^2\varphi - O\operatorname{tang}\varphi - U)tw\\ &+ (B\operatorname{tang}^2\varphi + 2G\operatorname{tang}\varphi + C)t^2\\ -2(Q\operatorname{tang}\varphi - P)vw &- 2(J\operatorname{tang}\varphi + H)tv + Av^2 = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Wenn wir endlich die Coordinaten-Ebene XZ um OX durch einen Winkel φ drehen, so dass sie, nach der Drehung, in der neuen Lage XZ' mit der bezüglichen Meridian-Ebene zusammenfällt, so bleibt in der neuen Coordinaten-Bestimmung $\frac{t}{w}$ unverändert, während wir für $\frac{v}{w}\cdot\cos\varphi$ erhalten $\frac{v}{w}$, das auf OZ' als gewöhnliche Linien-Coordinate zu construiren ist. Um hiernach die Gleichung der Meridian-Curve in ihrer eigenen Ebene zu erhalten, haben wir in der Gleichung (13) v statt $v\cdot\cos\varphi$ zu schreiben, wonach dieselbe in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned}&(F\sin^2\varphi - 2K\sin\varphi\cos\varphi + E\cos^2\varphi)w^2\\ &+ 2(R\sin^2\varphi - O\sin\varphi\cos\varphi - U\cos^2\varphi)tw\\ &+ (B\sin^2\varphi + 2G\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi)t^2\\ -2(Q\sin\varphi - P\cos\varphi)vw &- 2(J\sin\varphi + H\cos\varphi)tv + Av^2 = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Wenn wir φ als veränderlich betrachten, so stellen die letzten Gleichungen den Inbegriff aller Meridian-Curven dar, mit anderen Worten die Meridianfläche selbst.

In dem Falle der Gleichungen (13) und (14) geschieht dieses in der Weise, dass, nachdem, durch die Annahme der Meridian-Ebene, φ einen bestimmten Werth erhalten hat, diese Gleichungen die Projection der Meridian-Curve auf XZ in Linien-Coordinaten t, v, w darstellen, wonach diese Curve selbst gegeben ist. Durch die letzte Gleichung (15) wird dieselbe Curve, nach Annahme von φ, in ihrer eigenen Ebene dargestellt. Dreht sich die Meridian-Ebene um OX, so ändert sich in ihr, abhängig von φ, die Meridian-Curve, welche die Meridianfläche erzeugt. In jeder ihrer Lagen ist sie bezogen auf die unverändert gebliebene Axe OX und eine veränderliche Axe OZ', die, mit und in der Meridian-Ebene, welche sie enthält, um OX sich dreht.

Wir sind somit zu einer analytischen Darstellung und Construction der Meridianflächen gelangt, welche der Darstellung und Construction der Aequatorialflächen ganz analog ist.

170. Die Gleichung des Poles der Axe OX in Beziehung auf die Curve zweiter Classe, welche, dem jedesmaligen Werthe von φ entsprechend, durch die Gleichung (14) dargestellt wird, ist die folgende:

$$(Q \operatorname{tang} \varphi - P)w + (J \operatorname{tang} \varphi + H)t - Av = 0.$$

Diese Curve (14) ist die Projection auf XZ der bezüglichen Meridian-Curve und also der fragliche Pol zugleich die Projection des Poles der Axe OX in Beziehung auf die Meridian-Curve selbst. Es sind also zwei der drei Coordinaten dieses Punctes:

$$x = \frac{J \operatorname{tang} \varphi + H}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}, \qquad z = \frac{-A}{Q \operatorname{tang} \varphi - P},$$

und die dritte ist:

$$y = z \cdot \operatorname{tang} \varphi = \frac{-A \operatorname{tang} \varphi}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}.$$

Zur Bestimmung des geometrischen Ortes der Pole von OX in Beziehung auf die verschiedenen Meridian-Curven haben wir φ zwischen den vorstehenden drei Gleichungen zu eliminiren. Setzen wir zu diesem Ende für tang φ seinen Werth $\frac{y}{z}$ in die zweite Gleichung, so kommt:

$$Qy - Pz + A = 0. \tag{16}$$

Die erste Gleichung gibt:

$$x = \frac{Jy + Hz}{Qy - Pz} = -\frac{Jy + Hz}{A},$$

woraus folgt:

$$Ax + Jy + Hz = 0. \tag{17}$$

Wir sind sonach zu dem folgenden Resultate gelangt:

Wenn eine Ebene um eine in ihr liegende feste Axe sich dreht, so ist der geometrische Ort der Pole dieser festen Axe in

Beziehung auf alle Complex-Curven, welche die Ebene während ihrer Umdrehung enthält, eine gerade Linie.

Wir wollen diese gerade Linie die Polare der Meridianfläche nennen.

171. Die vorstehende Gleichung (15) ist wiederum als die Gleichung der Complex-Fläche in gemischten Coordinaten anzusehen. Denn tang φ ist als eine dreier linearer Coordinaten $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{1}{z}$ eines Punctes (x, y, z) zu betrachten, während t, v, w Linien-Coordinaten in der Ebene bedeuten.

Um die in Rede stehende Meridianfläche in Punct-Coordinaten x, y, z darzustellen, gehen wir zu der mit (15) gleichbedeutenden Gleichung (12) zurück. Wir brauchen bloss statt der Linien-Coordinaten t, v, w, in welchen diese Gleichung die Projectionen der Meridian-Curven auf YZ in dieser Ebene ausdrückt, die beiden Punct-Coordinaten x und z einzuführen. Die bekannten Transformationen (Nr. 165. Note), auf den vorliegenden Fall angewandt, geben, wenn wir zugleich durch z^2 dividiren, die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[(Ry^2-Oyz-Uz^2)^2-(Fy^2-2Kyz+Ez^2)(By^2+2Gyz+Cz^2)]\\
&-2[(Jy+Hz)(Fy^2-2Kyz+Ez^2)-(Qy-Pz)(Ry^2-Oyz-Uz^2)]x\\
&+[(Qy-Pz)^2-A(Fy^2-2Kyz+Ez^2)]x^2\\
&-2[(Qy-Pz)(By^2+2Gyz+Cz^2)-(Jy+Hz)(Ry^2-Oyz-Uz^2)]\\
&+2[A(Ry^2-Oyz-Uz^2)-(Qy-Pz)(Jy+Hz)]x\\
&+[(Jy+Hz)^2-A(By^2+2Gyz+Cz^2)]=0. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Die Meridianflächen sind also, wie die Aequatorialflächen, von der vierten Ordnung.

172. Jede durch die Axe OX gehende gerade Linie schneidet die Fläche in vier Puncten, von welchen zwei auf dieser Axe zusammenfallen. Die Axe ist also ein Doppelstrahl der Meridianfläche. Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche in einer Curve vierter Ordnung, die auf dem Doppelstrahl derselben einen Doppelpunct hat. Dieser Punct rückt unendlich weit, wenn die schneidende Ebene dem Doppelstrahl parallel wird. Geht die Ebene durch den Doppelstrahl, so wird dieser auch eine Doppellinie der Durchschnitts-Curve. In Folge davon reducirt sich diese auf die zweite Ordnung, indem sie eine Complex-Curve wird.

§ 4.

Meridianflächen, umhüllt von Complex-Kegeln, deren Mittelpuncte in gerader Linie liegen.

173. Alle Linien eines Complexes des zweiten Grades, welche einer gegebenen geraden Linie begegnen, lassen sich in doppelter Weise zusammengruppiren; einerseits bilden sie die Gesammtheit der Tangenten unendlich vieler Complex-Curven zweiter Classe, deren Ebenen durch die gerade Linie gehen, andererseits die Gesammtheit der Seiten unendlich vieler Complex-Kegel zweiter Ordnung, deren Mittelpuncte auf der gegebenen geraden Linie liegen. Wir können hiernach dieselben Complex-Flächen, welche wir in den beiden vorhergehenden Paragraphen als durch Complex-Curven beschrieben ansahen, nunmehr von Complex-Kegeln umhüllt betrachten.

In Uebereinstimmung hiermit lassen sich von einem beliebigen Puncte einer gegebenen geraden Linie aus in jeder durch diese Linie gehenden Ebene zwei Tangenten an die in ihr liegende Complex-Curve legen. Diese beiden Linien sind Linien des Complexes und erzeugen, wenn die Ebene um die gegebene gerade Linie als Axe sich dreht, eine Kegelfläche, die dem Complexe angehört, die den angenommenen Punct zum Mittelpuncte hat und die der betreffenden Complexfläche umschrieben ist. So entspricht jedem Puncte der gegebenen geraden Linie ein Complex-Kegel, der, weil er von jeder durch seinen Mittelpunct gehenden Ebene in zwei geraden Linien geschnitten wird, von der zweiten Ordnung ist. Die Curve, in welcher ein solcher Kegel die Complex-Fläche berührt, ist im Allgemeinen keine ebene Curve, so wie die Tangential-Ebenen der Fläche in den Puncten einer Complex-Curve im Allgemeinen keine Kegelfläche umhüllen.

174. Wir wollen von der allgemeinen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& A(x-x')^2 \quad + \quad B(y-y')^2 \quad + \quad C(z-z')^2 \\
& + D(yz'-y'z)^2 \quad + \quad E(x'z-xz')^2 \quad + \quad F(xy'-x'y)^2 \\
& + 2G(y-y')(z-z') + 2H(x-x')(z-z') + 2J(x-x')(y-y') \\
& + 2K(xy'-x'y)(x'z-xz') + 2L(xy'-x'y)(yz'-y'z) + 2M(x'z-xz')(yz'-y'z) \\
& + 2N(x-x')(yz'-y'z) + 2O(y-y')(x'z-xz') \\
& + 2P(x-x')(x'z-xz') + 2Q(x-x')(xy'-x'y) \\
& + 2R(y-y')(xy'-x'y) + 2S(y-y')(yz'-y'z) \\
& + 2T(z-z')(yz'-y'z) + 2U(z-z')(x'z-xz') = 0,
\end{aligned} \tag{II}$$

welche den Complex zweiten Grades in Strahlen-Coordinaten darstellt, ausgehen. Betrachten wir in dieser Gleichung x', y', z' als constant, so stellt dieselbe einen Kegel zweiter Ordnung dar, welcher durch alle diejenigen Puncte des Raumes geht, deren Coordinaten x, y, z die Gleichung befriedigen. Dieser Kegel hat den Punct (x', y', z') zum Mittelpunct und ist der geometrische Ort für die durch denselben gehenden Linien des Complexes.

Der Durchschnitt dieses Kegels mit einer der drei Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der vorstehenden Gleichung bezüglich x, y, z gleich Null setzen. Auf diese Weise erhalten wir, wenn wir nur den Durchschnitt mit YZ berücksichtigen, die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Gy'z' + 2Hx'z' + 2Jx'y') \\
&- 2(Cz' + Gy' + Hx' - (N-O)x'y' + Px'^2 - Sy'^2 - Ty'z' + Ux'z')z \\
&+ (C + Dy'^2 + Ex'^2 - 2Mx'y' - 2Ty' + Ux')z^2 \\
&- 2(By' + Gz' + Jx' + Nx'z' - Qx'^2 - Rx'y' + Sy'z' + Tz'^2)y \\
&- 2(Dy'z' - G + Kx'^2 - Lx'y' - Mx'z' - Ox' + Sy' - Tz')yz \\
&+ (B + Dz'^2 + Fx'^2 - 2Lx'z' - 2Rx' + 2Sz')y^2 = 0. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist derjenigen analog, welche wir Nr. 162. aus der Gleichung des Complexes in Axen-Coordinaten abgeleitet haben, um die Projection der in der Ebene (t', u', v', w') liegenden Complex-Curve auf die Coordinaten-Ebene YZ darzustellen. Um die neue Gleichung aus der früheren (1) direct abzuleiten, haben wir in dieser nur w und w' gleich 1 zu setzen und dann nach den Vertauschungsregeln der 153. Nummer zu verfahren.

175. Die Gleichung (19) stellt in der Coordinaten-Ebene YZ eine Curve zweiter Ordnung dar, den Ort der Durchschnittspuncte aller Linien des Complexes, welche durch den gegebenen Punct (x', y', z') gehen, mit dieser Ebene. Der Kegel ist damit vollkommen bestimmt.

Wenn wir in dieser Gleichung neben y und z auch x', y', z' als veränderlich betrachten und als die Coordinaten des Mittelpunctes eines Complex-Kegels ansehen, so können wir sagen, dass die vorstehende Gleichung (19) den Inbegriff aller Complex-Kegel und demnach auch den Complex selbst darstelle.

Wir wollen den Punct (x', y', z') auf einer geraden Linie fortrücken lassen. Alsdann umhüllen die bezüglichen Complex-Kegel eine Complex-Fläche. Nehmen wir für diese gerade Linie insbesondere die Coordinaten-Axe OX, so ist die umhüllte Fläche dieselbe Meridianfläche, die wir im vorigen Paragraphen als den geometrischen Ort solcher Complex-Curven, deren Ebenen in derselben Axe sich schneiden, bestimmt haben.

176. Indem wir, der gemachten Voraussetzung entsprechend, y' und z' gleich Null setzen, geht die letzte Gleichung in die folgende über:

$$(Fx'^2 - 2Rx' + B)y^2 - 2(Kx'^2 - Ox' - G)yz + (Ex'^2 + 2Ux' + C)z^2$$
$$+ 2(Qx' - J)x'y - 2(Px' + H)x'z + Ax'^2 = 0. \tag{20}$$

Diese Gleichung stellt also, wenn wir neben y und z auch x' als veränderlich betrachten, den Inbegriff aller Kegelflächen des Complexes dar, deren Mittelpuncte auf der Axe OX liegen, und ist daher, in dem oben festgestellten Sinne, als die Gleichung der von ihnen umhüllten Complex-Fläche anzusehen. Die Gleichung gibt in Punct-Coordinaten die Basis einer solchen Kegelfläche in YZ, nachdem der Mittelpunct derselben durch x' bestimmt worden ist. Jede gerade Linie, welche diesen Punct mit einem Puncte der Basis verbindet, ist eine Seite des Kegels.

Wir können die Tangential-Ebenen des Kegels direct construiren und zwar dadurch, dass wir durch seinen Mittelpunct und die Tangenten der Basis in YZ Ebenen legen. Eine Coordinate einer solchen Tangential-Ebene ist:

$$\frac{t}{w} = -\frac{1}{x'},$$

wonach wir die letzte Gleichung unter der folgenden Form schreiben können:

$$(Fw^2 + 2Rtw + Bt^2)y^2 - 2(Kw^2 + Otw - Gt^2)yz + (Ew^2 - 2Utw + Ct^2)z^2$$
$$+ 2(Qw + Jt)wy - 2(Pw - Ht)wz + Aw^2 = 0. \tag{21}$$

Die vorstehende Gleichung stellt in gemischten Punct- und Ebenen-Coordinaten die Meridianfläche dar.

177. Es sind die Tangential-Ebenen der Umhüllungskegel zugleich Tangential-Ebenen der umhüllten Complex-Fläche. Durch die Annahme von $\frac{t}{w}$, der einen Coordinate einer solchen Ebene, ist der Mittelpunct des entsprechenden Umhüllungskegels bestimmt. Die beiden anderen Coordinaten einer solchen Tangential-Ebene sind, weil diese Ebene durch eine Tangente der Basis des Kegels in YZ geht, identisch mit den beiden Coordinaten dieser Tangente in ihrer Ebene. Führen wir also statt der beiden Punct-Coordinaten y und z in die letzte Gleichung die Linien-Coordinaten $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ ein, wonach diese Gleichung unter Anwendung der Transformationsformeln (Nr. 165. Note) nach Division durch w^2 in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned}
&[(Kw^2+Otw-Gt^2)^2-(Fw^2+2Rtw+Bt^2)(Ew^2-2Utw+Ct^2)]\\
&-2[(Pw-Ht)(Fw^2+2Rtw+Bt^2)-(Qw+Jt)(Kw^2+Otw-Gt^2)]v\\
&+[(Qw+Jt)^2-A(Fw^2+2Rtw+Bt^2)]v^2\\
&+2[(Qw+Jt)(Ew^2-2Utw+Ct^2)-(Pw-Ht)(Kw^2+Otw-Gt^2)]u\\
&-2[A(Kw^2+Otw-Gt^2)-(Qw+Jt)(Pw-Ht)]uv\\
&+[(Pw-Ht)^2-A(Ew^2-2Utw+Ct^2)]u^2=0, \qquad (22)
\end{aligned}$$

so stellt diese Gleichung in Plan-Coordinaten dieselbe Meridianfläche dar, welche wir im vorigen Paragraphen durch die Gleichung (18) in Punct-Coordinaten dargestellt haben.

Die Meridianflächen sind sowohl Flächen der vierten Ordnung als Flächen der vierten Classe.

178. Um die Polar-Ebene der Axe OX in Beziehung auf eine beliebige der Kegelflächen zu erhalten, deren Mittelpuncte auf dieser Axe liegen, brauchen wir bloss durch den jedesmaligen Mittelpunct derselben und die Polare des Anfangspunctes der Coordinaten in Bezug auf die Durchschnitts-Curve in YZ eine Ebene zu legen. Nehmen wir, nachdem x' angenommen worden ist, die Gleichung (20) für die Gleichung dieser Durchschnitts-Curve, so erhalten wir bekanntlich für die fragliche Polare, nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors x', die Gleichung:

$$(Qx'-J)y-(Px'+H)z+Ax'=0.$$

Danach wird die Gleichung der Polarebene:

$$-Ax+(Qx'-J)y-(Px'+H)z+Ax'=0. \qquad (23)$$

Diese Gleichung wird insbesondere, unabhängig von x', befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\begin{aligned}
Ax+Jy+Hz&=0,\\
Qy-Pz+A&=0.
\end{aligned}$$

Also schneiden sich die Polarebenen der Coordinaten-Axe OX in Beziehung auf alle Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf OX liegen, in derselben geraden Linie, die durch die letzten beiden Gleichungen dargestellt wird.

Diese beiden Gleichungen sind aber dieselben, welche wir früher (Nr. 170.) für die Polare der Meridianfläche erhalten haben.

Die Polare einer Meridianfläche steht also zu derselben in der doppelten Beziehung, dass sie einerseits der geometrische Ort ist für die Pole des Doppelstrahles der Fläche in Beziehung auf alle Meridian-Curven, und dass sie andererseits umhüllt wird von den Polarebenen derselben geraden Linie in Beziehung auf alle umhüllenden Complex-Kegel.

179. Durch jede die Axe OX schneidende gerade Linie lassen sich an die Complex-Fläche vier Tangential-Ebenen legen, von welchen zwei durch diese Axe gehen. Diese Axe ist also eine Doppelaxe der Meridianfläche. Von einem beliebigen Puncte aus lässt sich an die Fläche ein Kegel vierter Classe legen, der eine durch OX gehende Doppelebene hat. Wenn insbesondere der Punct auf der Doppelaxe der Complex-Fläche angenommen wird, so wird dieselbe auch eine Doppellinie des Berührungskegels vierter Classe, das heisst eine durch den Mittelpunct desselben gehende gerade Linie, welche von unendlich vielen Tangential-Ebenen umhüllt wird. Dadurch reducirt sich der Kegel auf die zweite Classe, indem er ein Complex-Kegel wird.

Wenn wir die in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate in Verbindung bringen, so gelangen wir zu der Folgerung, dass die Coordinaten-Axe OX zugleich ein Doppelstrahl und eine Doppelaxe derselben Meridianfläche ist. Wir können also von der Doppellinie der Meridianfläche sprechen und dieselbe einmal als Doppelstrahl, das andere Mal als Doppelaxe auffassen.

§ 5.

Aequatorialflächen, von Cylinderflächen des Complexes umhüllt, deren Seiten einer festen Ebene parallel sind.

180. In die Reihe der Complex-Kegel, welche eine Meridianfläche umhüllen, gehört ein Cylinder, dessen Mittelpunct auf der Doppellinie derselben unendlich weit liegt. Es gibt unendlich viele solcher Cylinderflächen. Jeder gegebenen Richtung sind die Seiten eines solchen Cylinders so wie die Axe desselben parallel. Es ist augenscheinlich, dass nicht irgend zwei Cylinder eine gemeinsame Seite haben, dass alle Seiten aller Cylinder den Inbegriff aller Linien des Complexes bilden. Wir können die Cylinder zu Gruppen von je unendlich vielen zusammennehmen, deren Axen einer gegebenen Ebene parallel sind. Dann umhüllen solche Cylinder eine Fläche. Zur leichtern Uebersicht eines Complexes können wir also auch die unendlich vielen (∞^3) Linien desselben zu unendlich vielen (∞^2) Gruppen verbinden, deren jede aus den Seiten eines Cylinders besteht, und wiederum statt der unendlich vielen

(∞^2) Cylinder unendlich viele (∞) Flächen, deren jede von unendlich vielen (∞) solchen Cylindern umhüllt wird, einführen.

Diejenige Fläche, welche von den unendlich vielen Complex-Cylindern umhüllt wird, deren Axen einer gegebenen Ebene parallel sind, ist keine andere, als diejenige Aequatorialfläche, die von Complex-Curven in Ebenen, welche der gegebenen parallel sind, gebildet wird. Die Aequatorialfläche ist als eine der vorhin betrachteten Complex-Flächen anzusehen, deren Doppellinie unendlich weit liegt und deren Polare ihr Durchmesser ist.

181. Um durch eine einzige Gleichung den Inbegriff aller Complex-Cylinder darzustellen, brauchen wir bloss in der Gleichung (19) des vorigen Paragraphen x', y', z' unendlich gross zu nehmen. Dann erhalten wir die folgende, in Beziehung auf diese Grössen homogene Gleichung:

$$\begin{gathered}[Fx'^2-2Lx'z'+Dz'^2]y^2-2[Kx'^2-Lx'y'-Mx'z'+Dy'z']yz+[Ex'^2-2Mx'y'+Dy'^2]z^2 \\ +2[Qx'^2+Rx'y'-Nx'z'-Sy'z'-Tz'^2]y-2[Px'^2-(N-O)x'y'-Sy'^2+Ux'z'+Ty'z']z \\ +[Ax'^2+2Jx'y'+By'^2+2Hx'z'+2Gy'z'+Cz'^2]=0. \qquad (24)\end{gathered}$$

Wenn wir, unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen, die Winkel, welche die jedesmalige Richtung der Axe des Cylinders mit den drei Coordinaten-Axen bildet, durch α, β, γ bezeichnen, so ist:

$$x':y':z' = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma;$$

wir können demnach $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ an die Stelle von x', y', z' in die letzte Gleichung einführen. Nachdem diese drei Cosinus bestimmt worden sind, stellt dann die vorstehende Gleichung diejenige Curve zweiter Ordnung dar, in welcher der bezügliche Cylinder die Coordinaten-Ebene YZ schneidet. Wenn wir die drei Cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, zwischen welchen die bekannte Relation besteht:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

ebenfalls als veränderlich ansehen, so können wir dieselbe Gleichung (24), welche jetzt die folgende Form angenommen hat:

$$\begin{gathered}[F\cos^2\alpha-2L\cos\alpha\cos\gamma-D\cos^2\gamma]y^2 \\ -2[K\cos^2\alpha-L\cos\alpha\cos\beta-M\cos\alpha\cos\gamma+D\cos\beta\cos\gamma]yz \\ +[E\cos^2\alpha-2M\cos\alpha\cos\beta+D\cos^2\beta]z^2 \\ +2[Q\cos^2\alpha+R\cos\alpha\cos\beta-N\cos\alpha\cos\gamma-S\cos\beta\cos\gamma-T\cos^2\gamma]y \\ -2[P\cos^2\alpha-(N-O)\cos\alpha\cos\beta-S\cos^2\beta+U\cos\alpha\cos\gamma-T\cos\beta\cos\gamma]z \\ +[A\cos^2\alpha+2J\cos\alpha\cos\beta+B\cos^2\beta+2H\cos\alpha\cos\gamma+2G\cos\beta\cos\gamma+C\cos^2\gamma]=0, \quad (25)\end{gathered}$$

auch als die Gleichung des Complexes selbst ansehen. In ihr kommen sämmtliche Constante der allgemeinen Complex-Gleichung vor. Die hier auftretenden Grössen:

$$y,\ z,\qquad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\qquad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$$

vertreten bei dieser Darstellung des Complexes die Veränderlichen r, s, ϱ, σ der Gleichung (I) oder p, q, π, $\varkappa$ der Gleichung (III).

182. Setzen wir voraus, dass die Axen aller Cylinder einer gegebenen Ebene, für welche wir die Ebene XZ nehmen wollen, parallel sind, so verschwindet y' gegen x' und z', oder $\cos\alpha$ wird gleich Null. Die vorstehende allgemeine Gleichung (24) geht alsdann in die folgende über:

$$[Fx'^2-2Lx'z'+Dz'^2]y^2-2[Kx'-Mz']x'\cdot yz+Ex'^2\cdot z^2$$
$$+2[Qx'^2-Nx'z'-Tz'^2]y-2[Px'+Uz']x'\cdot z+[Ax'^2+2Hx'z'+Cz'^2]=0. \quad (26)$$

Zum Behuf der Uebereinstimmung mit den Entwickelungen des zweiten Paragraphen wollen wir, unter Berücksichtigung der Vertauschungsregeln des ersten Paragraphen, die beiden Axen OX und OY mit einander vertauschen. Dann finden wir:

$$[Fy'^2-2Ky'z'+Ez'^2]x^2-2[Ly'-Mz']y'\cdot xz+Dy'^2\cdot z^2$$
$$-2[Ry'^2-Oy'z'-Uz'^2]x+2[Sy'+Tx']y'\cdot z+[By'^2+2Gy'z'+Cz'^2]=0. \quad (27)$$

Diese Gleichung stellt den Inbegriff der Cylinder dar, deren Axen der Ebene YZ parallel sind, oder, was dasselbe heisst, die Aequatorialfläche, welche von diesen Cylindern umhüllt wird.

Die letzte Gleichung geht, wenn wir durch z^2 dividiren und nach der Division:

$$\frac{y'}{z'}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\operatorname{tang}\gamma$$

setzen, in die folgende über:

$$[F\operatorname{tang}^2\gamma-2K\operatorname{tang}\gamma+E]x^2-2[L\operatorname{tang}\gamma-M]\operatorname{tang}\gamma\cdot xz+D\operatorname{tang}^2\gamma\cdot z^2$$
$$-2[R\operatorname{tang}^2\gamma-O\operatorname{tang}\gamma-U]x+2[S\operatorname{tang}\gamma+J]\operatorname{tang}\gamma\cdot z$$
$$+[B\operatorname{tang}^2\gamma+2G\operatorname{tang}\gamma+C]=0. \quad (28)$$

Wir wollen schliesslich, statt der bisher betrachteten Durchschnittscurve mit XZ, die Durchschnitts-Curve des Cylinders mit derjenigen Ebene bestimmen, welche auf der Axe des Cylinders senkrecht steht. Zu diesem Ende vertauschen wir in der vorstehenden Gleichung, während x ungeändert bleibt, z mit $z\cdot\cos\gamma$. Dann kommt, wenn wir mit $\cos^2\gamma$ multipliciren:

$$[F\sin^2\gamma-2K\sin\gamma\cos\gamma+E\cos^2\gamma]x^2-2[L\sin\gamma-M\cos\gamma]\sin\gamma\cdot xz+D\sin^2\gamma\cdot z^2$$
$$-2[R\sin^2\gamma-O\sin\gamma\cos\gamma-U\cos^2\gamma]x+2[S\sin\gamma+T\cos\gamma]\sin\gamma\cdot z$$
$$+[B\sin^2\gamma+2G\sin\gamma\cos\gamma+C\cos^2\gamma]=0. \quad (29)$$

183. Um die Gleichung der Aequatorialfläche in Plan-Coordinaten zu erhalten, führen wir zunächst in die Gleichung (28) vermittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tang}\gamma = -\frac{v}{u}$$

den Quotienten der beiden Coordinaten $\frac{v}{w}$ und $\frac{u}{w}$ einer Tangential-Ebene des Cylinders ein, die auch eine Tangential-Ebene der Aequatorialfläche ist. Die Gleichung (28) verwandelt sich hiernach in die folgende, wenn wir zugleich mit u^2 multipliciren:

$$\begin{aligned}[Fv^2 + 2Kuv + Eu^2]x^2 - 2[Lv + Mu]v \cdot xz + Dv^2 \cdot z^2 \\ - 2[Rv^2 + Ouv - Uu^2]x + 2(Sv - Tu)v \cdot z + [Bv^2 - 2Guv + Cu^2] = 0. \quad (30)\end{aligned}$$

Die Gleichung (28) stellt für einen gegebenen Werth von γ die Durchschnittscurve des bezüglichen Cylinders mit der Coordinaten-Ebene XZ in Punct-Coordinaten x und z dar. Wir wollen, statt dieser Coordinaten, die Coordinaten der Tangenten der Curve einführen und für dieselben $\frac{t}{u}$ und $\frac{w}{u}$ nehmen. Diese beiden Coordinaten der Tangente an die Durchschnittscurve sind aber zugleich zwei Coordinaten der Tangential-Ebene des Cylinders und der Aequatorialfläche, deren dritte Coordinate $\frac{v}{u}$ ist. Auf diese Weise finden wir für die Gleichung der Aequatorialfläche in Plan-Coordinaten, nach Division durch v^2:

$$\begin{aligned}&[(Lv + Mu)^2 - D(Fv^2 + 2Kuv + Eu^2)]w^2 \\ &+ 2[(Sv - Tu)(Fv^2 + 2Kuv + Eu^2) - (Lv + Mu)(Rv^2 + Ouv - Uu^2)]w \\ &+ [(Rv^2 + Ouv - Uu^2)^2 - (Fv^2 + 2Kuv + Eu^2)(Bv^2 - 2Guv + Cu^2)] \\ &- 2[D(Rv^2 + Ouv - Uu^2) - (Lv + Mu)(Sv - Tu)]tw \\ &- 2[(Lv + Mu)(Bv^2 - 2Guv + Cu^2) - (Sv - Tu)(Rv^2 + Ouv - Uu^2)]t \\ &+ [(Sv - Tu)^2 - D(Bv^2 - 2Guv + Cu^2)]t^2 = 0. \quad (31)\end{aligned}$$

Die Aequatorialflächen sind also, wie die Meridianflächen, zugleich von der vierten Ordnung und der vierten Classe. Die in YZ unendlich weit liegende Doppelaxe der Fläche ist in der vorstehenden Gleichung dadurch angezeigt, dass u und v in keiner niederen Potenz vorkommen, als der zweiten. Die unendlich weit liegende Doppelaxe der Aequatorialfläche ist nach dem zweiten Paragraphen zugleich ein Doppelstrahl derselben. Wir können also sagen, dass die Aequatorialflächen eine unendlich weit liegende Doppellinie haben.

184. Die Polarebene der in YZ unendlich weit liegenden Doppellinie

in Beziehung auf einen beliebigen Complex-Cylinder, der die Ebene XZ nach der Curve (28) schneidet, geht durch denjenigen Durchmesser der Durchschnittscurve, welche der Richtung der Coordinaten-Axe OZ zugeordnet ist. Für die Gleichung dieses Durchmessers erhalten wir, indem wir die Gleichung (28) nach z differentiiren:

$$-(L \tang \gamma - M)x + D \tang \gamma \cdot z + (S \tang \gamma + T) = 0$$

und hieraus für die Gleichung der Polarebene:

$$-(L \tang \gamma - M)x - Dy + D \tang \gamma \cdot z + (S \tang \gamma + T) = 0.$$

Diese Gleichung wird insbesondere, unabhängig von $\tang \gamma$, befriedigt, wenn zugleich:

$$Dz - Lx + S = 0,$$
$$Dy - Mx - T = 0.$$

Also schneiden sich die Polarebenen der in YZ unendlich weit liegenden geraden Linie in Beziehung auf alle Complex-Cylinder, deren Axen dieser Ebene parallel sind, in einer festen geraden Linie, die durch die vorstehenden beiden Gleichungen dargestellt wird.

Diese beiden Gleichungen sind aber dieselben, welche wir früher (Nr. 164.) zur Bestimmung des Durchmessers der Aequatorialfläche erhalten haben.

Der Durchmesser einer Aequatorialfläche steht also zu derselben in der doppelten Beziehung, dass er einmal der geometrische Ort ist für die Mittelpuncte der Breiten-Curven, welche die Fläche erzeugen, andererseits dass er umhüllt wird von den Polarebenen derjenigen geraden Linie, welche in den Ebenen der Breiten-Curven unendlich weit liegt, in Beziehung auf die umhüllenden Complex-Cylinder.

185. Die folgenden drei Gleichungen stellen in YZ, XZ, XY die Basen derjenigen drei Complex-Cylinder dar, deren Axen bezüglich den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel sind:

$$\left.\begin{aligned} Fy^2 - 2Kyz + Ez^2 + 2Qy - 2Pz + A &= 0, \\ Fx^2 - 2Lxz + Dz^2 + 2Sz - 2Rx + B &= 0, \\ Ex^2 - 2Mxy + Dy^2 + 2Ux - 2Ty + C &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Die zweite dieser Gleichungen ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung (30), wenn wir in dieser Gleichung U gleich Null setzen, und dann ergeben sich nach den Vertauschungsregeln der 155. Nummer die beiden übrigen.

§ 6.

Analytische Bestimmung der Doppelpuncte und Doppelebenen der Complex-Flächen.

186. Es sei

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + 2d\alpha\gamma + 2e\beta\gamma + f\gamma^2 = 0$$

eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den Veränderlichen α, β, γ. Dann erhalten wir die folgende algebraische Zerlegung:

$$\begin{aligned}
&a(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + 2d\alpha\gamma + 2e\beta\gamma + f\gamma^2)\\
&= [a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma]\cdot[a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma]\\
&\qquad - 2[(bd-ae) - \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)}]\beta\gamma\\
&= [a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma]\cdot[a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma]\\
&\qquad - 2[(bd-ae) + \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)}]\beta\gamma.
\end{aligned}$$

Wenn also

$$(bd-ae) - \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)} = 0, \tag{33}$$

so löst sich die gegebene Gleichung zweiten Grades in die folgenden beiden Gleichungen ersten Grades auf:

$$\left.\begin{aligned}
a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma = 0,\\
a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

wenn

$$(bd-ae) + \sqrt{(b^2-ac)}\sqrt{(d^2-af)} = 0, \tag{35}$$

in die folgenden beiden:

$$\left.\begin{aligned}
a\alpha + (b+\sqrt{b^2-ac})\beta + (d-\sqrt{d^2-af})\gamma = 0,\\
a\alpha + (b-\sqrt{b^2-ac})\beta + (d+\sqrt{d^2-af})\gamma = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Die beiden Bedingungs-Gleichungen (33) und (35) können wir in die folgende zusammenfassen:

$$(bd-ae)^2 - (b^2-ac)(d^2-af) = 0. \tag{37}$$

Wird also diese Bedingungs-Gleichung befriedigt, so löst sich die gegebene Gleichung zweiten Grades in zwei Gleichungen des ersten Grades auf.

In den Gleichungsformen (34) und (36) treten zwei der Veränderlichen, β und γ, in gleicher, die dritte α tritt in ausgezeichneter Weise auf. Wir erhalten also, und zwar durch blosse Buchstaben-Vertauschung, neben der vorstehenden Zerlegung noch zwei ganz analoge. Dem entsprechend können wir die Bedingungs-Gleichung (37) auch unter der folgenden Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l}(be-cd)^2-(b^2-ac)(e^2-cf)=0,\\(de-fb)^2-(d^2-af)(e^2-cf)=0.\end{array}\right\}\qquad(38)$$

Endlich gehen die drei vorstehenden, unter sich identischen Gleichungen wenn wir entwickeln, in die folgende über:

$$acf-ae^2-cd^2-fb^2+2bde=0.\qquad(39)$$

Die drei Gleichungsformen (37) und (38) zeigen, dass, im Falle die Zerlegung stattfindet, die drei Ausdrücke:

$$(b^2-ac),\qquad(d^2-af),\qquad(e^2-cf)$$

Werthe von gleichem Zeichen haben. Sind diese Zeichen positiv, so ist die Zerlegung eine reelle, sind sie negativ, eine imaginäre. Verschwinden gleichzeitig zwei der drei Ausdrücke, was in Folge der Bedingungs-Gleichungen (37) und (38) das Verschwinden des dritten nach sich zieht, so werden die beiden Gleichungen, in welche die gegebene sich auflöst, unter sich identisch. Zugleich hat man:

$$(bd-ae)=0,\qquad(be-cd)=0,\qquad(de-fb)=0.$$

Die gegebene homogene Gleichung zweiten Grades löst sich in die beiden Gleichungen ersten Grades (34) oder in die beiden Gleichungen (36) auf, je nachdem die Bedingungs-Gleichung (33) oder die Bedingungs-Gleichung (35) befriedigt wird. Diesem entspricht, dass, im Falle einer reellen Zerlegung, der Ausdruck $(bd-ae)$ einmal positiv, das andere Mal negativ ist, umgekehrt, dass, im Falle einer imaginären Zerlegung, derselbe Ausdruck einmal negativ, das andere Mal positiv ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet, je nachdem der Ausdruck $(bd-ae)$ mit einem der drei Ausdrücke

$$(b^2-ac),\qquad(d^2-af),\qquad(e^2-cf),$$

und also mit allen, im Zeichen übereinstimmt oder nicht.

An die vorstehenden Gleichungen (37) und (38) knüpfen sich noch einige Transformationen, welche in dem Folgenden ihre unmittelbare Anwendung finden.

Die Gleichung (37) gibt:

$$\frac{bd-ae}{d^2-af}=\frac{b^2-ac}{bd-ae}=\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{d^2-af}}.\qquad(40)$$

Hierbei ist das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet.

Ferner geben die Gleichungen (38):

$$\frac{be-cd}{de-fb} = \pm \frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{d^2-af}}, \tag{41}$$

wobei die Zeichen der Ausdrücke $(be-cd)$ und $(de-fb)$ unmittelbar das doppelte Vorzeichen bestimmen. Wenn überhaupt eine Zerlegung der gegebenen Function zweiten Grades in zwei lineare Factoren möglich ist, was durch die Bedingungs-Gleichung (39) ausgesprochen wird, so erhalten wir:

$$(bd-ae)(be-cd)(de-fb) = -(b^2-ac)(d^2-af)(e^2-cf).$$

Es folgt hieraus, dass wir in der Gleichung (41) das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen haben, jenachdem die Zerlegung (36) oder die Zerlegung (34) stattfindet.

187. Complex-Flächen in ihrer allgemeinsten Bestimmung, welche wir auch Meridianflächen genannt haben, sind solche Flächen, die einerseits durch eine veränderliche Complex-Curve, deren Ebene sich um eine feste in ihr liegende gerade Linie dreht, erzeugt, andererseits durch Complex-Kegel, deren Mittelpunct auf derselben geraden Linie fortrückt, umhüllt werden. An die erste Erzeugung der Fläche anknüpfend, haben wir zur analytischen Bestimmung der Fläche die Gleichung (15) erhalten. Setzen wir, der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} (F\sin^2\varphi - 2K\sin\varphi\cos\varphi + E\cos^2\varphi) &= a, \\ (R\sin^2\varphi - O\sin\varphi\cos\varphi - U\cos^2\varphi) &= b, \\ (B\sin^2\varphi + 2G\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi) &= c, \\ -(Q\sin\varphi - P\cos\varphi) &= d, \\ -(J\sin\varphi + H\cos\varphi) &= e, \\ A &= f, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

so können wir die Gleichung in der folgenden Weise schreiben:

$$aw^2 + 2btw + ct^2 + 2dvw + 2etv + fv^2 = 0. \tag{42}$$

Es ist hierbei OX für die feste gerade Linie, welche Doppellinie der Fläche wird, genommen und φ ist der Winkel, den die jedesmalige Meridianebene mit einer festen Ebene, der Coordinaten-Ebene XZ, bildet. Wenn wir in der jedesmaligen Meridianebene den Durchschnitt derselben mit YZ als Axe OZ nehmen und dieselbe als OZ' bezeichnen und die Doppellinie der Fläche als Axe OX beibehalten, so stellt die letzte Gleichung die bezügliche Complex-Curve in ihrer eigenen Ebene in gewöhnlichen Linien-Coordinaten dar.

Da die Constanten in der lezten Gleichung Functionen von φ sind, so ändert sich mit φ, das heisst mit der Lage der Meridianebene, die in derselben liegende Complex-Curve. Wenn wir zwischen diesen Constanten irgend eine Bedingungs-Gleichung statuiren und dadurch die Complex-Curve in ihr particularisiren, so gibt diese Gleichung die Meridianebene, in welcher die so particularisirte Curve liegt.

Die Complex-Curve artet insbesondere in ein System von zwei Puncten aus, wenn die Bedingungs-Gleichung (39), die wir auch so schreiben können:

$$f(b^2-ac)+ae^2+cd^2-2bde=0, \tag{44}$$

für die Constanten in ihrer Gleichung (43) erfüllt ist.

Die vorstehende Gleichung wird, wenn wir zu den Constanten des Complexes zurückgehen und zugleich durch $\cos^2\varphi$ dividiren:

$$\begin{aligned}A[(R\operatorname{tang}^2\varphi-O\operatorname{tang}\varphi-U)^2-(F\operatorname{tang}^2\varphi-2K\operatorname{tang}\varphi+E)(B\operatorname{tang}^2\varphi+2G\operatorname{tang}\varphi+C)]\\ +(J\operatorname{tang}\varphi+H)^2(F\operatorname{tang}^2\varphi-2K\operatorname{tang}\varphi+E)\\ +(Q\operatorname{tang}\varphi-P)^2(B\operatorname{tang}^2\varphi+2G\operatorname{tang}\varphi+C)\\ -2(J\operatorname{tang}\varphi+H)(Q\operatorname{tang}\varphi-P)(R\operatorname{tang}^2\varphi-O\operatorname{tang}\varphi-U)=0.\end{aligned} \tag{45}$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf $\operatorname{tang}\varphi$ vom vierten Grade. Es gibt also im Allgemeinen vier Meridianebenen, in welchen die Complex-Curven in Systemen von zwei Puncten ausarten. Da diese vier Ebenen durch die feste Coordinaten-Axe OX gehen, so liegen die vier Punctenpaare in den vier Ebenen auf vier geraden Linien, welche diese Axe schneiden. Die Punctenpaare, in welche die vier Complex-Curven ausarten, sind Doppelpuncte der Fläche. Wir wollen die vier geraden Linien, auf welchen diese Punctenpaare liegen, singuläre Strahlen der Complex-Fläche nennen.

Eine Complex-Fläche hat im Allgemeinen acht Doppelpuncte und vier, die Doppellinie der Fläche schneidende, singuläre Strahlen, welche die Doppelpuncte, paarweise genommen, enthalten.

188. Den vier Werthen von $\operatorname{tang}\varphi$ entsprechen vier Gruppen von Werthen für die Constanten der Gleichung (43). Für jede Gruppe von Werthen gibt diese Gleichung dann die Gleichungen der beiden Puncte in ihrer Meridianebene. Diese Gleichungen können wir in der folgenden zusammenfassen:

$$aw+(b\pm\sqrt{b^2-ac})t+(d\pm\sqrt{d^2-af})v'=0, \tag{46}$$

wobei wir, je nachdem die Zerlegung (34) oder (36) stattfindet, für die beiden

Puncte einmal die Wurzelausdrücke mit gleichem, das andere Mal mit ungleichem Vorzeichen nehmen müssen. Die beiden Coordinaten der beiden Puncte in der bezüglichen Meridianebene sind:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad z' = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a}, \tag{47}$$

wobei wir, wenn wir zu dem ursprünglichen Coordinaten-Systeme zurückgehen, statt des obigen Werthes von z' erhalten:

$$z = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a} \cdot \cos\varphi, \qquad y = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a} \cdot \sin\varphi. \tag{48}$$

Der singuläre Strahl, welcher die beiden Doppelpuncte verbindet, liegt in der durch φ bestimmten Meridianebene. Für seine Gleichung in dieser Ebene erhalten wir:

$$x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{d^2 - af}} \cdot z' + \frac{b\sqrt{d^2 - af} \mp d\sqrt{b^2 - ac}}{a\sqrt{d^2 - af}}, \tag{49}$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichung (40):

$$x = \frac{bd - ae}{d^2 - af} \cdot z' + \frac{de - fb}{d^2 - af} = \frac{b^2 - ac}{bd - ae} \cdot z' + \frac{e^2 - cf}{de - fb}. \tag{50}$$

In dieser Gleichung können wir statt z' nach einander $\frac{y}{\sin\varphi}$ und $\frac{z}{\cos\varphi}$ setzen und erhalten dann die Gleichungzn der Projectionen desselben Strahles auf XY und XZ.

Der singuläre Strahl schneidet von der Doppellinie OX ein Segment ab:

$$x_0 = \frac{de - fb}{d^2 - af} = \frac{e^2 - cf}{de - fe}, \tag{51}$$

und bildet mit derselben einen Winkel δ, bestimmt durch:

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{d^2 - af}{bd - ae} = \frac{bd - ae}{b^2 - ac}. \tag{52}$$

Der jedem der gefundenen Werthe von φ entsprechende singuläre Strahl ist immer reell, mögen die Ausdrücke

$$\sqrt{b^2 - ac} \quad \text{und} \quad \sqrt{d^2 - af}$$

reell oder imaginär sein. Die beiden Doppelpuncte auf dem singulären Strahle hingegen sind zugleich mit diesen beiden Ausdrücken reell oder imaginär.

Wenn eine beliebige Linie des Raumes als Doppellinie einer Fläche eines gegebenen Complexes zweiten Grades angnommen wird, so hängt die Bestimmung der vier Meridianebenen, welche die Doppelpuncte der Fläche enthalten, von der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades ab. Hiernach ist in dieser Meridianebene der singuläre Strahl, welcher die beiden Doppelpuncte in derselben verbindet, auf lineare Weise gegeben. Die Bestimmung der beiden Doppelpuncte auf dem singulären Strahl hängt dann schliesslich von der Auflösung einer quadratischen Gleichung ab. Die vier Meridianebenen, in welchen die singulären Strahlen der Fläche liegen, können paarweise imaginär sein; dann sind es auch die singulären Strahlen und die beiden Doppelpuncte. Aber auch wenn die singulären Strahlen reell sind, können die beiden auf ihnen liegenden Doppelpuncte sowohl imaginär als reell sein.

189. Dieselbe allgemeine Complex-Fläche, welche wir im dritten Paragraphen allgemein durch die Gleichung (15) bestimmt haben, haben wir, von der zweiten Bestimmungsweise eines Complexes ausgehend, im folgenden Paragraphen durch die Gleichung (20) dargestellt. Diese Gleichung können wir, indem wir, unter Fortlassung des Accentes von x':

$$\left.\begin{array}{r} (Fx^2 - 2Rx + B) \equiv a, \\ -(Kx^2 - \ Ox \ - G) \equiv b, \\ (Ex^2 + 2Ux + C) \equiv c, \\ (Qx - J) \equiv d, \\ -(Px + H) \equiv e, \\ A \equiv f \end{array}\right\} \tag{53}$$

setzen, in folgender Weise schreiben:

$$ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dy + 2ez + f = 0. \tag{54}$$

Sie stellt, nachdem x angenommen worden ist, in YZ die Basis derjenigen Kegelfläche dar, deren Mittelpunct auf der Doppellinie der Fläche liegt und durch die Annahme von x auf dieser Doppellinie bestimmt ist.

Die Coefficienten der vorstehenden Gleichung sind Functionen von x. Setzen wir insbesondere

$$f(b^2 - ac) + ae^2 + cd^2 - 2bde = 0, \tag{44}$$

so ist die Basis der Kegelfläche keine Curve zweiter Ordnung mehr, sondern diese Curve artet in ein System von zwei geraden Linien, die entsprechende Kegelfläche also in ein System von zwei Ebenen aus, deren Durchschnittslinie die Doppellinie der Fläche in dem durch x bestimmten Puncte trifft. Führen wir in die vorstehende Gleichung die ursprünglichen Constanten des Complexes wieder ein, so kommt, nach Fortlassung des gemeinschaftlichen Factors x^2:

$$A[(Kx^2 - Ox - G)^2 - (Fx^2 - 2Rx + B)(Ex^2 + 2Ux + C)]$$
$$+ (Px + H)^2 (Fx^2 - 2Rx + B) + (Qx - J)^2 (Ex^2 + 2Ux + C)$$
$$+ 2(Px + H)(Qx - J)(Kx^2 - Ox - G) = 0. \tag{55}$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf x vom vierten Grade. Es gibt also im Allgemeinen auf der Doppellinie der Meridianfläche vier Puncte, welche nicht mehr die Mittelpuncte umschriebener Complex-Kegel sind. Diese Complex-Kegel arten in Systeme von zwei Ebenen aus, deren Durchschnittslinie durch die vier Puncte geht. Diese Ebenen sind Doppelebenen der Fläche. Die Doppelebenen der Fläche ordnen sich zu vier Paaren zusammen; die beiden Doppelebenen jedes Paares schneiden sich nach vier geraden Linien, welche die Doppellinie der Fläche in den durch die Werthe von x bestimmten vier Puncten treffen. Wir nennen diese vier geraden Linien singuläre Axen der Meridianfläche.

Eine Complex-Fläche hat im Allgemeinen acht Doppelebenen, die, paarweise genommen, sich in den vier singulären Axen der Fläche schneiden. Die vier singulären Axen schneiden, wie die vier singulären Strahlen, die Doppellinie der Fläche.

190. Den vier Werthen von x entsprechen vier Gruppen von Werthen für die Constanten der Gleichung (51). Für jede Werthen-Gruppe stellt diese Gleichung ein System von zwei geraden Linien dar, in welchen die Coordinaten-Ebene YZ von zwei zusammengehörigen Doppelebenen geschnitten wird. Diese beiden Linien schneiden sich in demjenigen Puncte, in welchem die singuläre Axe, nach welcher die beiden Doppelebenen sich schneiden, die Ebene YZ trifft.

Für die Gleichung der beiden geraden Linien in YZ erhalten wir unmittelbar, nach den Entwickelungen der 185. Nummer, die folgenden:

$$ay + (b \pm \sqrt{b^2 - ac})z + (d \pm \sqrt{d^2 - af}) = 0, \tag{56}$$

wobei wir, jenachdem die Zerlegung (34) oder (36) stattfindet, für die beiden Linien einmal die Wurzelausdrücke mit gleichem, das andere Mal mit ungleichem Vorzeichen zu nehmen haben. Die Coordinaten der beiden geraden Linien in YZ sind:

$$\frac{v}{u} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad \frac{w}{u} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - af}}{a}, \tag{57}$$

und für die Gleichung ihres Durchschnittspunctes erhalten wir hiernach

$$v = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{d^2 - af}} \cdot w + \frac{b\sqrt{d^2 - af} \mp d\sqrt{b^2 - ac}}{a\sqrt{d^2 - af}} \cdot u, \tag{58}$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichung (40):

$$v = \frac{bd - ae}{d^2 - af} \cdot w + \frac{de - fb}{d^2 - af} \cdot u = \frac{b^2 - ac}{bd - ae} \cdot w + \frac{e^2 - cf}{de - fb} \cdot u. \tag{59}$$

Die Coordinaten dieses Punctes sind also:

$$y = \frac{de - fb}{bd - ae} = -\frac{be - cd}{b^2 - ac} = -\frac{e^2 - cf}{be - cd}, \quad z = -\frac{d^2 - af}{bd - ae} = -\frac{bd - ae}{b^2 - ac}. \tag{60}$$

Durch die Gleichung (58), verbunden mit der folgenden:

$$tx + w = 0, \tag{61}$$

ist die singuläre Axe analytisch bestimmt. Der Winkel φ_0, welchen die Meridianebene, die ihn enthält, mit XZ bildet, ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{be - cd}{bd - ae} = -\frac{de - fb}{d^2 - af} = -\frac{e^2 - cf}{de - fb}. \tag{62}$$

Wir erhalten endlich zur Bestimmung desjenigen Winkels ε, welchen die singuläre Axe mit OX, der Doppellinie der Fläche, bildet:

$$x \operatorname{tang} \varepsilon = \sqrt{\frac{(bd - ae)^2 + (be - cd)^2}{(b^2 - ac)^2}}. \tag{63}$$

Die Bestimmung der vier singulären Axen der Meridianfläche ist eine lineare, nachdem die vier Puncte, in welchen sie die Doppellinie schneiden, durch Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade bestimmt worden sind. Die Bestimmung der beiden Doppelebenen der Fläche, welche auf einer der singulären Axen sich schneiden, hängt von der Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades ab. Die vier Puncte, in welchen die singulären Axen die Doppellinie schneiden, können paarweise imaginär sein; dann sind es auch die singulären Axen. Aber auch, wenn die singulären Axen reell sind, können die in ihnen sich schneidenden Doppelebenen sowohl imaginär als reell sein.

191. Meridianflächen von besonderer Art haben zu ihrer Doppellinie eine Linie des Complexes selbst. In diesem Falle wird die Doppellinie von den die Fläche erzeugenden Curven in den verschiedenen Meridianebenen berührt. Zugleich ist sie gemeinschaftliche Seite der die Fläche umhüllenden Complex-Kegel.

Wenn wir wiederum die Axe OX zur Doppellinie der Meridianfläche nehmen, so erhalten wir, um auszudrücken, dass diese Linie dem Complexe angehört, die Bedingung, dass in der Gleichung desselben A verschwinde. In Folge davon verschwindet auch f in der Gleichung (43), so wie in der

Gleichung (54). Die Gleichung (45), durch welche die Lage der Meridianebenen, in denen die singulären Strahlen liegen, bestimmt wird, reducirt sich auf die folgende:

$$\begin{aligned}(J \operatorname{tang} \varphi + H)^2 (F \operatorname{tang}^2 \varphi - 2K \operatorname{tang} \varphi + E)\\ + (Q \operatorname{tang} \varphi - P)^2 (B \operatorname{tang}^2 \varphi + 2G \operatorname{tang} \varphi + C)\\ - 2(J \operatorname{tang} \varphi + H)(Q \operatorname{tang} \varphi - P)(R \operatorname{tang}^2 \varphi - O \operatorname{tang} \varphi - U) = 0. \qquad (64)\end{aligned}$$

Die Gleichung bleibt in Beziehung auf tang φ vom vierten Grade. Die Meridianfläche behält also ihre vier singulären Strahlen. Die beiden Doppelpuncte auf denselben haben nach (47) die folgenden Coordinaten:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad z' = \frac{2d}{a},\ 0. \qquad (65)$$

Der eine der beiden Puncte fällt in die Doppellinie der Fläche. Weil diese Bestimmung unabhängig ist von dem jedesmaligen Werthe von φ, so fällt einer der beiden Doppelpuncte auf jedem der vier singulären Strahlen in die Doppellinie der Fläche.

Der Werth von x_0, durch welchen auf der Doppellinie derjenige Punct, in welchem in dieselbe der singuläre Strahl einschneidet, bestimmt wird, reducirt sich, indem wir in (51) f verschwinden lassen, auf:

$$x_0 = \frac{e}{d} = \frac{J \operatorname{tang} \varphi + H}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}. \qquad (66)$$

192. In Folge der Voraussetzung, dass die Doppellinie der Meridianfläche selbst eine Linie des Complexes sei, reducirt sich die Gleichung (55), vermittelst welcher die Puncte bestimmt sind, in welchen die singulären Axen in die Doppellinie einschneiden, durch das Verschwinden von A auf:

$$\begin{aligned}(Px + H)^2 (Fx^2 - 2Rx + B) + (Qx - J)^2 (Ex^2 + 2Ux + C)\\ - 2(Px + H)(Qx - J)(Kx^2 - Ox - G) = 0. \qquad (67)\end{aligned}$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf x vom vierten Grade bleibt, behält die Meridianfläche ihre vier singulären Axen. Für die beiden Doppelebenen, welche durch eine der vier singulären Axen gehen, deren Durchschnitt mit der Doppellinie durch die vorstehende Gleichung bestimmt worden ist, erhalten wir aus der Gleichung (57) die folgenden Coordinaten:

$$u = a, \qquad v = b \pm \sqrt{b^2 - ac}, \qquad w = 2d,\ 0. \qquad (68)$$

Eine der beiden in einer der vier singulären Axen der Fläche sich schneidenden Doppelebenen der Fläche geht also durch die Doppellinie derselben.

Für den Winkel φ_0, den die durch die singuläre Axe gehende Meridian-ebene mit XZ bildet, haben wir, wenn wir in der Gleichung (62) f verschwinden lassen,

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = -\frac{e}{d} = \frac{Px + H}{Qx - J}. \tag{69}$$

193. Wir können die beiden Gleichungen

$$x_0 = \frac{J \operatorname{tang} \varphi + H}{Q \operatorname{tang} \varphi - P}, \tag{66}$$

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{Px + H}{Qx - J} \tag{69}$$

in folgender Weise schreiben:

$$\Phi(x_0, \operatorname{tang} \varphi) = 0, \qquad \Phi(x, \operatorname{tang} \varphi_0) = 0, \tag{70}$$

indem wir mit Φ beidesmal dieselbe Function bezeichnen. Führen wir den vorstehenden Werth von x_0 in die Gleichung (64) und den Werth von tang φ_0 in die Gleichung (67) ein, so kommt:

$$\left.\begin{array}{c} x_0^2(F \operatorname{tang}^2 \varphi - 2K \operatorname{tang} \varphi + E) + (B \operatorname{tang}^2 \varphi + 2G \operatorname{tang} \varphi + C) \\ -2x_0(R \operatorname{tang}^2 \varphi - O \operatorname{tang} \varphi - U) \equiv \\ \operatorname{tang}^2 \varphi (Fx_0^2 - 2Rx_0 + B) + (Ex_0^2 + 2Ux_0 + C) \\ -2 \operatorname{tang} \varphi (Kx_0^2 - Ox_0 - G) = 0, \\ \operatorname{tang}^2 \varphi_0 (Fx^2 - 2Rx + B) + (Ex^2 + 2Ux + C) \\ -2 \operatorname{tang} \varphi_0 (Kx^2 - Ox - G) \equiv \\ x^2(F \operatorname{tang}^2 \varphi_0 - 2K \operatorname{tang} \varphi_0 + E) + (B \operatorname{tang}^2 \varphi_0 + 2G \operatorname{tang} \varphi_0 + C) \\ -2x(R \operatorname{tang}^2 \varphi_0 - O \operatorname{tang} \varphi_0 - U) = 0. \end{array}\right\} \tag{71}$$

Indem wir durch Ψ wiederum dieselbe Function bezeichnen, können wir die vorstehenden Gleichungen schreiben:

$$\Psi(x_0, \operatorname{tang} \varphi) = 0, \qquad \Psi(x, \operatorname{tang} \varphi_0) = 0. \tag{72}$$

Wenn wir dann zwischen den beiden ersten Gleichungen (70) und (72) x_0, zwischen den beiden zweiten Gleichungen (70) und (72) x eliminiren, erhalten wir dieselbe Gleichung vierten Grades zur Bestimmung von φ und φ_0. Wenn wir zwischen denselben beiden Gleichungen-Paaren einmal tang φ, das andere Mal tang φ_0 eliminiren, erhalten wir dieselbe Gleichung vierten Grades zur Bestimmung von x_0 und x.

Die vier singulären Strahlen und die vier singulären Axen schneiden sich bezüglich in denselben Puncten der Doppellinie und liegen bezüglich in denselben, durch die Doppellinie gehenden, Ebenen.

Zur Bestimmung dieser Puncte und Ebenen erhalten wir also, wenn wir zusammenfassen, dieselben beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi\,(x, \operatorname{tang}\varphi) = 0,\\ \Psi\,(x, \operatorname{tang}\varphi) = 0,\end{array}\right\} \tag{73}$$

in denen wir x und tang φ als veränderlich betrachten.*)

194. In dem Falle, dass die Doppellinie der Complex-Fläche unendlich weit liegt, haben wir diese Fläche eine Aequatorialfläche genannt.

---

*) Jede der beiden Gleichungen (73) drückt, einzeln für sich genommen, wenn x und tang φ $\left(= -\frac{v}{u}\right)$ als veränderliche Grössen betrachtet werden, eine Relation zwischen der Lage eines auf der Coordinaten-Axe OX fortrückenden Punctes und einer um diese Axe sich drehenden Ebene aus: sie stellt einen geometrischen Ort dar. Die erste Gleichung, auf welche wir uns hier beschränken wollen, bestimmt in allgemeinster Weise, wie jeder Lage des Punctes eine einzige Lage der Ebene entspricht, und umgekehrt. Das ist beispielsweise der Fall, wenn der Punct auf einer Erzeugenden einer Linienfläche des zweiten Grades fortrückt, während die entsprechende Tangential-Ebene um dieselbe Erzeugende sich dreht. Es sei, zur analytischen Bestätigung, indem wir durch p und q irgend zwei lineare Functionen bezeichnen,

$$qy = pz$$

die Gleichung einer solchen Linienfläche, welche d e Coordinaten-Axe OX zu einer ihrer Erzeugenden hat. Dann ist die Gleichung der Tangential-Ebene der Fläche in irgend einem Puncte ihrer Erzeugenden, dem die Functionen-Werthe p' und q' entsprechen, die folgende:

$$q'y = p'z.$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p'}{q'} = \frac{gx + h}{g'x + h'},$$

wenn x auf den Berührungspunct bezogen wird und g, h, g', h' gehörig zu bestimmende Constanten bedeuten. Diese Gleichung hat die fragliche Form.

Wir können bei der geometrischen Deutung der durch eine solche Gleichung ausgedrückten Abhängigkeit zwischen einer Ebene und einem in ihr liegenden Puncte zwei gerade Linien von vorne herein beliebig annehmen und, indem wir die Ebene um die eine dieser beiden Linien sich drehen lassen, ihre verschiedenen Lagen durch tang φ bestimmen, während auf der zweiten geraden Linie die Lage des auf derselben fortrückenden Durchschnittspunctes mit der sich drehenden Ebene durch x bestimmt wird. Wenn wir zum Beispiel für die beiden geraden Linien irgend zwei zugeordnete Polaren eines linearen Complexes nehmen, so dreht sich, wenn ein Punct auf einer der beiden Polaren fortrückt, die diesem Puncte in dem Complexe entsprechende Ebene um die andere. Die obige Gleichungsform gibt das Drehungsgesetz der Ebene für ein gegebenes Fortrücken des Punctes.

Dasselbe Drehungsgesetz gilt für eine Ebene, welche durch einen Punct geht, der auf einer Erzeugenden einer Linienfläche fortrückt, und zugleich um eine zweite Linie derselben Erzeugung sich dreht. Dasselbe Gesetz gilt endlich für die Drehung der Meridianebene um die Doppellinie einer Complex-Fläche, wenn die Ebene durch einen Punct gelegt wird, welcher auf der Polare der Complex-Fläche fortrückt. Die analytische Bestätigung dieser letzten geometrischen Relation entnehmen wir unmittelbar der 170. Nummer, nach welcher die Gleichung des Textes:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Px + H}{Qx - J},$$

welche wir auch unter der folgenden Form schreiben können:

$$x = \frac{J \operatorname{tang}\varphi + H}{Q \operatorname{tang}\varphi - P},$$

für einen gegebenen Werth von φ, auf der Polaren der Complex-Fläche, durch den entsprechenden Werth von x, den Pol der Doppellinie, in Beziehung auf die Complex-Curve in der durch φ bestimmten Meridian-Ebene, gibt.

Nehmen wir die Ebene YZ für diejenige, in welcher die Doppellinie unendlich weit gerückt ist, so haben wir für die Gleichung der Aequatorialfläche die folgende erhalten:

$$\begin{aligned} &Dw^2 + 2(Lx - S)vw + (Fx^2 - 2Rx + B)v^2 \\ &+ 2(Mx + T)uw + 2(Kx^2 - Ox - G)uv + (Ex^2 + 2Ux + C) = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Wir denken uns dabei die Fläche durch eine veränderliche Complex-Curve erzeugt, deren Ebene parallel mit YZ ist und parallel mit dieser Ebene fortrückt. Die jedesmalige Ebene dieser Curve ist durch x bestimmt. In besonderen Fällen kann, wie bei den Meridianflächen, die Curve in ein System zweier Puncte ausarten. Die geraden Linien, welche solche zwei Puncte verbinden, sind singuläre Strahlen der Aequatorialfläche, die Puncte selbst Doppelpuncte derselben. Die singulären Strahlen der Aequatorialfläche sind der Coordinaten-Ebene YZ parallel, mit anderen Worten, sie schneiden die unendlich weit liegende Doppellinie derselben Fläche.

Setzen wir, der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} D &\equiv a, \\ (Lx - S) &\equiv b, \\ (Fx^2 - 2Rx + B) &\equiv c, \\ (Mx + T) &\equiv d, \\ (Kx^2 - Ox - G) &\equiv e, \\ (Ex^2 + 2Ux + C) &\equiv f, \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

so geht die vorstehende Gleichung (3) in die folgende über:

$$aw^2 + 2bvw + cv^2 + 2duw + 2euv + fu^2 = 0, \qquad (75)$$

und um auszudrücken, dass diese Gleichung ein System von zwei Puncten darstelle, gibt die Entwickelung von (41):

$$\begin{aligned} &D[(Kx^2 - Ox - G)^2 - (Fx^2 - 2Rx + B)(Ex^2 + 2Ux + C)] \\ &+ (Mx + T)^2 (Fx^2 - 2Rx + B) + (Lx - S)^2 (Ex^2 + 2Ux + C) \\ &+ (Lx - S)(Mx + T)(Kx^2 - Ox - G) = 0. \qquad (76) \end{aligned}$$

Da der Grad dieser Gleichung in Beziehung auf x der vierte ist, so hat auch eine Aequatorialfläche, wie eine Meridianfläche, im Allgemeinen vier singuläre Strahlen.

195. Der Mittelpunct der die Fläche erzeugenden Complex-Curve beschreibt bei der Erzeugung einen Durchmesser des Complexes, den wir als den Durchmesser der Aequatorialfläche bezeichnet haben (Nr. 164.). Wenn wir diesen Durchmesser für die bisher unbestimmt gebliebene Axe OX neh-

men, so verschwinden aus der Gleichung (3) diejenigen Glieder, welche w in der ersten Potenz enthalten, und damit dieses für jeden Werth von x geschehe, müssen die vier Complex-Constanten L, M, S und T verschwinden. Alsdann reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

$$(Kx^2 - Ox - G)^2 - (Fx^2 - 2Rx + B)(Ex^2 + 2Ux + C) = 0. \qquad (77)$$

Nachdem wir durch diese Gleichung die Ebenen bestimmt haben, welche die vier singulären Strahlen enthalten, erhalten wir, indem wir, der Coordinaten-Bestimmung gemäss, b und d gleich Null setzen, auf jedem dieser Strahlen zur Bestimmung der beiden Doppelpuncte:

$$y = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \qquad z = \pm\sqrt{-\frac{f}{a}}. \qquad (78)$$

Jenachdem die Zerlegung (34) oder (36) stattfindet, das heisst, je nachdem e und f im Zeichen übereinstimmen oder nicht, müssen wir die vorstehenden Ausdrücke für y und z für jeden der beiden Puncte mit gleichem oder entgegengesetzten Vorzeichen nehmen. Der singuläre Strahl wird von dem Durchmesser der Fläche geschnitten, und zwar so, dass die beiden Doppelpuncte auf ihm zu beiden Seiten des Durchmessers in gleichem Abstand von demselben liegen. Der Winkel δ, welchen der jedesmalige singuläre Strahl mit der Ebene XZ bildet, ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\operatorname{tang}\delta = \pm\sqrt{\frac{c}{f}} = \frac{e}{f} = \frac{c}{e}, \qquad (79)$$

wobei in dem ersten und zweiten der beiden oben unterschiedenen Fälle das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist.

196. Wenn wir dieselbe Aequatorialfläche, welche wir vorstehend durch ihre Breiten-Curven bestimmt haben, durch umhüllende Cylinder bestimmen, deren Axen der Ebene YZ parallel sind, so tritt die Gleichung (28) an die Stelle der Gleichung (3). Die neue Gleichung stellt für die durch den Winkel γ bestimmte Richtung der Cylinder-Axe den Durchschnitt dieses Cylinders mit der Ebene XZ dar. Setzen wir, der Kürze halber:

$$\left.\begin{aligned}
(F\operatorname{tang}^2\gamma - 2K\operatorname{tang}\gamma + E) &= a,\\
-(L\operatorname{tang}\gamma - M)\operatorname{tang}\gamma &= b,\\
D\operatorname{tang}^2\gamma &= c,\\
-(R\operatorname{tang}^2\gamma - O\operatorname{tang}\gamma - U) &= d,\\
(S\operatorname{tang}\gamma + T)\operatorname{tang}\gamma &= e,\\
(B\operatorname{tang}^2\gamma + 2G\operatorname{tang}\gamma + C) &= f,
\end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

so wird die Gleichung der Durchschnitts-Curve:

$$ax^2 + 2bxz + cz^2 + 2dx + 2ez + f = 0. \qquad (81)$$

Um auszudrücken, dass diese Gleichung ein System von zwei geraden Linien darstelle und also der umhüllende Cylinder in ein System zweier Ebenen ausarte, welche die Ebene XZ nach diesen beiden geraden Linien schneiden, gibt die Entwicklung der Gleichung (39):

$$\begin{aligned} D[(R\,\mathrm{tang}^2\gamma - O\,\mathrm{tang}\,\gamma - U)^2 - (F\,\mathrm{tang}^2\gamma - 2K\,\mathrm{tang}\,\gamma + E)(B\,\mathrm{tang}^2\gamma + 2G\,\mathrm{tang}\,\gamma + C)] \\ + (S\,\mathrm{tang}\,\gamma + T)^2(F\,\mathrm{tang}^2\gamma - 2K\,\mathrm{tang}\,\gamma + E) + (L\,\mathrm{tang}\,\gamma - M)^2(B\,\mathrm{tang}^2\gamma + 2G\,\mathrm{tang}\,\gamma + C) \\ + 2(L\,\mathrm{tang}\,\gamma - M)(S\,\mathrm{tang}\,\gamma + T)(R\,\mathrm{tang}^2\gamma - O\,\mathrm{tang}\,\gamma - U) = 0. \qquad (82) \end{aligned}$$

Es gibt also, den vier Werthen von tang γ, welche die Auflösung dieser Gleichung gibt, entsprechend, vier Paare von Doppelebenen der Aequatorialfläche, in welche sich vier der umschriebenen Cylinder auflösen; die beiden Ebenen jedes Paares schneiden sich in einer der vier singulären Axen der Fläche. Nach jeder Richtung, welche der Ebene YZ parallel ist, wird die Aequatorialfläche nach Curven zweiter Ordnung projicirt; nach den Richtungen der vier singulären Axen sind die Projectionen Systeme von zwei geraden Linien.

197. Wenn wir den der Ebene YZ zugeordneten Durchmesser des Complexes als Axe OX nehmen, so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

$$(R\,\mathrm{tang}^2\gamma - O\,\mathrm{tang}\,\gamma - U)^2 - (F\,\mathrm{tang}^2\gamma - 2K\,\mathrm{tang}\,\gamma + E)(B\,\mathrm{tang}^2\gamma + 2G\,\mathrm{tang}\,\gamma + C) = 0, \qquad (83)$$

und die Gleichung der Durchschnitts-Curve des bezüglichen umhüllenden Cylinders mit der Ebene XZ auf:

$$ax^2 + cz^2 + 2ez + f = 0. \qquad (84)$$

Diese Gleichung löst sich, wenn die vorstehende Bedingung (83) erfüllt ist, in die folgenden beiden auf:

$$ax \pm \sqrt{-ac} \cdot z \pm \sqrt{-af} = 0, \qquad (85)$$

wobei wir, je nachdem die Bedingung (33) oder die Bedingung (35) erfüllt ist, für jede der beiden geraden Linien, welche die vorstehende Gleichung darstellt, den Wurzelausdrücken übereinstimmende oder entgegengesetzte Vorzeichen geben müssen.

Die durch die Doppelgleichung (85) dargestellten geraden Linien schneiden OX in demselben Puncte. Für diesen Schnittpunct erhalten wir:

$$x = \mp \sqrt{-\frac{f}{a}}. \qquad (86)$$

Durch denselben Punct geht also auch die singuläre Axe der Aequatorialfläche, in welcher zwei Doppelebenen derselben sich schneiden. Die vier singulären Axen also, wie die vier singulären Strahlen der Fläche, schneiden einerseits, weil sie der Ebene YZ parallel sind, die unendlich weit liegende Doppellinie, andererseits den Durchmesser der Fläche, den wir als die Polare derselben betrachten können.

Zur Bestimmung des Winkels, welchen die Durchschnittslinien der beiden Doppelebenen, welche in einer singulären Axe sich schneiden, mit der Ebene XZ in dieser Ebene mit OX bilden, erhalten wir aus (85):

$$\frac{z}{x \pm \sqrt{-\frac{f}{a}}} = \mp \sqrt{-\frac{a}{c}}. \tag{87}$$

Die beiden Doppelebenen bilden also mit den zwei in derselben singulären Axe sich schneidenden Ebenen, von denen die eine durch den Durchmesser der Fläche geht und die andere demselben zugeordnet ist, vier harmonische Ebenen, und sind somit, wenn der Durchmesser auf seinen zugeordneten Ebenen senkrecht steht, gleich gegen denselben geneigt.

198. Wir begegnen einer besonderen Art von Aequatorialflächen, wenn wir eine unendlich weit liegende Linie, die dem Complexe angehört, als Doppellinie der Fläche nehmen. Es kommt das darauf hinaus, dass alle Breiten-Curven der Fläche Parabeln werden.

Nehmen wir, wie bisher, die Doppellinie in der Ebene YZ unendlich weit, so verschwindet, unter der gemachten Voraussetzung, in der Gleichung des Complexes die Constante D. Alsdann geht die Gleichung (76), durch welche wir den Abstand der singulären Strahlen, die der Coordinaten-Ebene parallel sind, von dieser Ebene bestimmt haben, in die folgende über:

$$\begin{aligned}(Mx+T)^2(Kx^2-Ox-G)+(Lx-S)^2(Ex^2+2Ux+C)\\ +(Lx-S)(Mx+T)(Fx^2-2Rx+B)=0.\end{aligned} \tag{88}$$

Die Fläche hat ihren Durchmesser, der unendlich weit gerückt ist, verloren.

Die Gleichung (3) geht, wenn wir:

$$\left.\begin{aligned}(Ex^2+2Ux+C) &\equiv a,\\ (Rx^2-\ Ox\ -G) &\equiv b,\\ (Fx^2-2Rx+B) &\equiv c,\\ (Mx+T) &\equiv d,\\ (Lx-S) &\equiv e,\\ D \equiv f &= 0\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

setzen, in die folgende über:

$$au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw=0, \tag{90}$$

und diese Gleichung löst sich, wenn wir für x eine der vier Wurzeln der Gleichung (88) nehmen, in die folgenden beiden auf:

$$\left.\begin{aligned} au + (b \pm \sqrt{b^2 - ac})v + 2dw &= 0, \\ au + (b \mp \sqrt{b^2 - ac})v &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

wo wir, je nachdem die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet, das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen haben.

Ein Doppelpunct der Fläche liegt also auf dem singulären Strahl unendlich weit, der andere hat zu Coordinaten in seiner Ebene:

$$y = \frac{a}{2d}, \qquad z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2d}. \tag{92}$$

Der Winkel γ_0, welchen die Richtung des singulären Strahles mit OZ bildet, ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \gamma_0 = \frac{a}{b \pm \sqrt{b^2 - ac}} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{c} = \frac{d}{e} \tag{93}$$

bestimmt. Führen wir die Constanten des Complexes wieder ein, so kommt:

$$\operatorname{tang} \gamma_0 = \frac{Mx + T}{Lx - S}. \tag{94}$$

199. Bestimmen wir die Aequatorialfläche durch ihre umhüllenden Cylinder, so müssen wir von der Gleichung (28) ausgehen. Unter der gemachten Annahme, dass die in YZ unendlich weit liegende Linie dem Complexe angehöre, wird die Bedingung (76), durch die ausgedrückt wird, dass sich die durch (28) dargestellte Curve in ein Linienpaar auflöst, die folgende:

$$\begin{aligned} (S \operatorname{tang} \gamma + T)^2 (F \operatorname{tang}^2 \gamma - 2K \operatorname{tang} \gamma + E) + (L \operatorname{tang} \gamma - M)^2 (B \operatorname{tang}^2 \gamma + 2G \operatorname{tang} \gamma - C) \\ + 2(L \operatorname{tang} \gamma - M)(S \operatorname{tang} \gamma + T)(R \operatorname{tang}^2 \gamma - O \operatorname{tang} \gamma - U) = 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Die Gleichung (28) geht, wenn wir, der Kürze wegen, die Constanten-Bestimmung (80) wieder einführen und c verschwinden lassen, in die folgende über:

$$ax^2 + 2bxz + 2dx + 2ez + f = 0, \tag{96}$$

und diese Gleichung löst sich, wenn für $\operatorname{tang} \gamma$ eine der Wurzeln der vorstehenden Gleichung genommen wird, in die beiden folgenden auf:

$$\left.\begin{aligned} ax + 2bz + (d \pm \sqrt{d^2 - af}) &= 0, \\ ax \phantom{{}+ 2bz} + (d \mp \sqrt{d^2 - af}) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

wo wir die oberen, bezüglich die unteren Vorzeichen zu nehmen haben, je nachdem die Zerlegung (34) oder die Zerlegung (36) stattfindet.

Eine der beiden Doppelebenen, in die sich der die Fläche umhüllende

Complex-Cylinder auflöst, geht also immer durch die unendlich weit liegende Doppellinie der Fläche. Sie schneidet von OX ein Stück ab:

$$x_0 = -\frac{d \mp \sqrt{d^2 - af}}{a} = -\frac{f}{d \pm \sqrt{d^2 - af}} = -\frac{e}{b}, \tag{98}$$

oder, wenn wir die Constanten des Complexes wieder einführen:

$$x_0 = \frac{S \tang \gamma + T}{L \tang \gamma - M}. \tag{99}$$

200. Indem wir den Werth von $\tang \gamma_0$ aus der Gleichung (94) in die Gleichung (88) und den Werth von x_0 aus der Gleichung (99) in die Gleichung (95) einführen, gelangen wir, wie wir es in der 193. Nummer für Meridianflächen gethan haben, nun für Aquatorialflächen der besonderen Art zu dem folgenden Satze:

Die vier singulären Strahlen und die vier singulären Axen liegen bezüglich in derselben Ebene, welche durch die unendlich weit entfernte Doppellinie der Fläche geht, und sind, in dieser Ebene, bezüglich einander parallel.

§ 7.

Allgemeine Betrachtungen über Complex-Flächen, ihre Doppellinien, Doppelpuncte und Doppelebenen.

201. Wenn eine gerade Linie im Raume sich bewegt, so erzeugt sie eine Linienfläche. Es ist hierbei gleichgültig, ob wir sie als einen Strahl oder als eine Axe betrachten. Wir können die Linienfläche durch drei Gleichungen entweder in Strahlen-Coordinaten oder in Axen-Coordinaten darstellen, die sich in dem ersten Falle auf eine einzige Gleichung in Punct-Coordinaten, in dem zweiten Falle auf eine einzige Gleichung in Plan-Coordinaten zurückführen lassen.

202. Wenn insbesondere die gerade Linie im Raume so sich bewegt, dass sie in je zwei auf einander folgenden Lagen in derselben Ebene enthalten ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch denselben Punct geht, so beschreibt sie, wenn sie als Strahl betrachtet wird, eine Abwicklungsfläche; sie umhüllt, wenn sie als Axe betrachtet wird, eine räumliche Curve. Je nach der zwiefachen Auffassung der geraden Linie geht dann die Linienfläche in die Curve oder in die Abwicklungsfläche über. Die verschiedenen Lagen

der geraden Linie werden dann durch zwei Complex-Gleichungen in Strahlen- oder Axen-Coordinaten dargestellt. Wenn wir

$$y = sz + \sigma,$$
$$x = rz + \varrho$$

für die Gleichungen zweier Projectionen der als Strahl betrachteten geraden Linie nehmen, in Beziehung auf r, s, ϱ, σ differentiiren und nach der Differentiation z eliminiren, erhalten wir, der gemachten Voraussetzung entsprechend:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\varrho}{dr}. \tag{100}$$

Wenn wir andererseits die gerade Linie als Axe betrachten und

$$u = qv + \varkappa,$$
$$t = pv + \pi$$

für die Gleichungen ihrer Durchschnittspuncte mit zwei der drei Coordinaten-Ebenen nehmen, so erhalten wir, derselben Voraussetzung entsprechend, die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{dq}{d\varkappa} = \frac{dp}{d\pi}. \tag{101}$$

Durch jede Abwicklungsfläche ist gleichzeitig eine räumliche Curve und gegenseitig durch jede räumliche Curve eine Abwicklungsfläche bestimmt. Die Gleichung (100) ist die Differential-Gleichung der Abwicklungsflächen, die Gleichung (101) die Differential-Gleichung der räumlichen Curven.

203. Wir erhalten eine zweite Bestimmung der Abwicklungsfläche, wenn wir uns dieselbe durch eine Ebene, welche durch zwei auf einander folgende Lagen des erzeugenden Strahles geht, umhüllt denken und demnach durch zwei Gleichungen in Plan-Coordinaten darstellen. Die die Abwicklungsfläche umhüllenden Ebenen gehören als Umhüllungsebenen zweien Flächen an.

Wir erhalten eine zweite Bestimmung der räumlichen Curve, wenn wir uns dieselbe durch einen Punct, welcher der umhüllenden Axe in zwei auf einander folgenden Lagen gemein ist, beschrieben denken und, dem entsprechend, durch zwei Gleichungen in Punct-Coordinaten darstellen. Eine räumliche Curve ist der Durchschnitt zweier durch Puncte bestimmter Flächen.

Die Abwicklungsflächen werden durch eine einzige Gleichung in Punct-Coordinaten dargestellt. Sie sind als Linienflächen zu betrachten, insofern wir uns diese durch einen Strahl erzeugt denken. Die räumlichen Curven werden durch eine einzige Gleichung in Plan-Coordinaten dargestellt. Sie sind als Linienflächen zu betrachten, insofern wir uns diese durch eine Axe erzeugt denken.

204. Die Abwicklungsfläche kann durch eine weitere Beschränkung in eine Kegelfläche ausarten. Dann gehen alle Strahlen durch einen festen Punct, den Mittelpunct der Kegelfläche. Um dieses auszudrücken, erhalten wir, wenn (x^0, y^0, z^0) der Mittelpunct der Kegelfläche ist, die drei linearen Bedingungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y^0 &= s z^0 + \sigma, \\ x^0 &= r z^0 + \varrho, \\ r y^0 - s x^0 &= \eta. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Von diesen Gleichungen bedingen zwei, vorausgesetzt dass r und s endliche Werthe behalten, die dritte. Nachdem der feste Punct bestimmt worden ist, wird die Kegelfläche durch eine einzige Complex-Gleichung in Strahlen-Coordinaten dargestellt. Nehmen wir für den festen Punct insbesondere den Anfangspunct der Coordinaten, so verschwinden für alle Strahlen gleichzeitig die drei Coordinaten ϱ, σ und η, und zur Bestimmung der Kegelfläche erhalten wir dann eine Gleichung zwischen den beiden übrigbleibenden Coordinaten r und s.

Die räumliche Curve kann durch eine weitere Beschränkung in eine ebene Curve ausarten. Dann liegen alle die Curve umhüllenden Axen in einer festen Ebene, was, wenn wir für diese Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ nehmen, durch die drei linearen Bedingungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= q v^0 + \varkappa w^0, \\ t^0 &= p v^0 + \pi w^0, \\ p u^0 - q t^0 &= \omega w^0 \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

ausgedrückt wird. Von diesen Gleichungen bedingen zwei, vorausgesetzt, dass q und p endlich bleiben, die dritte. Wenn die Ebene bestimmt ist, wird die Curve in ihr durch eine einzige Complex-Gleichung in Axen-Coordinaten dargestellt. Diese Gleichung reducirt sich auf eine Gleichung zwischen zwei der fünf Axen-Coordinaten, wenn wir für die Ebene der Curve insbesondere eine der drei Coordinaten-Ebenen nehmen. Ist diese Ebene YZ, so verschwinden für alle die Curve umhüllenden Axen die drei Coordinaten p, π, ω, und wir erhalten für die umhüllte Curve eine Gleichung zwischen den beiden übrigbleibenden Axen-Coordinaten q und $\varkappa$, und diese beiden

Coordinaten können wir auch als Linien-Coordinaten in der Ebene YZ construiren.

205. Wir können aber auch eine Kegelfläche als von einer Ebene umhüllt betrachten und, dem entsprechend, den Mittelpunct derselben durch die Gleichung

$$x^0 t + y^0 u + z^0 v + w = 0$$

darstellen. Dann bestimmt in Verbindung mit dieser Gleichung eine zweite Gleichung in Plan-Coordinaten die Kegelfläche. Wenn wir den Mittelpunct derselben zum Anfangspuncte nehmen, wonach die vorstehende Gleichung sich auf

$$w = 0$$

reducirt, reicht die zweite Gleichung allein zur Darstellung der Kegelfläche hin. In analoger Weise können wir uns eine ebene Curve durch einen Punct beschrieben denken und ihre Ebene durch die Gleichung

$$t^0 x + u^0 y + v^0 z + w^0 = 0$$

darstellen. Dann bestimmt, in Verbindung mit dieser Gleichung, eine zweite Gleichung in Punct-Coordinaten die ebene Curve. Wenn die Curve in einer der drei Coordinaten-Ebenen liegt, für welche wir wiederum YZ nehmen wollen, so erhalten wir statt der vorstehenden Gleichung

$$x = 0,$$

und eine einzige Gleichung zwischen den beiden übrigbleibenden Punct-Coordinaten, die wir in der Ebene YZ construiren können, ist zur Darstellung der Curve hinreichend.

206. Es kann nur von der Ordnung einer Kegelfläche die Rede sein, wenn wir uns dieselbe als von einer geraden Linie, einem Strahle, beschrieben denken. Diese Ordnung ist gleich dem Grade der Gleichung, durch welche die Kegelfläche in Punct-Coordinaten dargestellt wird. Es kann nur von der Classe einer ebenen Curve die Rede sein, wenn wir uns dieselbe von einer geraden Linie, einer Axe, umhüllt denken. Diese Classe ist gleich dem Grade der Gleichung, durch welche die Curve in Plan-Coordinaten dargestellt wird.

Indem wir in die Geometrie die gerade Linie als Raumelement einführen, und die gerade Linie einmal als Strahl, das andere Mal als Axe betrachten, müssen wir der gewöhnlichen Plan-Geometrie, als vollständig coordinirt, eine Punct-Geometrie zur Seite stellen, neben Curven, welche in der Ebene von Axen umhüllt werden, Kegelflächen, welche durch Strahlen gebildet werden, die durch den Punct gehen. Die Kegelflächen sind von gegebener Ordnung, die Curven von gegebener Classe. Die Classe einer Kegelfläche und die Ordnung einer Curve treten als secundäre Begriffe auf. Erst wenn wir uns die Kegelflächen als durch Ebenen umhüllt denken, welche durch zwei auf einander folgende erzeugende Strahlen gehen, kommt die Classe derselben zur Sprache; sie ist zugleich die Classe ihrer Durchschnittscurven und ist gleich der Anzahl der Tangential-Ebenen, welche durch eine, durch den Mittelpunct der Kegelfläche gehende, gerade Linie an diese sich legen lassen. Erst wenn wir uns die ebene Curve durch den Durchschnitt zweier auf einander folgenden umhüllenden Axen beschrieben denken, können wir von ihrer Ordnung sprechen. Diese ist dann zugleich die Ordnung der Kegelflächen, welche durch dieselbe sich legen lassen und gleich der Anzahl der Puncte, in welchen die Curve von einer in ihrer Ebene liegenden geraden Linie geschnitten wird.

207. Die folgenden Bemerkungen, welche sich an das Vorstehende anknüpfen, berühren wesentlich die Theorie der Darstellung räumlicher Gebilde vermittelst Linien-Coordinaten.

Wir müssen, um eine Kegelfläche in Strahlen-Coordinaten darzustellen, ausdrücken, dass die Strahlen, welche dieselbe bilden, durch einen festen Punct (x^0, y^0, z^0), ihren Mittelpunct, gehen. Um dieses vollständig zu erreichen, sind die Gleichungen (102) alle drei nothwendig. Wenn wir bloss zwei dieser drei Gleichungen, etwa die beiden ersten,

$$\begin{aligned} y^0 &= s z^0 + \sigma, \\ x^0 &= r z^0 + \varrho \end{aligned} \tag{104}$$

nehmen, so drücken dieselben aus, dass der bezügliche Strahl (r, s, ϱ, σ) diejenigen beiden Linien schneidet, welche den Punct (x^0, y^0, z^0) auf die beiden Coordinaten-Eben YZ und XZ projiciren. Es schliesst dieses die doppelte geometrische Bedingung ein, dass der Strahl (r, s, ϱ, σ) entweder durch den gegebenen Punct (x^0, y^0, z^0) geht, oder in derjenigen Ebene liegt, welche die beiden projicirenden Linien enthält und also durch den Punct (x^0, y^0, z^0) geht und der Ebene XY parallel ist. Erst dadurch, dass die dritte Gleichung

$$r y^0 - s x^0 = \eta$$

hinzutritt, fällt die zweite geometrische Deutung der Gleichungen (104) hinweg und dann wird ausschliesslich ausgedrückt, dass der Strahl durch den gegebenen Punct geht.

Wir müssen, um eine ebene Curve in Axen-Coordinaten darzustellen, ausdrücken, dass die Axen, welche dieselben umhüllen, in einer festen Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ liegen. Dazu sind die Gleichungen (103) alle drei nothwendig. Wenn wir bloss zwei dieser drei Gleichungen, etwa die beiden ersten

$$u^0 = qv^0 + \varkappa,$$
$$t^0 = pv^0 + \pi \tag{105}$$

nehmen, so wird durch dieselben ausgedrückt, dass die bezügliche Axe $(p, q, \pi, \varkappa)$ durch die Durchschnittslinien der gegebenen Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ mit den beiden Coordinaten-Ebenen YZ und XZ geht. Diesem wird geometrisch in zwiefacher Weise entsprochen, entweder wenn die Axe $(p, q, \pi, \varkappa)$ in der gegebenen Ebene liegt, oder wenn sie durch denjenigen Punct hindurchgeht, in welcher die Coordinaten-Axe OZ von dieser Ebene geschnitten wird. Die dritte Gleichung

$$pu^0 - qt^0 = w^0$$

muss hinzukommen, um die zweite geometrische Beziehung auszuschliessen.

Wenn wir uns nach dem analytischem Grunde der vorstehenden, auf den ersten Blick paradoxen Relationen fragen, so liegt derselbe darin, dass die dritte der Gleichungen (102) und (103) dann nicht mehr eine algebraische Folge aus den beiden ersten ist, wenn r und s, bezüglich p und q unendlich gross werden.*)

208. Wenn mit der Gleichung

$$\Omega_n = 0,$$

welche einen Linien-Complex eines beliebigen n. Grades in Strahlen-Coordinaten darstelle, die beiden Gleichungen

$$y^0 = sz^0 + \sigma,$$
$$x^0 = rz^0 + \varrho,$$

---

*) Durch die Anwendung homogener Linien-Coordinaten wird das Unendliche vermieden. Ersetzen wir zum Beispiel die beiden ersten der Gleichungen (102) durch die folgenden:

$$y^0(z-z') = z^0(y-y') + (yz'-y'z),$$
$$x^0(z-z') = z^0(x-x') + (x'z-xz'),$$

so werden beide Gleichungen gleichzeitig befriedigt, wenn

$$x = x^0, \qquad y = y^0, \qquad z = z^0,$$

das heisst, wenn der bezügliche Strahl durch den gegebenen Punct geht.

Dieselben beiden Gleichungen werden auch dann befriedigt, wenn

$$z = z' = z^0,$$

das heisst, wenn alle Strahlen innerhalb einer mit XY parallelen Ebene liegen, deren Abstand von dieser Ebene gleich z^0 ist.

die wir als zwei lineare Complex-Gleichungen ansehen können, gleichzeitig bestehen, so befriedrigen die Coordinaten aller Strahlen, welche einerseits den Complex-Kegel der n. Ordnung bilden, dessen Mittelpunct (x^0, y^0, z^0) ist, und andererseits die Complex-Curve der n. Classe umhüllen, deren Ebene, parallel mit XY, durch den Mittelpunct des Kegels geht, die vorstehenden drei Gleichungen. Diese drei Gleichungen stellen also, neben dem Complex-Kegel, gleichzeitig auch noch eine Complex-Curve dar.

Ebenso stellt das System der Gleichung eines Complexes des n. Grades in Axen-Coordinaten

$$\Phi_n = 0$$

und der beiden linearen Gleichungen

$$u^0 = qv^0 + \varkappa w^0,$$
$$t^0 = pv^0 + \pi w^0,$$

die wir als Gleichungen zweier Complexe des ersten Grades ansehen können, gleichzeitig eine Complex-Curve, deren Ebene $\left(\frac{t^0}{w^0}, \frac{u^0}{w^0}, \frac{v^0}{w^0}\right)$ ist, und eine Complex-Kegelfläche dar, deren Mittelpunct in dieser Ebene liegt.

Zwischen der Kegelfläche der n. Ordnung und der Curve der n. Classe, welche in dem Vorstehenden durch die drei Complex-Gleichungen dargestellt werden, besteht die geometrische Beziehung, dass die n Seiten, nach welchen die Kegelfläche von der Ebene der Curve geschnitten wird, zugleich diejenigen n Tangenten der Curve sind, welche durch den Mittelpunct der Kegelfläche gehen.

Durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen Linien-Coordinaten werden immer nur solche geometrische Gebilde dargestellt, die in sich selbst reciproke sind.

Wenn wir, in dem Falle der Strahlen-Coordinaten, von diesen zu Punct-Coordinaten übergehen, so führen wir in die vorstehenden Entwicklungen stillschweigend die dritte der drei linearen Gleichungen (102) ein, und in der analytischen Darstellung verschwindet jede Spur der von Strahlen umhüllten Curve.

Gehen wir in dem Falle der Axen-Coordinaten von diesen zu Plan-Coordinaten über, so führen wir stillschweigend die dritte der drei linearen Gleichungen (103) ein, und in der analytischen Darstellung verschwindet jede Spur der von Axen gebildeten Kegelfläche.

209. Wir haben bereits als characteristische Eigenschaften eines Com-

plexes des n. Grades die folgenden beiden, in Beziehung auf einander reciproken, aufgestellt (Nr. 19):

In einem Complexe des n. Grades liegen in jeder den Raum durchziehenden Ebene unendlich viele Linien desselben, welche eine Curve der n. Classe umhüllen. Durch jeden Punct des Raumes gehen unendlich viele Linien desselben, welche eine Kegelfläche der n. Ordnung bilden.

Hieran knüpft sich unmittelbar die doppelte Construction der Flächen eines Complexes der n. Ordnung. Wir können dieselben, nachdem wir irgend eine feste gerade Linie angenommen haben, einmal als durch diejenigen Complex-Curven n. Classe, deren Ebenen durch die feste Linie gehen, gebildet, das andere Mal als durch diejenigen Complex-Kegel, deren Mittelpuncte auf der festen Linie liegen, umhüllt betrachten.

Nachdem überhaupt die Existenz der Complexe des n. Grades festgestellt ist, können wir an jede der beiden obigen characteristischen Eigenschaften, die im Grunde nur eine einzige sind, die Definition solcher Complexe anknüpfen, und diese Definition, wenn es überhaupt gestattet ist, das Imaginäre in den Bereich der Geometrie hineinzuziehen, in gewöhnlicher Weise als eine geometrische bezeichnen.

Die doppelte Bestimmung eines Complexes des n. Grades würde ihre Bedeutung verlieren und wir würden vergeblich nach einem analytischen Ausdruck für den Complex suchen, wenn wir in der Definition die Worte Ordnung und Classe vertauschen wollten.

Indem wir Complex-Flächen vermittelst des Complexes, dem sie angehören, bestimmen, knüpft sich diese Bestimmung an die Betrachtung von geraden Linien und ihren Coordinaten. Die Flächen eines Complexes des n. Grades sind von gleicher Ordnung und Classe, die wir durch p bezeichnen wollen. Als Flächen der p. Ordnung betrachten wir sie als aus Puncten bestehend, als von einer geraden Linie in p Puncten, von einer Ebene in einer Curve p. Ordnung geschnitten. Als Flächen der p. Classe betrachten wir sie als von Ebenen umhüllt; durch eine gerade Linie gehen p Ebenen der Fläche und die Umhüllungskegel sind von der p. Classe. Die Complex-Flächen haben eine vielfache Linie, in der ein vielfacher Strahl und eine vielfache Axe zusammenfallen. Die Linie sei eine m fache. Dann schneiden sich nach ihr, wenn wir sie als Strahl betrachten, m Schalen der Fläche: die Fläche hat in jedem Puncte der m fachen Linie m Tangential-Ebenen. Die m fache Linie ist der geometrische Ort von m fachen Puncten der Fläche und alle Curven, nach welchen die Fläche von Ebenen geschnitten wird, haben auf dieser Linie einen $m$fachen Punct. Die $m$fache Linie, als Axe betrachtet, ist ein von $m$fachen Ebenen der Fläche umhüllter Ort. Jede durch die $m$fache Linie gehende Ebene wird von der Fläche in m auf dieser Linie liegenden Puncten berührt. Jeder Punct einer solchen Ebene ist der Mittelpunct eines Umhüllungskegels, der m Schalen hat, welche von der Ebene, die auch eine $m$fache Ebene des Kegels ist, nach m durch die mBerührungspuncte auf der Fläche gehenden Kegelseiten berührt werden.

210. Die Flächen eines Complexes des zweiten Grades haben eine Doppellinie. Sie werden von Ebenen in Curven der vierten Ordnung geschnitten und von Kegeln der vierten Classe umhüllt. Wenn die schneidende Ebene insbesondere eine Meridianebene ist und demnach durch die Doppellinie geht, so zerfällt die Durchschnitts-Curve der vierten Ordnung in eine Curve der zweiten Ordnung und zwei Strahlen, welche in die Doppellinie zusammenfallen. Betrachten wir die Curve als von Axen umhüllt und bedienen wir uns zu ihrer analytischen Darstellung der Linien-Coordinaten in ihrer Ebene, so reducirt sich die Classe derselben, indem jede Spur der beiden zusammenfallenden Strahlen, die dem Complexe fremd sind, fortfällt, auf die zweite: die Curve in der Meridianebene wird eine Curve des Complexes. Wenn wir andererseits die Mittelpuncte der Umhüllungskegel insbesondere auf der Doppellinie des Complexes zweiten Grades annehmen, so artet ein solcher Kegel, welcher im Allgemeinen von der vierten Classe ist, in einen Kegel der zweiten Classe und zwei umhüllte Axen aus, die in der Doppellinie zusammenfallen. Von diesen beiden Axen verschwindet jede Spur, wenn wir uns den Kegel durch einen Strahl beschrieben denken. Dann tritt also der Umhüllungskegel als ein Kegel zweiter Ordnung, als ein Kegel des Complexes, auf.

211. In dem allgemeinen Falle der Flächen eines Complexes des n. Grades lösen sich von ihren Durchschnitts-Curven, wenn die schneidende Ebene insbesondere durch die $m$fache Linie der Flächen geht, m Strahlen ab, welche in dieser Linie zusammenfallen. Wenn wir von diesen m Strahlen absehen, reducirt sich die Ordnung der Curve auf $(p-m)$. Von der andern Seite erhalten wir, da die Durchschnitts-Curven, deren Ebenen durch die $m$fache Linie gehen, Complex-Curven und als solche die allgemeinen der n. Classe sind, für die Ordnung dieser Curven $n(n-1)$. Wir finden auf diese Weise:

$$p = n(n-1) + m. \tag{106}$$

Wenn wir den Mittelpunct des Umhüllungskegels insbesondere auf der $m$fachen Linie der Complex-Fläche annehmen, so sondern sich von diesem Kegel m Axen ab, die in der $m$fachen Linie zusammenfallen, und wenn wir von diesen m Axen absehen, sinkt die Classe des Umhüllungskegels von p auf $(p-m)$. Dann wird er ein Kegel des Complexes und ist als solcher der allgemeine der n.Ordnung und also von der $n(n-1)$.Classe. Wir gelangen auch auf diesem Wege zu der vorstehenden Gleichung, welche eine Relation enthält zwischen n, dem Grade des Complexes, dem die Fläche angehört, p, der Ordnung und Classe dieser Fläche, und m, der Zahl, welche angibt, wie viele Strahlen einerseits und wie viele Axen andererseits in der vielfachen Linie der Fläche zusammenfallen.

212. Damit eine Complex-Fläche vollständig durch eine Complex-Curve beschrieben werde, muss sich die Meridianebene, welche diese veränderliche Curve enthält, um die beliebig angenommene vielfache Linie durch 180 Grad drehen. Bei dieser Umdrehung geht die Complex-Curve in einer bestimmten Anzahl von Lagen der Meridianebene durch irgend einen gegebenen Punct der vielfachen Linie der Complex-Fläche. Diese Anzahl ist zugleich die Anzahl der Schalen der Fläche, welche auf der vielfachen Linie sich schneiden, also gleich m.

Jeder Punct der vielfachen Linie der Complex-Fläche ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels der n.Ordnung, an welchen sich, weil er der allgemeine dieser Ordnung ist, durch die vielfache Linie $n(n-1)$ Meridianebenen legen lassen, welche die Kegelfläche berühren. Die $n(n-1)$ Kegelseiten, nach welchen diese Berührung stattfindet, berühren zugleich, weil sie Linien des Complexes sind, die in derselben Meridianebene liegenden Meridiancurven im Mittelpuncte des Umhüllungskegels auf der vielfachen Linie. Die Zahl $n(n-1)$ bestimmt sonach die Anzahl der Meridiancurven, welche durch den auf der vielfachen Linie beliebig angenommenen Mittelpunct des Umhüllungskegels gehen, also die Anzahl der Schalen der Complex-Fläche, welche nach der vielfachen Linie sich schneiden.

Die vielfache Linie ist eine $n(n-1)$fache.

Jeder Punct der $n(n-1)$fachen Linie der Flächen eines Complexes des n.Grades ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels der n.Ordnung, an den sich durch die $n(n-1)$fache Linie der Fläche $n(n-1)$ Ebenen legen lassen. Die $n(n-1)$ Seiten, nach welchen der Kegel durch diese Ebenen berührt wird, berühren ihrerseits die $n(n-1)$ Complex-Curven, welche im Mittelpuncte des Kegels sich schneiden in diesem Puncte.

Neben den vorstehenden Satz stellt sich sogleich der folgende:

Jede Meridianebene der Fläche eines Complexes des n. Grades enthält eine Complex-Curve, welche die $n(n-1)$ fache Linie der Fläche in dieser Ebene in $n(n-1)$ Puncten schneidet. Die Tangenten der Curve in diesen $n(n-1)$ Puncten sind Seiten von $n(n-1)$ Complex-Kegeln, die diese Puncte zu Mittelpuncten haben und die Meridianebene nach diesen Seiten berühren.

Wir können die beiden vorstehenden Sätze, die als die Aussage correlativer Eigenschaften eines Complexes gegenseitig aus einander folgen, auch unmittelbar an die obige Definition der Complexe des n. Grades anschliessen und erhalten dann den folgenden Satz:

Die Anzahl der geraden Linien (Strahlen und Axen), welche die vielfache Linie einer Complex-Fläche bilden, ist gleich der Ordnung der die Fläche erzeugenden Complex-Curven und der Classe der dieselben umhüllenden Complex-Kegel.

Wir haben

$$m = n(n-1), \tag{107}$$

mithin

$$p = 2n(n-1) = 2m. \tag{108}$$

Die Flächen eines Complexes der n. Ordnung sind von der $2n(n-1)$. Ordnung und Classe und haben eine $n(n-1)$ fache Linie.

213. An die Stelle der vorstehenden geometrischen Betrachtungen können wir eben so einfache analytische setzen. Wir wollen hierbei von den Flächen der Complexe des zweiten Grades ausgehen. Die Projectionen der einzelnen Meridian-Curven solcher Complex-Flächen auf XZ haben wir durch die folgende Gleichung dargestellt (Nr. 169.):

$$\begin{aligned}(F \tan^2\varphi - 2K\tan\varphi + E)w^2\\ + 2(R\tan^2\varphi - O\tan\varphi - U)tw\\ + (B\tan^2\varphi + 2G\tan\varphi + C)t^2\\ - 2(Q\tan\varphi - P)vw - 2(J\tan\varphi + H)tv + Av^2 = 0,\end{aligned} \tag{14}$$

und dabei die Voraussetzung gemacht, dass alle Meridianebenen durch die Coordinaten-Axe OX gehen, und dass OZ auf OX senkrecht steht. Irgend ein beliebiger Punct dieser Axe ist zum Anfangspunct der Coordinaten genommen worden. Die Ebene der jedesmaligen Meridian-Curve wird durch den Winkel φ bestimmt, den dieselbe mit einer festen Meridianebene bildet. Wenn wir unter diesen Voraussetzungen in der vorstehenden Gleichung w gleich Null setzen und durch t dividiren, erhalten wir zur Bestimmung der Richtung der Projectionen der beiden durch den Anfangspunct an die jedesmalige durch φ bestimmte Meridian-Curve gelegten Tangenten die folgende Gleichung:

$$A\left(\frac{v}{t}\right)^2 - 2(J\,\text{tang}\,\varphi + H)\left(\frac{v}{t}\right) + (B\,\text{tang}^2\,\varphi - 2G\,\text{tang}\,\varphi + C) = 0. \qquad (109)$$

Wenn die Meridian-Curve durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, so fallen die beiden durch diesen Punct gehenden Tangenten zusammen, was analytisch dadurch ausgedrückt wird, dass die vorstehende in Beziehung auf $\left(\frac{v}{t}\right)$ quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat. Dieses fordert

$$A(B\,\text{tang}^2\,\varphi + 2\,G\,\text{tang}\,\varphi + C) - (J\,\text{tang}\,\varphi + H)^2 = 0. \qquad (110)$$

Diese Bedingungs-Gleichung ist, in Beziehung auf tang φ, vom zweiten Grade: es gehen also zwei der unendlich vielen Meridian-Curven der Complex-Fläche durch jeden willkürlich auf der Coordinaten-Axe OX angenommenen Punct: es ist diese Axe eine Doppellinie der Complex-Fläche.

Die letzte Gleichung wird, wenn wir in derselben

$$\frac{v}{t} = -\,\text{tang}\,\psi$$

setzen:

$$A\,\text{tang}^2\psi + B\,\text{tang}^2\varphi + C + 2\,G\,\text{tang}\,\varphi + 2\,H\,\text{tang}\,\psi + 2\,J\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\psi = 0. \quad (111)$$

Diese Gleichung ist als die Gleichung einer Kegelfläche anzusehen. ψ bedeutet denjenigen Winkel, den eine Seite desselben mit der Ebene YZ, $\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ den Winkel, den sie mit OX bildet. Sie gibt, nachdem durch eine beliebige Annahme von φ die Ebene bestimmt ist, in welcher zwei Seiten des Kegels liegen, zwei Werthe von ψ, durch welche, in dieser Ebene, die Richtung der beiden Seiten gegeben ist. Zugleich aber ist φ der Winkel, den die Projection dieser Kegelseite auf YZ, und ψ der Winkel, den die Projection derselben auf XZ mit der Coordinaten-Axe OZ bildet; demnach kommt:

$$\text{tang}\,\psi = r, \qquad \text{tang}\,\varphi = s,$$

und die Gleichung der Kegelfläche geht in die folgende über:

$$Ar^2 + Bs^2 + C + 2Gs + 2Hr + 2Jrs = 0. \qquad (112)$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir, wenn wir in der allgemeinen Complex-Gleichung (I) die Linien-Coordinaten ϱ, σ und, in Folge davon, η gleich Null setzen. Sie stellt denjenigen Complex-Kegel dar, der den Anfangspunct zu seinem Mittelpuncte hat.

214. Durch die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen erhalten wir für Complexe eines beliebigen n. Grades die Bestimmung der Ebenen der $n(n-1)$ Meridian-Curven n. Classe, welche im Anfangspuncte, einem beliebigen Puncte ihrer $n(n-1)$fachen Linie, sich schneiden, und der Tangenten dieser Curven in diesem Puncte. Die Gleichung des Complex-Kegels, dessen Mittelpunct in den Anfangspunct fällt, ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der allgemeinen Gleichung des Complexes n. Grades, wie oben, ϱ, σ und η gleich Null setzen. Die resultirende Gleichung des n. Grades in r und s sei

$$\Phi(r, s) \equiv \Xi_n = 0;$$

sie gibt, wenn wir differentiiren:

$$\frac{d\Xi_n}{dr} = 0.$$

Durch Elimination von r aus den beiden vorstehenden Gleichungen erhalten wir zur Bestimmung der Ebenen der $n(n-1)$ im Anfangspuncte sich schneidenden Meridian-Curven der Complex-Fläche $n(n-1)$ Werthe von s und demnach durch die entsprechenden $n(n-1)$ gleichen Wurzelwerthe r der vorletzten Gleichung die Richtung der Tangenten der Meridian-Curven im Anfangspuncte.

215. Wir haben im 6. Paragraphen dieses Abschnittes auf analytischem Wege nachgewiesen, dass die Flächen eines Complexes des zweiten Grades acht Doppelpuncte haben, welche paarweise auf den vier singulären Strahlen liegen, und acht Doppelebenen, welche paarweise nach den vier singulären Axen sich schneiden. Wie die vier singulären Strahlen die Doppellinie schneiden, liegen die vier singulären Axen mit der Doppellinie in derselben Ebene und schneiden sie also ebenfalls. Wir wollen die Ebenen, welche durch die Doppellinie und die vier singulären Strahlen sich legen lassen, die vier singulären Ebenen der Complex-Fläche nennen, jene durch S_1, S_2, S_3, S_4, diese durch E_1, E_2, E_3, E_4 bezeichnen. Wir wollen in entsprechender Weise die Durchschnittspuncte der vier singulären Axen mit der Doppellinie die vier singulären Puncte der Complex-Fläche nennen, und jene durch A_1, A_2, A_3, A_4, diese durch P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnen.

Jeder Strahl, welcher der Doppellinie als einem Doppelstrahle der Complex-Fläche begegnet, schneidet die Fläche, weil diese von der vierten Ordnung ist, ausserdem nur noch in zwei Puncten. Jeder der vier singulären Strahlen enthält, ausser dem Puncte, in welchem er die Doppellinie schneidet, auch noch ein Paar von Doppelpuncten, also sechs paarweise zusammenfallende Puncte der Complex-Fläche: er liegt seiner ganzen Erstreckung nach auf dieser Fläche.

Wenn wir durch die Doppellinie, als Doppelstrahl der Complex-Fläche, eine Ebene legen, die wir als Meridian-Ebene bezeichnet haben, so wird die Fläche, weil sie von der vierten Ordnung ist, von dieser Ebene, ausser in den beiden in der Doppellinie zusammenfallenden Strahlen, noch in einer Curve der zweiten Ordnung geschnitten. Die durch einen singulären Strahl gehende Meridianebene ist eine Tangential-Ebene der Fläche, weil die Curve zweiter Ordnung in ihr in zwei Strahlen ausartet, welche in dem singulären Strahle zusammenfallen. Die durch die vier singulären Strahlen gehenden Meridianebenen werden von der Fläche nach diesen Strahlen berührt. Die vollständige Durchschnitts-Curve vierter Ordnung artet in diesem Falle in vier Strahlen aus, welche, paarweise, in dem Doppelstrahle und dem singulären Strahle zusammenfallen. Betrachten wir dagegen die Meridian-Curve der vierten Ordnung als eine von Axen umhüllte Complex-Curve zweiter Classe, wobei die beiden in der Doppellinie zusammenfallenden Strahlen ganz ausser Acht bleiben, so artet diese in dem vorliegenden Falle in das System der beiden Puncte aus, mit welchen die auf dem jedesmaligen Strahle liegenden Doppelpuncte zusammenfallen. Tangential-Ebene der Fläche in jedem Puncte eines singulären Strahles ist die singuläre Ebene, welche durch diesen Strahl und die Doppellinie geht.

216. Durch jede Axe, welche mit der Doppellinie (Doppelaxe) der Complex-Fläche in einer Ebene liegt, lassen sich, da die Fläche von der vierten Classe ist, ausser der durch die Doppellinie gehenden Doppelebene nur noch zwei Ebenen an die Fläche legen. Jede der vier singulären Axen enthält, ausser der Ebene, welche durch die Doppellinie geht, auch noch ein Paar von Doppelebenen: also sechs paarweise zusammenfallende Ebenen der Complex-Fläche. In Folge davon ist jede durch dieselbe gelegte Ebene eine Ebene der Complex-Fläche.

Der Umhüllungskegel einer Complex-Fläche der vierten Classe, welcher einen Punct der Doppellinie zum Mittelpuncte hat, löst sich in zwei in die Doppellinie zusammenfallende Axen und einen Kegel der zweiten Classe auf. Die singulären Puncte, P, in welchen die singulären Axen, A, die Doppellinie schneiden, sind die Mittelpuncte von Kegeln zweiter Classe, welche in zwei Axen ausarten, die in den singulären Axen zusammenfallen und die Fläche in den singulären Puncten berühren. Der vollständige Umhüllungskegel artet in diesem Falle in vier Axen aus, welche paarweise in der Doppellinie und der bezüglichen singulären Axe zusammenfallen. Betrachten wir hingegen den Umhüllungskegel als einen von Strahlen beschriebenen Kegel zweiter Ordnung, so artet derselbe in das System der beiden Ebenen aus, welche mit den beiden durch die jedesmalige singuläre Axe gehenden Doppelebenen zusammenfallen. Berührungspunct auf allen Ebenen der Fläche, welche durch eine singuläre Axe gehen, ist der singuläre Punct, in welchem diese Axe die Doppellinie schneidet.

217. Eine beliebige Ebene schneidet die Complex-Fläche in einer Curve vierter Ordnung, die in ihrem Durchschnitte mit der Doppellinie einen Doppelpunct hat. In diesem Doppelpuncte schneiden sich entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Zweige der Curve; in diesem letzteren Falle ist der Doppelpunct ein isolirter Punct der Curve. Beim Uebergange zwischen diesen beiden Fällen wird er ein Cuspidalpunct. Diesem Uebergange entspricht, dass die Ebene der Curve durch einen der vier singulären Puncte P_1, P_2, P_3, P_4 geht, in welchen die Doppellinie der Complex-Fläche von den vier singulären Axen A_1, A_2, A_3, A_4 geschnitten wird. Durch diese vier Puncte wird die Doppellinie in vier Segmente P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 getheilt, wobei wir die beiden äusseren, im Unendlichen zusammenstossenden Segmente als ein einziges rechnen. Es liegt die Doppellinie ganz in der Complex-Fläche, aber in der Weise, dass in zwei nicht an einander stossenden Segmenten zwei reelle Schalen der Fläche sich schneiden, während die beiden übrigen, ebenfalls nicht an einander stossenden Segmente die reellen Durchschnitte zweier imaginären Schalen der Fläche sind. Die beiden Tangenten der Curve in ihrem Doppelpuncte sind zugleich mit den beiden Tangential-Ebenen der Complex-Fläche in diesem Puncte reell oder imaginär. Sie liegen in diesen beiden Tangential-Ebenen und drehen sich, in diesen beiden Ebenen, um den gemeinschaftlichen Doppelpunct, wenn die Ebene der Curve beliebig um diesen Punct gedreht wird. Wenn die schneidende Ebene durch einen der vier singulären Puncte geht, so ist dieser Punct im Allgemeinen ein Cuspidalpunct der Durchschnitts-Curve. Die beiden Tangential-Ebenen der Fläche in einem solchen Puncte fallen in derjenigen Ebene zusammen, welche durch die Doppellinie und die bezügliche singuläre Axe geht. In dieser Ebene liegen

die Tangenten aller Durchschnitts-Curven in ihrem gemeinschaftlichen, mit dem singulären Puncte zusammenfallenden Cuspidalpuncte, welche Richtung die schneidende Ebene auch haben mag. Wir können die Complex-Fläche durch eine veränderliche Curve vierter Ordnung mit einem Cuspidalpunct, welche wir um die Tangente in diesem Puncte sich drehen lassen, beschreiben. Diese Tangente kann in der Tangential-Ebene der Fläche alle möglichen Richtungen haben; wenn sie insbesondere mit der singulären Axe zusammenfällt, hat die Durchschnitts-Curve, wie auch ihre Ebene um diese Axe sich drehen mag, in allen Lagen derselben zwei Zweige, welche sich auf der singulären Axe in dem singulären Puncte berühren. Wenn die um die singuläre Axe sich drehende Ebene insbesondere mit einer derjenigen beiden Ebenen zusammenfällt, in welche der umhüllende Complex-Kegel, wenn sein Mittelpunct in den singulären Punct fällt, ausartet, so löst sich die in ihr liegende Curve der vierten Ordnung in zwei Curven der zweiten Ordnung auf, welche in diejenigen Curven zweiter Ordnung zusammenfallen, nach deren ganzer Erstreckung die Fläche von der Ebene berührt wird. Diese Curve berührt die singuläre Axe in dem singulären Puncte. Wenn endlich die um die singuläre Axe sich drehende Ebene zugleich durch die Doppellinie geht, löst sich die Durchschnitts-Curve vierter Ordnung in eine Curve zweiter Ordnung und zwei in der Doppellinie zusammenfallende gerade Linien auf, die eine zweite Curve zweiter Ordnung vertreten, welche die erste im singulären Puncte berührt.

218. Jeder Punct des Raumes ist der Mittelpunct eines Kegels der vierten Classe, welcher die Complex-Fläche umhüllt und diejenige Meridian-Ebene, welche durch den Punct geht, zur Doppelebene hat. Diese Doppelebene wird entweder von zwei reellen Schalen der Kegelfläche nach zwei reellen Seiten derselben berührt, oder diese beiden Schalen sind imaginär und mit ihnen die beiden Seiten des Kegels. In diesem letztern Falle ist der Doppelcontact ein imaginärer: die Doppelebene ist eine isolirte. Die beiden Seiten, nach welchen der Umhüllungskegel die Doppelebene berührt, schneiden die Doppellinie der Complex-Fläche in zwei Puncten: in diesen beiden Puncten wird diese Fläche von der Doppelebene berührt. Zu den Meridian-Ebenen gehören die vier singulären Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4, welche die vier singulären Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 der Complex-Fläche enthalten. Sie theilen den unendlichen Raum in vier Raumsegmente E_1E_2, E_2E_3, E_3E_4, E_4E_1, deren jedes durch zwei auf einander folgende singuläre Ebenen begrenzt wird und aus zwei

Theilen besteht, welche im Unendlichen zusammenstossen. Wenn der Mittelpunct des Umhüllungskegels von einem der vier Raumsegmente durch eine singuläre Ebene hindurch in das anliegende Raumsegment hinübertritt, wird der fragliche Kegel, bei einer der beiden Lagen seines Mittelpunctes, nach zweien seiner Seiten berührt, während bei der andern Lage seines Mittelpunctes die durch diesen gehende Meridian-Ebene eine isolirte Doppelebene ist. In dem Uebergangsfalle, wo der Mittelpunct des Umhüllungskegels in die singuläre Ebene selbst fällt, osculirt diese Ebene den Umhüllungskegel: sie ist eine Inflexionsebene desselben, welche ihn zugleich berührt und schneidet. Wenn der Mittelpunct des Umhüllungskegels in derselben Meridian-Ebene seine Lage ändert, so drehen sich in dieser Ebene die beiden Seiten, nach welchen der Kegel von dieser Ebene berührt wird, um zwei feste Puncte der Doppellinie, in welchen die Complex-Fläche von der Meridian-Ebene berührt wird. Wenn die Meridian-Ebene um die Doppellinie sich dreht, ändern die beiden Berührungspuncte auf dieser Linie ihre Lage. Sie fallen insbesondere, wenn der Mittelpunct des Umhüllungskegels in einer der vier singulären Ebenen angenommen wird, in demjenigen Puncte zusammen, in welchem der bezügliche singuläre Strahl in die Doppellinie einschneidet. Wir können eine Complex-Fläche durch einen veränderlichen Kegel vierter Ordnung umhüllen, der eine gegebene Ebene zur Inflexionsebene hat und dessen Mittelpunct auf einer geraden Linie in dieser Ebene fortrückt. Die gegebene Ebene wird dann die singuläre Ebene der Complex-Fläche und die gegebene Linie in ihr schneidet die Doppellinie in demselben Puncte, in welchem sie von dem bezüglichen Strahle geschnitten wird. Wenn insbesondere noch der Mittelpunct des Umhüllungskegels in der singulären Ebene auf dem singulären Strahle liegt und auf demselben fortrückt, so hat der fragliche Kegel in allen Lagen seines Mittelpunctes zwei Schalen, welche die singuläre Ebene nach dem singulären Strahle berühren. Nur dann, wenn der Mittelpunct auf diesem Strahle, der durch zwei der acht Doppelpuncte geht, in einem dieser beiden Doppelpuncte angenommen wird, löst sich der Umhüllungskegel vierter Classe in zwei Kegel zweiter Classe auf, welche in dem Berührungskegel des Doppelpunctes zusammenfallen. Dieser Kegel hat den singulären Strahl zu einer seiner Seiten, und wird nach demselben von der bezüglichen singulären Ebene berührt.

219. Jeder Punct des Raumes ist der Mittelpunct eines Umhüllungskegels der Complex-Fläche, welcher acht Doppelseiten hat, die durch die

acht Doppelpuncte der Fläche gehen. Alle Curven, nach welchen die Fläche von umschriebenen Kegeln berührt wird, haben die acht Doppelpuncte der Fläche auch zu ihren Doppelpuncten. Diese Relation besteht auch dann, wenn der Mittelpunct des Kegels in die Doppellinie der Fläche fällt. Dann aber sondern sich von der Kegelfläche, die als Kegelfläche vierter Classe mit einer durch die Doppellinie gehenden Doppelebene im Allgemeinen von der zehnten Ordnung ist, vier Paare von Ebenen, welche mit den vier singulären Ebenen der Fläche zusammenfallen, ab, wonach nur noch ein Kegel der zweiten Ordnung übrig bleibt. Die Berührungs-Curve dieses Kegels geht durch die acht Doppelpuncte der Fläche und wird von jeder der vier singulären Ebenen in zwei dieser Puncte geschnitten.

Wenn wir, in Uebereinstimmung mit dem Vorstehenden, die Fläche von einem Puncte aus, der auf ihrer Doppellinie liegt und auf dieser beliebig bis ins Unendliche fortrücken kann, auf eine beliebige Ebene projiciren (wir können zur Veranschaulichung den Schattenriss der Fläche nehmen, die wir von einem Puncte ihrer Doppellinie aus beleuchten), so erhalten wir einen Kegelschnitt, der mit der Lagen-Aenderung des Punctes auf der Doppellinie fortwährend sich ändert, und zugleich vier gerade Linien, die ihre Lage behalten. Diese sind die Projectionen der vier singulären Strahlen, oder auch, was dasselbe heisst, die Durchschnittslinien der Bildebene mit den vier singulären Ebenen der Fläche. Sie gehen sämmtlich durch denjenigen Punct, in welchem die Doppellinie der Fläche die Bildebene trifft, und schneiden den Kegelschnitt in den Projectionen der acht Doppelpuncte. Wenn der Mittelpunct des umschriebenen Kegels aus der Doppellinie herausrückt, formt sich das System des Kegelschnitts und der vier geraden Linien in eine Curve mit acht Doppelpuncten um.

Wenn insbesondere der Mittelpunct des umschriebenen Kegels zweiter Ordnung in einen der vier singulären Puncte der Complex-Fläche fällt und in Folge davon in ein System von zwei Ebenen sich auflöst, so zerfällt die räumliche Berührungs-Curve vierter Ordnung in zwei ebene Curven zweiter Ordnung. Auf diese beiden Curven vertheilen sich dann die acht Doppelpuncte der Fläche.

220. Jede Ebene schneidet die Complex-Fläche in einer Curve, welche von der vierten Ordnung und zugleich, weil sie auf der Doppellinie der Fläche einen Doppelpunct hat, von der zehnten Classe ist. Die Tangential-Ebenen der Fläche in Puncten der Durchschnitts-Curve bestimmen eine Abwicklungs-

fläche. Alle solche Abwicklungsflächen haben die acht Doppelebenen der Complex-Fläche auch zu den ihrigen. Die Durchschnitts-Curve wird von allen Axen umhüllt, nach welchen ihre Ebene von den Umhüllungsebenen der Abwicklungsfläche geschnitten wird; die Durchschnittslinien mit den acht Doppelebenen sind Doppelaxen der Durchschnitts-Curve. Diese Relationen bestehen auch dann noch fort, wenn die schneidende Ebene durch die Doppellinie der Complex-Fläche geht. Dann sondern sich von der Durchschnitts-Curve in ihr acht Puncte ab, welche paarweise in den vier auf der Doppellinie liegenden singulären Puncten zusammenfallen, und es bleibt nur noch eine Curve zweiter Classe, die zugleich der Complex-Fläche und dem Complexe angehört, übrig. Diese Curve wird von den acht Durchschnitten mit den acht Doppelebenen, welche paarweise in den vier singulären Puncten auf der Doppellinie sich schneiden, umhüllt. Wenn die schneidende Ebene insbesondere mit einer der vier singulären Ebenen der Fläche zusammenfällt, so löst sich die Curve zweiter Classe in zwei Puncte, welche mit zwei Doppelpuncten der Complex-Fläche zusammenfallen, die Abwicklungsfläche vierter Classe in die beiden Berührungskegel zweiter Classe in diesen beiden Puncten auf. Dann geht jede von zwei zusammengehörigen Doppelebenen durch einen der beiden Doppelpuncte.

221. Durch die beschränkende Bedingung, dass keine Doppelebene zwei solche Doppelpuncte enthalten kann, welche auf demselben singulären Strahle liegen, und ebenso, dass durch keinen Doppelpunct zwei solche Doppelebenen gehen können, welche nach derselben singulären Axe sich schneiden, ist unmittelbar einerseits die Vertheilung der acht Doppelpuncte zu vier und vier auf je zwei nach derselben singulären Axe sich schneidenden Doppelebenen gegeben, so wie andererseits die Vertheilung der acht Doppelebenen zu vier und vier, welche durch je zwei Doppelpuncte gehen, die auf demselben singulären Strahle liegen.

Wir wollen die vier singulären Strahlen durch die Symbole

$$(1,\ 2),\qquad (3,\ 4),\qquad (5,\ 6),\qquad (7,\ 8)$$

und die Doppelpuncte auf ihnen durch

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

bezeichnen. Wir erhalten die folgenden acht Gruppen von Puncten:

$$\begin{array}{ll} (1,\ 3,\ 5,\ 7), & (2,\ 4,\ 6,\ 8), \\ (1,\ 3,\ 6,\ 8), & (2,\ 4,\ 5,\ 7), \\ (1,\ 5,\ 4,\ 8), & (2,\ 6,\ 3,\ 7), \\ (1,\ 7,\ 4,\ 6), & (2,\ 8,\ 3,\ 5). \end{array} \qquad (113)$$

In keiner der Gruppen kommen zwei Doppelpuncte vor, die auf demselben Strahle liegen. Je zwei neben einander gestellte Gruppen enthalten sämmtliche acht Doppelpuncte. Die vier Doppelpuncte einer der beiden Gruppen liegen auf einer, die vier der andern auf der andern zweier Doppelebenen, welche auf einer singulären Axe sich schneiden. In derselben Aufeinanderfolge wollen wir, zur Bezeichnung der acht Doppelebenen, statt der vorstehenden die folgenden einfachern nehmen:

$$\begin{array}{cc} \mathrm{I}, & \mathrm{II}, \\ \mathrm{III}, & \mathrm{IV}, \\ \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, \\ \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII}. \end{array}$$

Dann sind

$$(\mathrm{I}, \mathrm{II}), \quad (\mathrm{III}, \mathrm{IV}), \quad (\mathrm{V}, \mathrm{VI}), \quad (\mathrm{VII}, \mathrm{VIII})$$

die Symbole für die vier singulären Axen, auf welchen die acht Doppelebenen I und II, III und IV, V und VI, VII und VIII sich schneiden. Aus dem Schema (113) erhalten wir unmittelbar für die Vertheilung der acht Doppelebenen in Gruppen von vier solcher Ebenen, die durch denselben Doppelpunct gehen, das folgende Schema:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}, \mathrm{III}, \mathrm{V}, \mathrm{VII}), & (\mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{VI}, \mathrm{VIII}), \\ (\mathrm{I}, \mathrm{III}, \mathrm{VI}, \mathrm{VIII}), & (\mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VII}), \\ (\mathrm{I}, \mathrm{V}, \mathrm{IV}, \mathrm{VIII}), & (\mathrm{II}, \mathrm{VI}, \mathrm{III}, \mathrm{VII}), \\ (\mathrm{I}, \mathrm{VII}, \mathrm{IV}, \mathrm{VI}), & (\mathrm{II}, \mathrm{VIII}, \mathrm{III}, \mathrm{V}). \end{array}\right\} \quad (114)$$

Die vier Doppelebenen der vorstehenden acht Gruppen schneiden sich bezüglich in den acht Doppelpuncten, die wir früher durch die Symbole

$$\begin{array}{cc} 1, & 2, \\ 3, & 4, \\ 5, & 6, \\ 7, & 8 \end{array}$$

bezeichnet haben. Diese acht Doppelpuncte liegen paarweise auf den vier singulären Strahlen der Complex-Fläche, deren Symbole (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8) sind.

Wenn also die acht Doppelpuncte der Fläche gegeben sind, so erhalten wir unmittelbar die acht Doppelebenen derselben und, umgekehrt, wenn diese gegeben sind, jene. Es liegt in den acht Puncten und acht Ebenen ein merkwürdiges, in sich selbst polar-reciprokes, geometrisches Gebilde vor.

222. Wenn wir durch die Doppellinie einer Complex-Fläche eine beliebige

Ebene legen und auf derselben einen Punct beliebig annehmen, so liegt in der Ebene eine Complex-Curve zweiter Classe und der Punct ist der Mittelpunct eines Complex-Kegels zweiter Ordnung. Zwei Seiten des Kegels sind zwei Tangenten der Curve. Die Polarebene der Doppellinie in Beziehung auf den Kegel geht durch den Pol derselben Doppellinie in Beziehung auf die Curve. Diese Beziehung besteht fort, wie auch die Ebene der Curve um die Doppellinie sich drehen, wie auch der Mittelpunct des Kegels auf dieser Doppellinie seine Lage ändern mag. Daraus folgt auf geometrischem Wege unmittelbar, was wir früher schon analytisch bewiesen haben, dass die Pole der Doppellinie einer Complex-Fläche in Beziehung auf alle Meridian-Curven derselben in gerader Linie liegen, und dass sich, nach derselben geraden Linie, die Polarebenen der Doppellinie in Beziehung auf alle umschriebenen Complex-Kegel schneiden. Wir haben diese Linie die Polare der Complex-Fläche genannt. Zur Bestimmung derselben brauchen wir bloss die beiden Pole der Doppellinie in Beziehung auf irgend zwei Meridian-Curven der Fläche zu construiren, oder die beiden Polarebenen der Doppellinie in Beziehung auf irgend zwei der Fläche umschriebene Complex-Kegel.

Nehmen wir einerseits statt der Meridian-Curven diejenigen beiden auf einem singulären Strahle liegenden Puncte, in welche die Curven ausarten, wenn ihre Ebene insbesondere mit einer der vier singulären Ebenen der Complex-Fläche zusammenfällt, und andererseits, statt der umschriebenen Complex-Kegel, diejenigen beiden nach einer singulären Axe sich schneidenden Ebenen, in welche die Kegel ausarten, wenn ihr Mittelpunct in einen der vier singulären Puncte der Complex-Fläche fällt, so ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze.

Die Polare einer Complex-Fläche schneidet, wie die Doppellinie derselben, die vier singulären Strahlen und die vier singulären Axen derselben. Jeder singuläre Strahl wird in den beiden Doppelpuncten der Fläche, welche er verbindet, und in den beiden Durchschnitten mit Doppellinie und Polaren harmonisch getheilt. Die beiden Doppelebenen, welche nach jeder singulären Axe sich schneiden, und die beiden Ebenen, welche durch diese Axe und durch Doppellinie und Polare gehen, bilden ein System von vier harmonischen Ebenen.

223. Die sämmtlichen Singularitäten einer Complex-Fläche sind in linearer Weise bestimmt, wenn wir die Doppellinie, die Polare und drei Doppel-

puncte 1, 3, 5 oder, statt derselben, drei Doppelebenen I, III, V der Fläche kennen. Vorausgesetzt wird hierbei bloss, dass nicht zwei Doppelpuncte auf demselben singulären Strahle liegen, nicht zwei Doppelebenen nach derselben singulären Axe sich schneiden.

Durch die drei gegebenen Puncte können wir drei gerade Linien legen, welche die Doppellinie und die Polare schneiden. Diese drei geraden Linien, drei singuläre Strahlen der Fläche, gehen durch die drei zugehörigen Doppelpuncte 2, 4, 6, die wir nach der vorigen Nummer unmittelbar erhalten. Es bleiben hiernach nur noch zwei der acht Doppelpuncte, deren Symbole wir zur Unterscheidung einklammern wollen, unbekannt. Die bekannten sechs Doppelpuncte genügen zur Bestimmung der sämmtlichen acht Doppelebenen (Nr. 221.):

$$\begin{array}{ll} (1,\ 3,\ 5,\ (7)) \equiv \mathrm{I}, & (2,\ 4,\ 6,\ (8)) \equiv \mathrm{II}, \\ (1,\ 3,\ 6,\ (8)) \equiv \mathrm{III}, & (2,\ 4,\ 5,\ (7)) \equiv \mathrm{IV}, \\ (1,\ 5,\ 4,\ (8)) \equiv \mathrm{V}, & (2,\ 6,\ 3,\ (7)) \equiv \mathrm{VI}, \\ (1,\ 4,\ 6,\ (7)) \equiv \mathrm{VII}, & (2,\ 3,\ 5,\ (8)) \equiv \mathrm{VIII}, \end{array}$$

die sich paarweise auf den vier singulären Axen schneiden. In jeder der acht Doppelebenen erhalten wir unmittelbar und in linearer Weise die Berührungs-Curve, welche durch drei bekannte Doppelpuncte geht und überdiess die bezügliche singuläre Axe in ihrem Durchschnitte mit der Doppellinie berührt. Vier der acht Doppelebenen I, IV, VI, VII schneiden sich in einem der beiden bisher noch unbekannten Doppelpuncte, in (7), die übrigen vier II, III, V, VIII in dem andern (8). Somit ist auch der vierte singuläre Strahl bestimmt.

Wenn wir von den drei Doppelebenen I, III, V als gegeben ausgehen, so sind diejenigen drei geraden Linien, welche die Puncte verbinden, in welchen diese drei Ebenen die Doppellinie und die Polare schneiden, drei singuläre Axen der Fläche, und wir erhalten, nach der vorigen Nummer, sogleich die drei neuen Doppelebenen II, IV, VI, welche die drei gegebenen nach diesen drei singulären Axen schneiden. Die drei Paare von Doppelebenen genügen, nach der 221. Nummer, zur Bestimmung der acht Doppelpuncte und der acht Berührungskegel in den acht Doppelpuncten. Die beiden noch unbekannten Doppelebenen VII und VIII sind dadurch bestimmt, dass sie die acht Doppelpuncte zu vier und vier enthalten; ihr Durchschnitt ist die vierte singuläre Axe.

Das bereits am Ende der 221. Nummer bezeichnete merkwürdige geometrische Gebilde lässt sich hiernach vermittelst der Doppellinie und der Polare der Fläche — beide Linien stehen zu demselben in vollkommen gleicher Beziehung — und dreier Puncte oder Ebenen desselben construiren. Dieses Gebilde hängt hiernach von

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$$

Constanten ab. Von eben so vielen Constanten aber hängt die allgemeine Complex-Fläche selbst ab. Diese Fläche ist bestimmt, wenn das von ihr abhängige geometrische Gebilde es ist.

224. An das Vorstehende knüpfen sich bemerkenswerthe lineare Constructionen der allgemeinen Complex-Fläche, wenn die Doppellinie, die Polare und entweder drei Doppelpuncte oder drei Doppelebenen derselben gegeben sind.

Bestimmung der Complex-Curve in einer beliebigen Meridian-Ebene. Erste Construction. Man construire die acht Doppelebenen. Eine Meridian-Ebene schneidet diese acht Doppelebenen nach acht geraden Linien, welche von der Complex-Curve in derselben berührt werden. Fünf dieser geraden Linien sind zur linearen Bestimmung der Curve hinreichend. Zweite Construction. Man construire in den acht Doppelebenen die acht Berührungs-Curven. Eine Meridian-Ebene schneidet die acht Berührungs-Curven, abgesehen von den acht paarweise in den vier singulären Puncten zusammenfallenden Puncten, ausserdem noch in acht Puncten. Diese acht Puncte liegen auf der Complex-Curve in der Meridian-Ebene. Fünf derselben reichen zur linearen Bestimmung der Curve hin. Nach der ersten Construction erhalten wir in jeder Meridian-Ebene die acht Tangenten, welche von den vier singulären Puncten aus an die Curve sich legen lassen, nach der zweiten Construction die Berührungspuncte auf diesen Tangenten.

Bestimmung des Complex-Kegels, dessen Mittelpunct beliebig auf der Doppellinie angenommen wird. Erste Construction. Man construire die acht Doppelpuncte der Fläche. Diejenigen acht geraden Linien, welche den angenommenen Mittelpunct mit diesen acht Doppelpuncten verbinden, sind acht Seiten des Complex-Kegels, welcher durch fünf dieser Seiten auf lineare Weise bestimmt ist. Zweite Construction. Man construire in den acht Doppelpuncten die acht Berührungs-Kegel. Von dem auf der Doppellinie beliebig angenommenen Mittelpuncte aus lassen sich an jeden der acht Berührungs-Kegel zwei Tangential-Ebenen legen. Von den sechszehn Tangential-Ebenen fallen viermal zwei in den vier singulären Ebenen zusammen. Die übrigen acht nicht durch die Doppellinie gehenden Tangential-Ebenen der acht Berührungs-Kegel werden von dem Complex-Kegel berührt, der durch fünf dieser Ebenen in linearer Weise bestimmt ist. In der ersten Construction wird der Complex-Kegel durch acht seiner Seiten, die paarweise in den vier singulären Ebenen liegen, in der zweiten Construction durch die Ebenen, welche denselben nach diesen Seiten berühren, bestimmt.

Um hiernach die Fläche selbst zu beschreiben, brauchen wir bloss die für jede beliebige Lage der Meridian-Ebene bestimmte Curve zweiter Classe und Ordnung um die Doppellinie sich drehen zu lassen. Um dieselbe Fläche durch einen Complex-Kegel zweiter Ordnung und Classe zu umhüllen, der für jede Lage seines Mittelpunctes bestimmt ist, brauchen wir bloss diesen Mittelpunct auf der Doppellinie fortrücken zu lassen.

225. Die vorstehenden Erörterungen über die Singularitäten der Complex-Flächen der allgemeinen Art übertragen sich sogleich auf den besondern Fall, dass irgend eine Linie, die dem Complexe angehört, zur Doppellinie der Fläche genommen wird. Dann wird einerseits die Doppellinie von allen Meridian-Curven der Fläche berührt und andererseits fällt eine gemeinschaftliche Seite aller umschriebenen Complex-Kegel in die Doppellinie. Doppellinie und Polare der Fläche fallen in einer geraden Linie zusammen.

In dem allgemeinen Falle gibt es keinen directen Uebergang von Meridian-Curven, welche die Doppellinie schneiden, zu solchen, welche sie nicht schneiden; gäbe es eine einzige solcher Curven, welche die Doppellinie berührte, so gehörte diese Linie dem Complex an und würde dann von allen Meridian-Curven berührt. Ebensowenig gibt es einen directen Uebergang von umschriebenen Complex-Kegeln, ausserhalb welcher die Doppellinie liegt, zu Complex-Kegeln, innerhalb welcher dieselbe liegt. In den Flächen der besondern Art sind alle Meridian-Curven reell und keiner der umschriebenen Complex-Kegel reducirt sich auf einen Punct.

226. Während die Doppellinie von einer um dieselbe sich drehenden Meridian-Ebene umhüllt wird, wird sie zugleich beschrieben von dem Puncte, in welchem sie von der in der Meridian-Ebene liegenden Complex-Curve berührt wird. Jede Linie, welche in einer beliebigen Lage der Meridian-Ebene durch den Berührungspunct geht, schneidet die Fläche in vier Puncten, von welchen drei auf der Doppellinie zusammenfallen. Jede beliebige Ebene, welche durch eine solche Linie der Meridian-Ebene geht, schneidet die Fläche

in einer Curve vierter Ordnung, die in dem Berührungspuncte einen Cuspidalpunct und die fragliche Linie zur Tangente in demselben hat. Die Meridian-Ebene ist der geometrische Ort für die Cuspidal-Tangenten aller Durchschnitts-Curven, deren Ebenen durch den Berührungspunct der Complex-Curve auf der Doppellinie gehen: in ihr fallen die beiden Tangential-Ebenen der Fläche in diesem Puncte zusammen. Wenn der Punct auf der Doppellinie fortrückt, dreht sich die Tangential-Ebene der Fläche in demselben um diese Linie. Die Doppellinie ist ein Cuspidal-Strahl der Complex-Fläche. Sie besteht nicht mehr aus Segmenten, welche die immer reellen Durchschnitte abwechselnd reeller und imaginärer Schalen der Fläche sind: in der Cuspidal-Kante stossen zwei reelle Schalen der Fläche zusammen.

227. Ein Complex-Kegel, dessen Mittelpunct beliebig auf der Doppellinie angenommen wird, hat eine durch diese Doppellinie gehende Ebene zur Tangential-Ebene. Wenn wir durch den Mittelpunct des Kegels in dieser Tangential-Ebene eine beliebige gerade Linie legen und irgend einen Punct derselben zum Mittelpuncte eines umhüllenden Kegels vierter Classe nehmen, so ist für diesen Kegel die Tangential-Ebene des Complex-Kegels eine Inflexions-Ebene, welche von demselben nach der angenommenen geraden Linie (einer Inflexionsseite des Kegels) osculirt wird. Es folgt hieraus, dass eine beliebige Meridian-Ebene gemeinschaftliche Inflexions-Ebene aller umschriebenen Kegel vierter Classe ist, deren Mittelpuncte in ihr liegen. Wenn die Meridian-Ebene um die Doppellinie sich dreht, rückt der Mittelpunct des Complex-Kegels, der sie berührt, auf der Doppellinie fort. Wenn wir irgend einen umschriebenen Kegel vierter Classe, dessen Mittelpunct in einer beliebigen Meridian-Ebene liegt, durch irgend eine zweite Meridian-Ebene schneiden, so ist die Durchschnitts-Curve von der vierten Classe, hat die Doppellinie zur Inflexionslinie und auf derselben denjenigen Punct zum Inflexionspuncte, welcher Mittelpunct desjenigen Complex-Kegels ist, der die erste Meridian-Ebene berührt. Wenn mit dieser Meridian-Ebene der Mittelpunct des Kegels vierter Classe sich um die Doppellinie dreht, bleibt die Doppellinie fortwährend Inflexionslinie der Durchschnitts-Curve, während der Inflexionspunct auf ihr fortrückt. Die Doppellinie, welche in der vorigen Nummer als ein Cuspidal-Strahl der Fläche auftrat, tritt in dieser Nummer als eine Inflexions-Axe derselben auf.

228. Zwischen dem Fortrücken des Berührungspunctes der Complex-Curven einer Complex-Fläche der besondern Art auf der Doppelinie und der

Drehung ihrer Ebene um diese Linie besteht identisch dieselbe Relation als zwischen dem Fortrücken des Mittelpunctes der Complex-Kegel der Fläche auf der Doppellinie und der Drehung der Tangential-Ebene derselben um diese Linie. Indem wir, von der allgemeinen Complex-Gleichung ausgehend, diejenige Complex-Fläche nahmen, welche OX zur Doppellinie hat, gelangten wir in der 170. Nummer, unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, zu der folgenden Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{Px + H}{Qx - J},$$

wo φ in dem allgemeinen Falle, den wir bereits in der Note zur 193. Nummer betrachtet haben, den Winkel bedeutet, den eine beliebige Meridian-Ebene mit der Coordinaten-Ebene XZ bildet und x dem Pole der Doppellinie in Beziehung auf die in der Meridian-Ebene liegende Complex-Curve entspricht. In dem Falle der Complex-Flächen besonderer Art, wo die Doppellinie eine Linie des Complexes ist und demnach in der Gleichung desselben die Constante A verschwindet, ist durch x die Lage des Berührungspunctes der Complex-Curven auf der Doppellinie gegeben. Die vorstehende Gleichung drückt also, wenn die Complex-Fläche besonderer Art einmal durch eine Complex-Curve beschrieben, das andere Mal durch einen Complex-Kegel umhüllt wird, die fragliche Relation aus, die zwischen dem Fortrücken des Berührungspunctes der Complex-Curve, bezüglich des Mittelpunctes des Complex-Kegels, auf der Doppellinie und der Drehung der Ebene der Complex-Curve, bezüglich der Tangential-Ebene des Complex-Kegels, um diese Doppellinie stattfindet.

Indem wir von der Entstehung der Fläche absehen, können wir, in der vorstehenden Gleichung, x auf einen beliebigen auf der Doppellinie liegenden Punct der Fläche und φ auf die Tangential-Ebene derselben in diesem Puncte beziehen. Rückt der Berührungspunct auf der Doppellinie (dem Cuspidal-Strahle der Fläche) fort, so dreht sich die Tangential-Ebene der Fläche in diesem Puncte um die Doppellinie (der Inflexions-Axe der Fläche), ähnlich wie, wenn auf einer Erzeugenden einer Linienfläche zweiten Grades der Berührungspunct fortrückt, die Tangential-Ebene um dieselbe sich dreht. In beiden Fällen ist das Gesetz, nach welchem sich Berührungspunct und Tangential-Ebene gegenseitig bestimmen, dasselbe (Note zur 193. Nummer).

229. In den Complex-Flächen besonderer Art, welche wir hier betrachten, wo alle Complex-Curven die Doppellinie berühren und diese Doppellinie

zugleich eine gemeinschaftliche Seite aller Complex-Kegel ist, fällt einerseits, wenn in jeder der vier singulären Ebenen die Complex-Curve in ein System von zwei Puncten ausartet, einer dieser beiden Puncte mit dem Durchschnitte des bezüglichen Strahles und der Doppellinie zusammen, während andererseits, wenn der Mittelpunct des Complex-Kegels einer der vier singulären Puncte ist und demnach der Kegel in ein System von zwei Ebenen ausartet, eine dieser beiden Ebenen durch die Doppellinie und die singuläre Axe geht.

Complex-Curven und Complex-Kegel ordnen sich in den fraglichen Complex-Flächen paarweise so zusammen, dass der Punct, in welchem die Curve die Doppellinie berührt, Mittelpunct des Kegels ist und die Ebene der Curve den Kegel nach der Doppellinie berührt. Derjenige Complex-Kegel, welcher sich hiernach mit einer Complex-Curve, die in zwei Puncte ausartet, zusammenordnet, artet seinerseits in zwei Ebenen aus. Denn, in der gemachten Voraussetzung, muss der Complex-Kegel die singuläre Ebene nach der Doppellinie berühren; er muss ferner den singulären Strahl enthalten, der in dieser Ebene liegt, weil derselbe ganz der Fläche angehört und durch seinen Mittelpunct geht. Diese beiden Bedingungen können gleichzeitig nur dann bestehen, wenn der Kegel in ein System von zwei Ebenen ausartet, von welchen eine die singuläre Ebene ist. Damit ist also bewiesen, dass die vier singulären Axen der Fläche in den vier singulären Ebenen liegen und die vier singulären Strahlen durch die vier singulären Puncte gehen.

229. Um, in dem Falle der fraglichen Complex-Flächen, deren Doppellinie in eine Linie des Complexes fällt, die acht Doppelpuncte nach dem Schema (113) der 221. Nummer zu vier auf die acht Doppelebenen zu vertheilen, nehmen wir für die in diesem Schema durch

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 8,$$

bezeichneten Puncte diejenigen vier dieser Puncte, welche auf der Doppellinie mit den vier singulären Puncten

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4$$

zusammenfallen. Die vier übrigen Doppelpuncte

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 7,$$

welche die vier Eckpuncte eines Tetraeders sind, wollen wir nun bezüglich durch

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad Q_4$$

darstellen, so dass

$$P_1 Q_1, \quad P_2 Q_2, \quad P_3 Q_3, \quad P_4 Q_4$$

die vier singulären Strahlen sind. Das angeführte Schema gibt dann für die acht Doppelebenen:

I,	II,
III,	IV,
V,	VI,
VIII,	VII

die folgende Symbole:

$P_1 P_2 P_3 Q_4$,	$Q_1 Q_2 Q_3 P_4$,
$P_1 P_2 P_4 Q_3$,	$Q_1 Q_2 Q_4 P_3$,
$P_1 P_3 P_4 Q_2$,	$Q_1 Q_3 Q_4 P_2$,
$P_2 P_3 P_4 Q_1$,	$Q_2 Q_3 Q_4 P_1$.

Die vier Ebenen I, III, V, VIII gehen durch die vier Eckpuncte des Tetraders $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ und schneiden sich sämmtlich nach der Doppellinie $P_1 P_2 P_3 P_4$. Es sind also die vier singulären Ebenen:

$$E_4, \quad E_3, \quad E_2; \quad E_1.$$

Die vier Ebenen II, IV, VI, VII fallen mit den vier Seitenebenen des Tetraeders zusammen und schneiden überdiess die Doppellinie bezüglich in den vier singulären Puncten $P_4 P_3 P_2 P_1$. Die vier singulären Axen sind:

(I, II), (III, IV), (V, VI), (VIII, VII).

Aus dem Vorstehenden entnehmen wir die folgenden Relationen.

Jeder Eckpunct des Tetraeders ist ein Doppelpunct der Fläche, die gegenüberliegende Seitenebene desselben eine Doppelebene. Diese schneidet die Doppellinie in einem der vier singulären Puncte, durch jenen geht eine der vier singulären Ebenen. Die gerade Linie, welche den Eckpunct des Tetraeders mit dem singulären Puncte verbindet, ist einer der vier singulären Strahlen, die Durchschnittslinie der gegenüberliegenden Seitenebenen des Tetraeders mit der singulären Ebene eine der vier singulären Axen der Fläche.

In jeder der vier singulären Ebenen, die Meridian-Ebenen sind, liegen ein singulärer Strahl und eine singuläre Axe; beide schneiden sich in dieser Ebene auf der Doppellinie in dem entsprechenden singulären Puncte.

230. Die Complex-Flächen hängen im Allgemeinen von siebenzehn von einander unabhängigen Constanten ab, Complex-Flächen, welche eine Linie des Complexes zu ihrer Doppellinie haben, von einer Constanten weniger. Diese

Complex-Flächen sind vollkommen bestimmt, wenn ihre Doppellinie und dasjenige Tetraeder, welches ihre vier Doppelpuncte zu Eckpuncten, ihre vier Doppelebenen zu Seitenflächen hat, gegeben sind. Doppellinie und Tetraeder können hierbei von vorne herein beliebig angenommen werden.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich die folgenden einfachen Constructionen.

Eine beliebige Seitenebene des Tetraeders (Q_2, Q_3, Q_4) ist eine Doppelebene der Fläche, der Punct, in welchem sie die Doppellinie schneidet, ist ein singulärer Punct P_1, die gerade Linie $P_1 Q_1$, welche diesen Punct mit dem gegenüberstehenden Eckpuncte Q_1 des Tetraeders verbindet, ein singulärer Strahl der Fläche, S_1. Projiciren wir diesen singulären Strahl auf die Doppelebene (Q_3, Q_3, Q_4), parallel mit der Doppellinie, so ist die Projection die ebenfalls durch den singulären Punct P_1 gehende singuläre Axe A_1 und die projicirende Ebene die singuläre Ebene E_1 der Fläche. Die Berührungs-Curve in der Doppelebene ist dadurch bestimmt, dass sie, in dieser Ebene, durch die drei Eckpuncte Q_2, Q_3, Q_4 und den singulären Punct P_1 geht und, in dem letztgenannten Puncte, die singuläre Axe A_1 berührt. Der Berührungs-Kegel in Q_1 ist dadurch bestimmt, dass er von den drei Seitenebenen des Tetraeders, welche in diesem Puncte sich schneiden, berührt wird, so wie auch von der singulären Ebene E_1, und zwar nach dem singulären Strahle S_1. Dieser Kegel hat in der Doppelebene (Q_2, Q_3, Q_4) zur Basis einen Kegelschnitt, der die drei in dieser Ebene liegenden Tetraeder-Kanten $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_4$, $Q_4 Q_2$ und ausserdem die singuläre Axe A_1 und zwar in ihrem Durchschnitte P_1 mit der Doppellinie berührt. Die singuläre Axe A_1 ist also eine gemeinschaftliche Tangente dieser Basis und der Berührungs-Curve in dem singulären Puncte P_1, in welchen beide die Doppellinie schneiden; während die Berührungs-Curve durch die drei Eckpuncte des Dreiecks $Q_2 Q_3 Q_4$ geht, berührt die Basis des Berührungskegels die drei Seiten desselben. In Gemässheit der Reciprocität erhalten wir zwei Kegel, den Berührungskegel in dem Doppelpuncte Q_1 und einen Kegel mit demselben Mittelpuncte, der die Berührungs-Curve in der gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraeders umhüllt. Beide Kegel haben den singulären Strahl S_1 zur gemeinschaftlichen Seite und berühren nach derselben die durch die Doppellinie gehende singuläre Ebene E_1. Während der Berührungskegel die in Q_1 sich schneidenden Seitenebenen des Tetraeders berührt, enthält der die Berührungs-Curve umhüllende Kegel die in demselben Puncte zusammenstossenden drei Kanten des Tetraeders.

Dieselben Constructionen können wir noch dreimal wiederholen und erhalten dann die sämmtlichen Singularitäten der Complex-Fläche.

Hiernach können wir die Complex-Fläche selbst in doppelter Weise bestimmen: einmal durch ihre Meridian-Curven, das andere Mal durch ihre Umhüllungskegel, deren Mittelpuncte auf der Doppellinie liegen. Zum Behuf der ersten Bestimmungsweise, auf die wir uns hier beschränken, legen wir durch die Doppellinie irgend eine Meridian-Ebene, welche die Berührungs-Curven in den vier Doppelebenen ausser in den vier singulären Puncten auf der Doppellinie noch in irgend vier Puncten schneidet. Die Curve, nach welcher die Fläche von der Meridian-Ebene geschnitten wird, geht durch diese vier Puncte und berührt überdiess die Doppellinie. Es gibt solcher Meridian-Curven zwei, und folglich gibt es auch zwei Complex-Flächen der besondern Art, welche die sämmtlichen Singularitäten: die Doppellinie, auf ihr die vier singulären Puncte, die durch sie gehenden vier singulären Ebenen, endlich die vier Doppelpuncte mit ihren Berührungskegeln, sowie die vier Doppelebenen mit ihren Berührungs-Curven, gemeinschaftlich haben.*)

231. Die Discussion der Singularitäten der allgemeinen Complex-Flächen überträgt sich unmittelbar auf den besonderen Fall der Aequatorialflächen, wenn wir die Doppellinie der Fläche unendlich weit rücken lassen. Die Ebenen aller Complex-Curven (Breitenebenen der Fläche) sind unter einander parallel, die Mittelpuncte derselben liegen auf dem Durchmesser der Fläche, der hier an die Stelle der Polaren tritt. Die umschriebenen Complex-Kegel werden Complex-Cylinder, deren Axen in Breitenebenen liegen. Es gibt vier Breitenebenen, die vier singulären Ebenen der Fläche, in welchen die Complex-Curve, als Curve zweiter Classe betrachtet, in zwei Puncte, als Curve zweiter Ordnung betrachtet, in zwei zusammenfallende gerade Linien ausartet. Die vier Linien, welche die vier Paare von

*) Wenn bloss die Singularitäten einer Complex-Fläche gegeben sind, so bleibt es unentschieden, welche von den beiden geraden Linien, die die sämmtlichen vier singulären Strahlen und vier singulären Axen schneiden, die Doppellinie der Fläche und welche die Polare derselben ist. Bei dieser Unentschiedenheit entsprechen denselben Singularitäten zwei verschiedene Complex-Flächen, welche zwei verschiedenen Complexen zweiten Grades angehören. In dem allgemeinen Falle hängt die Bestimmung der Doppellinie und Polaren der Fläche von der Auflösung einer quadratischen Gleichung ab. In dem besondern Falle, wo Doppellinie und Polare der Fläche in einer Linie des Complexes zusammenfallen und sich von einander nicht trennen lassen, liegt der Construction der Fläche aus ihren Singularitäten nothwendig die Auflösung einer quadratischen Gleichung zu Grunde, während, in dem allgemeinen Falle, die Construction der Fläche eine lineare wird, sobald wir annehmen, dass von den beiden geraden Linien, deren Bestimmung von einer quadratischen Gleichung abhängt, eine beliebige die Doppellinie und demnach die andere die Polare der Fläche ist (224).

Puncten verbinden, sind die vier, ganz in die Fläche fallenden, singulären Strahlen. Die vier singulären Ebenen berühren die Fläche nach der ganzen Erstreckung ihrer vier singulären Strahlen. Der Durchmesser der Fläche schneidet diese Strahlen in der Mitte der beiden auf ihnen liegenden Doppelpuncte. Vier der umschriebenen Complex-Cylinder arten in Systeme von zwei Ebenen aus, welche Doppelebenen der Fläche sind. Die die Axen der Cylinder vertretenden Durchschnittslinien der vier Ebenenpaare sind die vier singulären Axen der Fläche; sie liegen in Breitenebenen und schneiden den Durchmesser der Fläche. Die Durchschnittscurve eines der Fläche umschriebenen Complex-Cylinders mit einer gegebenen Ebene ist als die Projection der Fläche auf diese Fbene, nach der Richtung der Cylinder-Axe, zu betrachten. Wenn wir in den Breitenebenen die Axen der projicirenden Cylinder um die Doppellinie sich drehen lassen, so fallen sie in vier besonderen Lagen mit den singulären Axen der Fläche zusammen. Dann gehen die Projectionen durch zwei sich schneidende gerade Linien, den Durchschnitten der Bildebene mit den bezüglichen beiden Doppelebenen, hindurch. Diesem entspricht ein Uebergang von Hyperbel zu Hyperbel, deren reelle und imaginäre Axen, durch Null hindurchgehend, sich vertauschen.*) Die Berührungs-Curven in den beiden nach derselben singulären Axe sich schneidenden Doppelebenen haben diese Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote und sind dadurch bestimmt, dass sie überdiess die acht Doppelpuncte zu vier und vier enthalten. Die Berührungskegel in jedem der beiden auf demselben singulären Strahle liegenden Doppelpuncte werden nach diesem Strahle von der durch denselben gehenden singulären Ebene berührt und sind dadurch bestimmt, dass sie acht Doppelebenen zu vier und vier berühren.

232. Wenn wir endlich, weiter particularisirend, denjenigen Fall betrachten, dass eine Linie des Complexes, die unendlich weit liegt, zur Doppellinie der Complex-Fläche genommen wird, so liegen von den acht Doppel-

*) Wir dürfen hieraus nicht den Schluss ziehen, dass in dem Falle acht reeller Doppelpuncte und acht reeller Doppelebenen der Fläche — dieser Voraussetzung ist unsere Ausdrucksweise angepasst — die Complex-Cylinder sämmtlich hyperbolische, die Projectionen sämmtlich Hyperbeln sind. Es kann auch zwei parabolische Cylinder geben (Nr. 182.), und diese bezeichnen dann den Uebergang von hyperbolischen zu elliptischen Complex-Cylindern. Zwei Projectionen sind dann Parabeln — Projections-Richtungen entsprechend, welche beide innerhalb der Richtungen zweier auf einander folgenden singulären Axen liegen — durch welche Hyperbeln in Ellipsen und diese wieder in Hyperbeln übergehen.

Die Meridian-Curven sind, unter der gemachten Voraussetzung, zwischen je zwei auf einander folgenden singulären Ebenen entweder sämmtlich Ellipsen oder sämmtlich Hyperbeln. Bei dem Durchgange durch jede der vier singulären Ebene gehen Ellipsen und Hyperbeln in einander über.

puncten auf der Doppellinie, mit dieser zugleich, vier unendlich weit, vier Doppelebenen fallen, mit den vier singulären Ebenen zusammen. In jeder der letztgenannten Ebenen liegt einer der vier singulären Strahlen und, parallel mit demselben, eine der vier singulären Axen. Die Complex-Curven in allen Breitenebenen sind Parabeln, weil sie die unendlich weit liegende Doppellinie berühren. Wenn die Ebene derselben parallel mit sich selbst fortrückt, so ändern die Parabeln beim Durchgang durch eine singuläre Ebene, in der sie in zwei Puncte ausarten, von welchen einer unendlich weit liegt, den Sinn ihrer Erstreckung. Die umschriebenen Complex-Cylinder haben die unendlich weit liegende Doppellinie zur gemeinschaftlichen Seite und berühren nach derselben eine Breitenebene. Es sind hyperbolische Cylinder, welche Breitenebenen zu einer ihrer Asymptotenebenen haben. Diese Hyperbeln, in welchen sie von einer beliebigen Ebene geschnitten werden, sind als die Projectionen der Fläche selbst anzusehen; wenn wir der Axe des projicirenden Complex-Cylinders nach einander alle möglichen Richtungen geben, so rückt eine der beiden Asymptoten der Hyperbeln parallel mit sich selbst fort. Wenn wir insbesondere nach der Richtung einer singulären Axe (der ein singulärer Strahl parallel ist) projiciren, so artet die Hyperbel in ein System von zwei geraden Linien aus, in die Durchschnitte der Bildebene mit der singulären Ebene und der Doppelebene, welche durch die jedesmalige singuläre Axe geht.*)

Die vier nicht unendlich weit liegenden Doppelpuncte sind die Eckpuncte eines Tetraeders, dessen Seitenebenen die nicht durch die unendlich weit liegende Doppellinie gehenden Doppelebenen sind. Eine Seitenebene des Tetraeders und die singuläre Breitenebene, welche durch den gegenüberliegenden Eckpunct desselben geht, schneiden sich nach einer singulären Axe und parallel mit dieser geht, in der singulären Ebene, durch den Eckpunct des Tetraeders der bezügliche singuläre Strahl. Die Berührungs-Curve in der Doppelebene hat die singuläre Axe zur Asymptote und geht durch die drei Doppelpuncte in dieser Ebene. Der Berührungskegel in dem gegenüberliegenden Doppelpuncte schneidet dieselbe Doppelebene nach einer Hyperbel,

*) Während bei den Aequatorialflächen überhaupt zwei parabolische Complex-Cylinder auftreten, die, wenn sie reell sind, die Gränzen elliptischer Complex-Cylinder bezeichnen, fallen hier die beiden parabolischen Cylinder zusammen und elliptische Cylinder existiren nicht. In besondern Fällen können, bei Aequatorialflächen überhaupt und insbesondere bei parabolischen, alle Complex-Cylinder parabolische sein.

welche ebenfalls die in ihr liegende singuläre Axe zur Asymptote und die drei in ihr liegenden Kanten des Tetraeders zu Tangenten hat.

233. Die Complex-Flächen, deren allgemeiner Discussion der vorliegende erste Abschnitt vorzugsweise gewidmet ist, bilden eine merkwürdige Familie von Flächen vierter Ordnung und Classe, die wir auch unabhängig von der Betrachtung der Complexe selbstständig für sich als solche Flächen dieser Ordnung und Classe definiren können, welche neben einer Doppellinie, sich gegenseitig bedingend, acht Doppelpuncte und acht Doppelebenen haben. Die Discussion dieser Flächen erhält dadurch, dass wir ihre Entstehung an die Betrachtung der Complexe knüpfen, ungeachtet der unendlichen Mannigfaltigkeit ihrer Formen und der grossen Anzahl ihrer Constanten, eine überraschende Einfachheit und Symmetrie. Andererseits bieten diese Flächen ein unschätzbares Hülfsmittel zur analytischen Discussion und geometrischen Veranschaulichung der Complexe. Wir werden im nächsten Abschnitte zur Discussion der Complexe selbst übergehen, um später auf die Discussion ihrer Flächen zurückzukommen.

Aber es gibt noch einen neuen allgemeinen Gesichtspunct, unter welchem Complex-Flächen betrachtet werden können, den ich hier schon zu bezeichnen nicht unterlasse. Die von uns betrachteten Complex-Flächen werden von Linien umhüllt, die einer Congruenz angehören und zwar einer solchen, die aus den zusammenfallenden Linien zweier Complexe besteht, von welchen einer der allgemeine des zweiten Grades, der andere ein Complex des ersten Grades von der besondern Art ist, dass alle Linien desselben eine feste gerade Linie schneiden. Complex-Curven und Complex-Kegel werden von auf einander folgenden Linien der Congruenz, die sich schneiden, bezüglich umhüllt und beschrieben.

In analoger Weise steht jede Congruenz zu einer bestimmten Fläche in gegenseitiger Beziehung. Zwei auf einander folgende sich schneidende gerade Linien einer Congruenz bestimmen den Durchschnitt der beiden Linien und eine Ebene, welche beide enthält. Der Punct ist ein Punct der Fläche, die Ebene eine Ebene derselben.

Der allgemeine Ausdruck

$$2n(n-1),$$

den wir für die Ordnung und Classe der Flächen der Complexe eines beliebigen n.Grades erhalten haben (Nr. 212.), reducirt sich für einen Complex des ersten Grades auf Null. Es gibt in diesem Falle keine von den Linien der

Congruenz umhüllte Fläche: diese Fläche wird durch zwei gerade Linien vertreten, und solche zwei gerade Linien können wir weder in Punct- noch in Plan-Coordinaten durch eine einzige Gleichung darstellen. Die beiden geraden Linien sind zur Bestimmung der Congruenz hinreichend, und umgekehrt, wenn die Congruenz gegeben ist, erhalten wir in den beiden Directricen derselben die beiden fraglichen geraden Linien.