4. die beiden Directricen sind imaginär und gehen durch keinen reellen Punct der Axe der Congruenz, haben aber eine reelle Richtung.

In den beiden ersten Fällen sind die Complexe der zweigliedrigen Gruppe, welche die Congruenz bestimmen, reell, in den beiden letzten Fällen imaginär.

§ 3.

Congruenzen dreier linearer Complexe. Linienflächen.

99. Es seien:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho + F'\eta = 0, \\ \Omega'' &\equiv A''r + B''s + C'' - D''\sigma + E''\varrho + F''\eta = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die allgemeinen Gleichungen dreier gegebener Complexe des ersten Grades. Die geraden Linien, deren Coordinaten diese drei Gleichungen befriedigen, gehören gleichzeitig den drei gegebenen Complexen an. Sie gehören gleichzeitig allen Complexen der dreigliedrigen Gruppe an, welche, indem wir durch μ und μ' zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, durch die folgende Gleichung dargestellt wird:

$$\Omega + \mu\Omega' + \mu'\Omega'' = 0. \quad (2)$$

Solche Linien bilden nach der 22. Nummer eine Fläche der zweiten Ordnung und Classe, also, wenn wir zunächst nur reelle gerade Linien in's Auge fassen, ein einschaliges Hyperboloid, das auch in ein hyperbolisches Paraboloid ausarten kann. Wir müssen hierbei indess nicht übersehen, dass nur die Linien der einen der beiden Erzeugungen desselben durch die Complex-Gruppe bestimmt werden. Diese Erzeugung wollen wir als die erste Erzeugung der Fläche bezeichnen.

100. Drei aus der dreigliedrigen Gruppe beliebig auszuwählende Complexe Ω, Ω', Ω'' bilden, paarweise genommen, drei Congruenzen $(\Omega\Omega')$, $(\Omega\Omega'')$ und $(\Omega'\Omega'')$. Die Linien der Fläche gehören also auch diesen drei Congruenzen an und schneiden folglich die beiden Directricen jeder der drei Congruenzen. Zur Bestimmung der Fläche sind drei der sechs Directricen hinreichend, wonach wir die gewöhnliche Construction des Hyperboloids erhalten. Aber zugleich begegnen wir neben dieser ersten Erzeugung der Fläche ihrer zweiten Erzeugung. Die Linien der ersten Erzeugung sind diejenigen, welche sämmtlichen Complexen der dreigliedrigen Gruppe angehören, die Linien der zweiten

Erzeugung sind die Directricen aller Congruenzen, die wir erhalten, wenn wir die Complexe der Gruppe paarweise zusammenstellen.

101. Wir können auch, um die Linienfläche zu construiren, zu den Complexen der dreigliedrigen Gruppe zurückgehen, und zu diesem Behufe wiederum die drei Complexe Ω, Ω', Ω'' auswählen. Es sei A^0B^0 irgend eine gegebene gerade Linie und AB, $A'B'$, $A''B''$ seien die drei zugeordneten Polaren dieser Linie in Beziehung auf die drei Complexe. Diejenigen Linien, welche bezüglich A^0B^0 und AB, A^0B^0 und $A'B'$, A^0B^0 und $A''B''$ schneiden, gehören den Complexen Ω, Ω' und Ω'' an. Es gibt im Allgemeinen zwei gerade Linien, welche vier gegebene schneiden. Die beiden geraden Linien also, welche A^0B^0 und gleichzeitig AB, $A'B'$, $A''B''$ schneiden, gehören sämmtlichen drei Complexen, also der Strahlenfläche an. Wir erhalten dieselben beiden Strahlen der Fläche, wenn wir an die Stelle der Complexe Ω, Ω', Ω'' irgend andere Complexe der Gruppe (2) treten lassen. Die Polaren der gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf alle Complexe der Gruppe, bilden eine Congruenz, welche die beiden Strahlen der Fläche zu ihren Directricen hat.

Die beiden Puncte, in welchen die gegebene gerade Linie von den beiden Strahlen der Fläche getroffen wird, können reell und imaginär sein und zusammenfallen. Im letzten Falle wird die Fläche von dieser Linie berührt.

Wir können insbesondere die gerade Linie A^0B^0 so wählen, dass sie eine der beiden Directricen der Congruenz ist, welche den Complexen Ω und Ω' angehört, wonach die Polare $A'B'$ mit AB zusammenfällt. Dann schneidet jeder Strahl der Fläche die beiden Linien A^0B^0 und AB: diese Linien gehören ihrer zweiten Erzeugung an. Zugleich aber schneiden die Strahlen der Fläche auch $A''B''$, so wie die Polaren von A^0B^0, in Beziehung auf alle Complexe der Gruppe.

Wir gelangen, indem wir zusammenfassen, zu folgenden allgemeinen Sätzen:

Ein einschaliges Hyperboloid gehört gleichzeitig dreien von einander unabhängigen Complexen und in Folge davon allen Complexen einer dreigliedrigen Gruppe an. Die allen Complexen gemeinschaftlichen geraden Linien sind die Strahlen seiner ersten Erzeugung, während die Directricen der Congruenzen je zweier dieser Complexe die Linien seiner zweiten Erzeugung bilden.

Die Polaren einer gegebenen geraden Linie in Beziehung auf alle Complexe einer dreigliedrigen Gruppe bilden eine Congruenz, deren beide Directricen diejenigen beiden Strahlen der Fläche sind, welche die gegebene gerade Linie schneiden. Die Polaren einer beliebigen Linie der zweiten Erzeugung der Fläche in Beziehung auf sämmtliche Complexe der Gruppe sind Linien derselben Erzeugung.

102. Die Central-Ebene irgend dreier Congruenzen, denen die Fläche angehört, schneiden sich in einem Puncte, in welchem drei Durchmesser der Congruenzen — diejenigen drei geraden Linien, welche durch diesen Punct gehen und die beiden Directricen der drei Congruenzen schneiden — sich gegenseitig halbiren. Diese Durchmesser sind zugleich drei Durchmesser der Fläche. Ihre Scheitel sind die Durchschnitte derselben mit den Directricen, die Linien der zweiten Erzeugung der Fläche sind.

Die Central-Ebenen aller Congruenzen einer dreigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' + \mu'\Omega'' = 0$$

schneiden sich in demselben Puncte: in dem Mittelpuncte der Fläche, welche durch die Gruppe gegeben ist.*)

---

*) Da ein directer Beweis dieses Satzes wünschenswerth erscheinen möchte, so füge ich Folgendes hinzu:

Der Ausdruck:

$$A'B - AB'$$

verwandelt sich, wenn wir an die Stelle der beiden Complexe Ω und Ω' irgend zwei andere der zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \lambda\Omega' = 0,$$

etwa die den Werthen λ^0 und λ_0 entsprechenden nehmen, in den folgenden:

$$(A + \lambda_0 A')(B + \lambda^0 B') - (A + \lambda^0 A')(B + \lambda_0 B') \equiv (\lambda_0 - \lambda^0)(A'B - AB').$$

Der vorstehende Ausdruck — und dasselbe gilt gleichmässig für alle Ausdrücke, $A'C - AC'$, $B'C - BC'$, ..., welche in gleicher Weise aus zwei Paaren sich entsprechender Coefficienten der Gleichungen der beiden Complexe Ω und Ω' gebildet sind — ändert also nach der Vertauschung der Complexe seinen Werth nur dadurch, dass ein Factor $(\lambda_0 - \lambda^0)$ hinzutritt, welcher lediglich von der Auswahl der beiden Complexe aus der zweigliedrigen Gruppe abhängt.

Die Central-Ebene der der zweigliedrigen Gruppe entsprechenden Congruenz, für deren Gleichung wir die folgende nehmen wollen:

$$p'' = 0,$$

ist unabhängig von der Auswahl der beiden Complexe, die wir zur Bestimmung der Congruenz anwenden. In Folge davon müssen die Coefficienten ihrer Gleichung homogene Functionen desselben Grades von $(A'B - AB')$ und entsprechend gebildeter Ausdrücke: $(A'C - AC')$, $(B'C - BC')$, ..., sein.

Aehnliches gilt für die beiden Congruenzen:

$$\Omega + \lambda\Omega'' = 0, \qquad \Omega' + \lambda\Omega'' = 0,$$

deren Central-Ebenen die folgenden Gleichungen haben mögen:

$$p' = 0, \qquad p = 0.$$

Zwei beliebige Linien der zweiten Erzeugung der Fläche können wir als Directricen einer Congruenz betrachten, welcher die Linien ihrer ersten Erzeugung angehören, und ebenso zwei beliebige Linien ihrer ersten Erzeugung als Directricen einer Congruenz, der die Linien ihrer zweiten Erzeugung angehören.

Jede Ebene, welche irgend zweien Linien derselben Erzeugung eines Hyperboloids parallel ist und den Abstand derselben halbirt, geht durch den Mittelpunct der Fläche.

Der Ort der Mittelpuncte aller Flächen, die durch zwei sich nicht schneidende Linien gehen, ist eine Ebene. Der Ort der Mittelpuncte aller Flächen, die durch ein räumliches Viereck gehen, ist eine gerade Linie.

Wenn zu den beiden Linien einer Erzeugung noch eine dritte Linie derselben Erzeugung hinzukommt, so ergeben sich durch paarweise Zusammenstellung der drei Linien drei Congruenzen, welche diese Linien-Paare zu Directricen haben. Die Fläche ist durch diese Congruenzen vollkommen bestimmt. Der Durchschnittspunct der drei Central-Ebenen der Congruenzen ist der Mittelpunct der Fläche; die drei geraden Linien, welche durch den Mittelpunct gehen und die beiden Directricen schneiden, sind drei Durchmesser derselben.

103. Eine Ebene, welche eine Fläche zweiten Grades in einer geraden

---

In unserem speciellen Falle sind die Ausdrücke von der fraglichen Form nur in linearer Weise in den drei Gleichungen enthalten.

Nehmen wir irgend eine Congruenz der dreigliedrigen Complex-Gruppe und stellen dieselbe durch:

$$(\Omega + \mu_0 \Omega' + \mu'_0 \Omega'') + \lambda(\Omega + \mu^0 \Omega' + \mu_1{}^0 \Omega'') = 0$$

und ihre Central-Ebene durch:

$$q = 0$$

dar, so ergibt sich nach dem Vorstehenden leicht, indem wir:

$$\pi \equiv \mu'_0\mu^0 - \mu_1{}^0\mu_0, \qquad \pi' \equiv \mu'_0 - \mu_1{}^0, \qquad \pi'' \equiv \mu_0 - \mu^0$$

setzen:

$$q \equiv \pi p + \pi' p' + \pi'' p'',$$

womit der Beweis geführt ist, dass sämmtliche Central-Ebenen in demselben Puncte sich schneiden.

Wir können diesen Satz in folgender Weise ausdrücken:

Die Central-Ebenen der Congruenzen einer dreigliedrigen Complex-Gruppe bilden ihrerseits eine dreigliedrige Gruppe von Ebenen.

Wie die Gleichung der Complex-Gruppe das Symbol einer Strahlenfläche ist, ist die letzte Gleichung das Symbol eines Punctes, des Mittelpunctes der Fläche, in welchem unendlich viele Central-Ebenen sich schneiden.

Ich muss mich hier damit begnügen, dadurch, dass ich den Satz des Textes unter der neuen Form ausspreche, eine entfernte Andeutung davon zu geben, wie derselbe einem allgemeinen, weit reichenden Gesichtspuncte sich unterordnet. Wenn es mir vergönnt sein sollte, die Entwickelungen, die sich hier auf gerade Linien beschränken, später auf Kräfte, Rotationen, Dynamen auszudehnen, würde dieser Satz seine bescheidene Stelle in einem systematischen Ganzen finden.

Linie schneidet, schneidet sie ausserdem noch in einer zweiten. Die beiden Durchschnittslinien gehören den beiden verschiedenen Erzeugungen der Fläche an. Jede solche Ebene ist eine Tangential-Ebene und der Punct, in welchem die beiden Erzeugenden in ihr sich schneiden, der Berührungspunct. Jede Linie, welche durch den Durchschnitt zweier Linien verschiedener Erzeugung geht und in der durch diese Linien gehenden Ebene liegt, ist eine Tangente der Fläche. Eine Ebene, welche durch eine gegebene Erzeugende und den Mittelpunct der Fläche geht, ist eine Tangential-Ebene, in welcher der Berührungspunct nach der Richtung der gegebenen Erzeugenden unendlich weit liegt, indem die zweite Erzeugende der gegebenen parallel wird.

Die Ebenen, welche man in jeder von drei Congruenzen, denen die Linien der ersten Erzeugung einer Fläche angehören, durch jede der beiden Directricen, parallel mit der Central-Ebene legen kann, sind Tangential-Ebenen in den Scheiteln des bezüglichen Durchmessers. Die Central-Ebene ist, in Beziehung auf die Fläche, dem Durchmesser zugeordnet. Die beiden Directricen sind Linien der zweiten Erzeugung in den Tangential-Ebenen; die Linien der ersten Erzeugung in denselben erhält man, wenn man durch den Scheitel des Durchmessers in jeder Tangential-Ebene eine gerade Linie zieht, welche der Directrix in der anderen parallel ist.

104. Nach dem Vorstehenden geht eine Ebene, welche irgend zwei Linien derselben Erzeugung parallel ist und ihren Abstand halbirt, durch den Mittelpunct der Fläche. Lassen wir die beiden Linien zusammenfallen, so geht die fragliche Ebene durch diese Linie selbst und wird dadurch zu einer durch den Mittelpunct gehenden Tangential-Ebene. Der Berührungspunct rückt unendlich weit. Wenn die gerade Linie durch eine continuirliche Bewegung die Fläche erzeugt, umhüllt die fragliche Ebene eine Kegelfläche, welche zugleich von einer geraden Linie beschrieben wird, die durch den Mittelpunct geht und der die Fläche erzeugenden geraden Linie in allen Lagen derselben parallel bleibt. Dieselbe Kegelfläche erhalten wir, wenn die die Fläche beschreibende gerade Linie der anderen Erzeugung angehört. Diese Kegelfläche, die hiernach von jeder Ebene berührt wird, die durch den Mittelpunct und irgend eine Linie einer der beiden Erzeugungen geht, und die jede Linie, welche irgend einer Linie einer der beiden Erzeugungen parallel durch den Mittelpunct gelegt wird, zu einer ihrer Seiten hat, heisst der Asymptoten-Kegel der Fläche. Die Seiten des Asymptoten-Kegels sind nicht die einzigen geraden Linien, welche die Fläche in unend-

licher Entfernung berühren. Jede gerade Linie, welche in einer Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels liegt und derjenigen Seite parallel ist, nach welcher dieser Kegel berührt wird, ist eine Asymptote der Fläche. Durch jeden Punct ausserhalb des Kegels lassen sich zwei solcher Asymptoten legen, die zweien Seiten desselben parallel sind.

105. Die beiden Linien der zweiten Erzeugung einer Fläche, welche durch die beiden Scheitel irgend eines Durchmessers derselben gehen, sind die beiden Directricen einer Congruenz, der die Fläche angehört. Die Central-Ebene der Congruenz ist die dem Durchmesser, in Beziehung auf die Fläche, zugeordnete Diametral-Ebene. Wenn wir die beiden Directricen nach dem Durchmesser auf die Central-Ebene projiciren, erhalten wir die Asymptoten der Durchschnitts-Curve der Fläche mit der Central-Ebene. Je zwei zugeordnete Durchmesser der Durchschnitts-Curve fallen in zwei zugeordnete Nebendurchmesser der Congruenz. Irgend ein Durchmesser der Congruenz und zwei zugeordnete Nebendurchmesser in ihrer Central-Ebene sollen drei zugeordnete Durchmesser der Fläche heissen.

Je nachdem der Durchmesser der Fläche begegnet oder nicht, sind die Directricen der bezüglichen Congruenz reell oder imaginär, dem entsprechend sind auch die beiden Asymptoten der Durchschnitts-Curve in der Central-Ebene reell oder imaginär. Diese Curve ist in dem einen Falle eine Hyperbel, in dem anderen eine Ellipse. Die Durchschnitts-Curven in Ebenen, welche der Central-Ebene parallel sind, sind gleich orientirte Hyperbeln oder Ellipsen. Die Hyperbeln arten in den Ebenen, welche durch die Endpuncte des Durchmessers gehen und Tangential-Ebenen sind, in Systeme von geraden Linien aus. Die Ellipsen behalten immer endliche Dimensionen, weil die entsprechenden Tangential-Ebenen imaginär sind. Wenn wir eine Seite des Asymptoten-Kegels als Durchmesser betrachten, fallen die Directricen der bezüglichen Congruenz zusammen (vergl. Nr. 68.), und die Ebene, welche nach dieser Seite den Asymptoten-Kegel berührt, wird Central-Ebene derselben. Die Durchschnitts-Curve der Fläche mit der Central-Ebene artet in ein System von zwei parallelen Linien aus, deren Durchmesser die Kegelseite ist. Die Durchschnitts-Curven in parallelen Ebenen sind Parabeln, deren Durchmesser der Kegelseite parallel sind.

106. Jedem Durchmesser der Fläche entsprechen zwei verschiedene Congruenzen, deren Directricen in den Endpuncten des Durchmessers sich schneiden und Linien der beiden verschiedenen Erzeugungen der Fläche sind.

Solche zwei Congruenzen haben wir (Nr. 79.) zwei in Beziehung auf den Durchmesser conjugirte genannt. Derjenigen dieser zwei Congruenzen, welche zwei Linien der zweiten Erzeugung zu Directricen hat, gehören die Linien der ersten Erzeugung an; der anderen, die zwei Linien der ersten Erzeugung zu Directricen hat, gehören die Linien der zweiten Erzeugung an.

107. Die zugeordneten Polaren einer gegebenen Linie des Raumes, $A_0 B_0$, in Bezug auf die verschiedenen Complexe der dreigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu \Omega' + \mu' \Omega'' = 0,$$

durch welche eine Linienfläche bestimmt ist, bilden eine Congruenz, deren beide Directricen Linien der ersten Erzeugung der ersten Fläche sind (Nr. 101.). Die gegebene gerade Linie schneidet die beiden Directricen in zwei Puncten. Diese beiden Durchschnittspuncte seien A_0 und B_0; sie sind zugleich die beiden Durchschnittspuncte der gegebenen Linie mit der Fläche. Die beiden Directricen seien $A_0 A^0$ und $B_0 B^0$. Die Ebene, welche durch $A_0 B_0$ und $A_0 A^0$ geht, berührt, weil $A_0 A^0$ eine Linie erster Erzeugung ist, die Fläche; der Berührungspunct, der auf dieser Linie liegt, sei A^0. Ebenso berührt eine Ebene, die durch $A_0 B_0$ und $B_0 B^0$ geht, die Fläche in einem Puncte von $B_0 B^0$; dieser Punct sei B^0. Wir wollen die beiden Berührungspuncte A^0 und B^0, welche auf den beiden Directricen und also auf der Fläche liegen, durch eine gerade Linie $A^0 B^0$ verbinden.

Wenn eine Tangential-Ebene der Fläche durch eine Linie erster Erzeugung derselben, bezüglich durch $A_0 A^0$ oder $B_0 B^0$ gelegt wird, so ist die Linie zweiter Erzeugung, welche durch den Berührungspunct, bezüglich durch A^0 oder B^0 geht, dadurch bestimmt, dass sie irgend eine andere Linie erster Erzeugung, bezüglich $B_0 B^0$ oder $A_0 A^0$, schneidet. In der obigen Construction sind also $A_0 B^0$ und $A^0 B_0$ Linien der zweiten Erzeugung. $A_0 A^0 B^0 B_0$ ist ein der Fläche aufgeschriebenes Viereck, dessen beide Paare gegenüberliegender Seiten der zwiefachen Erzeugung der Fläche angehören. Die beiden Diagonalen des Vierecks sind $A_0 B_0$ und $A^0 B^0$. Die Seiten des Vierecks sind zugleich vier von den sechs Kanten eines Tetraeders; die Flächen desselben, deren jede zwei auf einander folgende Seiten enthält, berühren die Linienfläche in den vier Winkelpuncten des Vierecks. $A_0 B_0$ und $A^0 B^0$ sind die beiden übrigen, einander gegenüberstehenden Kanten des Tetraeders.

108. Aus dem Vorstehenden folgt unmittelbar, dass die Beziehung der beiden Linien $A_0 B_0$ und $A^0 B^0$ zur Fläche eine vollkommen gegenseitige ist. Die beiden Tangential-Ebenen, welche durch jede derselben an die Fläche

sich legen lassen, berühren dieselbe in den beiden Durchschnittspuncten der jedesmaligen anderen; die Tangential-Ebenen in den Durchschnittspuncten jeder derselben mit der Fläche schneiden sich auf der jedesmal anderen. Wir nennen die beiden Linien zwei zugeordnete Polaren in Beziehung auf die Fläche. Zu jeder Linie des Raumes gehört eine zweite als zugeordnete Polare.

Wenn wir eine Congruenz dadurch bestimmen, dass wir irgend zwei Linien einer Fläche als Directricen derselben nehmen, so ordnen sich die der Congruenz angehörigen Linien paarweise so zusammen, dass jeder dieser Linien eine andere entspricht, mit der sie, in Beziehung auf die Fläche, zwei zugeordnete Polaren bildet. Diejenigen dieser Linien, die mit ihren zugeordneten Polaren zusammenfallen, gehören der Fläche an.

Je zwei Linien der einen Erzeugung bilden mit je zwei Linien der anderen ein der Fläche aufgeschriebenes Viereck, so wie die vier Kanten eines ihr umschriebenen Tetraeders; die beiden Diagonalen dieses Vierecks, oder, was dasselbe heisst, zwei gegenüberliegende Kanten des Tetraeders, sind, in Beziehung auf die Fläche, zwei conjugirte Polaren.

109. Drei Linien der einen und drei Linien der anderen Erzeugung einer Linienfläche schneiden einander in neun Puncten, welche der Fläche angehören. Diese Puncte lassen sich in drei Gruppen:

$$P,\ Q,\ R, \qquad P',\ Q',\ R', \qquad P'',\ Q'',\ R'' \tag{3}$$

so vertheilen, dass in den drei Puncten derselben Gruppe die drei Linien der einen Erzeugung die drei Linien der anderen Erzeugung schneiden. Den neun Puncten entsprechen neun Ebenen, welche die Fläche in diesen Puncten berühren:

$$p,\ q,\ r, \qquad p',\ q',\ r', \qquad p'',\ q'',\ r''. \tag{4}$$

Die drei Linien der einen Erzeugung enthalten die Puncte:

$$P,\ Q'',\ R', \qquad R,\ P'',\ Q', \qquad Q,\ R'',\ P',$$

die Linien der anderen Erzeugung die Puncte:

$$P,\ R'',\ Q', \qquad Q,\ P'',\ R', \qquad R,\ Q'',\ P'.$$

Die neun Puncte bestimmen drei der Fläche aufgeschriebene Sechsecke:

$$\left.\begin{array}{l} P'\ Q''\ R'\ P''\ Q'\ R'', \\ P\ Q''\ R\ P''\ Q\ R'', \\ P\ Q'\ R\ P'\ Q\ R'. \end{array}\right\} \tag{5}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir drei sechsflächige Körper, gebildet von den Tangential-Ebenen in den Eckpuncten der drei Sechsecke. Das ganze geometrische Gebilde ist gleichmässig bestimmt, gleichviel, ob wir von den drei Puncten einer der drei Gruppen (3), oder den drei Tangential-Ebenen in solchen drei Puncten, oder endlich von einem der drei Sechsecke (5) ausgehen und, dem entsprechend, drei Puncte der Fläche, oder drei Tangential-Ebenen derselben oder ein der Fläche aufgeschriebenes Sechseck von vorne herein willkürlich annehmen.

Gehen wir von drei Puncten der Fläche P, Q, R aus, so ist durch diese drei Puncte eine Ebene (P, Q, R) und durch die drei Tangential-Ebenen in diesen Puncten ein Punct (p, q, r) bestimmt. Die drei Durchschnittslinien der drei Tangential-Ebenen sind die drei Diagonalen des dritten Sechsecks:

Die drei Diagonalen eines der Linienfläche aufgeschriebenen Sechsecks schneiden sich in demselben Puncte.

Das erste aufgeschriebene Sechseck hat P' und P'', Q' und Q'', R' und R'' zu gegenüberstehenden Winkelpuncten; die Tangential-Ebenen in den drei Paaren gegenüberstehender Winkelpuncte schneiden sich in den drei Linien (P, Q), (P, R), (Q, R), welche die gegebenen Puncte P, Q, R paarweise mit einander verbinden und also in derselben Ebene liegen.

Die Tangential-Ebenen in je zwei gegenüberliegenden Winkelpuncten eines der Linienfläche aufgeschriebenen Sechsecks schneiden sich in drei geraden Linien, welche in derselben Ebene liegen.

110. Ein aufgeschriebenes Sechseck, für welches wir das erste nehmen wollen, bestimmt drei aufgeschriebene Vierecke. Die Seiten jedes Vierecks sind solche vier Seiten des Sechsecks, welche, paarweise genommen, in zwei gegenüberliegenden Winkelpuncten desselben zusammenstossen. Die drei Diagonalen des Sechsecks: (R', R''), (Q', Q''), (P', P''), welche in dem Puncte (p, q, r) sich schneiden, sind drei Diagonalen der drei Vierecke; die drei zweiten Diagonalen dieser Vierecke sind (P, Q), (P, R), (Q, R), welche in der Ebene (P, Q, R) liegen. In Gemässheit der Nummer 104. haben hiernach drei gerade Linien, welche durch denselben Punct gehen, solche drei gerade Linien zu zugeordneten Polaren, die in derselben Ebene liegen. Also:

Die zugeordneten Polaren aller Linien, die in demselben Puncte sich schneiden, liegen in derselben Ebene.

Es entspricht hiernach jedem Puncte des Raumes eine Ebene und jeder Ebene ein Punct. Die Ebene ist in Beziehung auf die Fläche die Polar-Ebene des Punctes, der Punct der Pol der Ebene. Nach dem Vorstehenden umhüllen die Tangential-Ebenen der Fläche in den Puncten einer ebenen Durchschnitts-Curve eine Kegelfläche, die durch diese Curve geht und den Pol der schneidenden Ebene zu ihrem Mittelpuncte hat. Umgekehrt berühren alle Tangential-Ebenen der Fläche, welche durch einen Punct gehen, die Fläche in einer ebenen Curve, deren Ebene die Polar-Ebene des gegebenen Punctes ist.*)

111. Wir lassen noch einige analytische Entwicklungen folgen, die bestimmt sind, die vorstehenden geometrischen Anschauungen, die weiter zu verfolgen hier nicht der Ort ist, zu unterstützen und zu erweitern. Wir wollen eine Strahlenfläche, welche durch die Gleichungen dreier Complexe des ersten Grades, die wir aus einer dreigliedrigen Gruppe

$$\Omega + \mu\Omega' + \mu'\Omega'' = 0$$

willkürlich auswählen können, gegeben ist, durch eine Gleichung in gewöhnlichen Punct-Coordinaten darstellen.

Wir werden zunächst für die drei Complexe der Gruppe drei solche Complexe nehmen, deren sämmtliche Linien die Axe derselben schneiden. Bestimmen wir den Anfangspunct willkürlich und legen die drei Coordinaten-Ebenen durch die drei Axen der Complexe, so erhalten wir für die Gleichungen der drei Complexe die folgenden:

$$\Omega \equiv C - D\sigma + E\varrho = 0, \tag{6}$$

$$\Omega' \equiv B's - D'\sigma + F'\eta = 0, \tag{7}$$

$$\Omega'' \equiv A''r + E''\varrho + F''\eta = 0. \tag{8}$$

Wir haben zwischen den Coordinaten irgend eines Punctes x, y, z, welcher auf irgend einem Strahle liegt, und den vier Coordinaten r, s, ϱ und σ des Strahles die beiden Relationen:

$$x = rz + \varrho, \qquad y = sz + \sigma,$$

woraus zur Bestimmung der fünften Coordinate folgt:

$$ry - sx = \eta.$$

Wenn wir zwischen den vorstehenden sechs Gleichungen die fünf Strahlen-

*) Ich habe die drei zusammengehörigen, der Fläche aufgeschriebenen Sechsecke bereits vor längerer Zeit in dem „System der Geometrie des Raumes" betrachtet (vergl. Nr. 87.—93.), und durch analytische Symbole den Beweis geführt, dass einerseits die drei Puncte, in welchen die Diagonalen der drei Sechsecke sich schneiden, in einer geraden Linie liegen, und andererseits die drei Ebenen, welche die Durchschnittslinien der Tangential-Ebenen in den gegenüberstehenden Winkelpuncten der drei Sechsecke enthalten, sich auf einer zweiten geraden Linie schneiden, und endlich, dass diese beiden geraden Linien zwei zugeordnete Polaren in Beziehung auf die Fläche sind.

Coordinaten eliminiren, so stellt die resultirende Gleichung in x, y, z die Strahlenfläche in Punct-Coordinaten dar.

Eliminiren wir zuerst η, so erhalten wir statt der beiden letzten Complex-Gleichungen (7) und (8):

$$(B' - F'x)\, s + F'y \cdot r - D'\sigma = 0,$$
$$(A'' + F''y)\, r - F''x \cdot s + E''\varrho = 0,$$

und wenn wir dann ϱ und σ eliminiren, kommt:

$$Ez \cdot r - Dz \cdot s - C - Ex + Dy = 0,$$
$$F'y \cdot r + (B' - F'x + D'z)\, s - D'y = 0,$$
$$(A'' + F''y - E''z)\, r - F''x \cdot s + E''x = 0.$$

Bestimmen wir die Werthe von s und r aus den beiden letzten der vorstehenden drei Gleichungen und setzen sie in die erste dieser Gleichungen ein, so kommt:

$$\begin{aligned} & Exz\,[E''(B' - F'x + D'z) - D'F''y] \\ & + Dyz\,[D'(A'' + F''y - E''z) + E''F'x] \\ & + (C + Ex - Dy)\,[(A'' + F''y - E''z)(B' - F'x + D'z) + F'F''xy] = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung verschwinden die höheren Potenzen von x, y, z und wir erhalten:

$$\begin{aligned} & A''B'C + A''(B'E - CF')\,x + B'(CF'' - A''D)\,y + C(A''D' - B'E'')\,z \\ & - A''EF' \cdot x^2 - B'DF'' \cdot y^2 - CD'E''z^2 \\ & + (CD'F'' + B'DE'')\,yz + (CE''F' + A''D'E)\,xz + (B'EF'' + A''DF')\,xy = 0. \end{aligned}$$

Dividiren wir diese Gleichung durch $A''\, B'\, C$ und schreiben für:

$$\frac{E}{C}, \quad -\frac{D}{C}, \quad -\frac{F'}{B'}, \quad \frac{D'}{B'}, \quad \frac{F''}{A''}, \quad -\frac{E''}{A''},$$

bezüglich:

$$t', \quad u'', \quad t'', \quad v', \quad u', \quad v'',$$

so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & 1 + (t' + t'')\,x + (u' + u'')\,y + (v' + v'')\,z \\ & + t't''x^2 + u'u''y^2 + v'v''z^2 \\ & + (u'v' + u''v'')\,yz + (t'v' + t''v'')\,xz + (t'u' + t''u'')\,xy = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Diese Gleichung stellt dieselbe Fläche in Punct-Coordinaten dar, welche ursprünglich durch die drei Complex-Gleichungen (6), (7) und (8) dargestellt wurde. Diese drei Gleichungen werden, wenn wir die sechs neuen Constanten einführen:

$$\left.\begin{aligned} t'\varrho + u''\sigma + 1 &= 0, \\ -v'\sigma - t''\eta + s &= 0, \\ u'\eta - v''\varrho + r &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und folglich ist, wenn μ und μ' zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, die allgemeine Gleichung der dreigliedrigen Complex-Gruppe, durch welche die Strahlenfläche bestimmt wird, die folgende:

$$(t'\varrho + u''\sigma + 1) + \mu(v'\sigma + t''\eta - s) + \mu'(u'\eta - v''\varrho + r) = 0. \quad (11)$$

112. Setzen wir in der Gleichung (9) nach einander z, y und x gleich Null, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}(t'x + u''y + 1)\cdot(t''x + u'y + 1) &= 0,\\ (v'z + t''x + 1)\cdot(v''z + t'x + 1) &= 0,\\ (u'y + v''z + 1)\cdot(u''y + v'z + 1) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Die Durchschnitts-Curven der Fläche mit den drei Coordinaten-Ebenen arten also in Systeme von zwei geraden Linien aus. Die Fläche wird von den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ berührt; die Linien der zweiten Erzeugung der Fläche in diesen Ebenen sind:

$$\left.\begin{aligned}t'x + u''y + 1 &= 0,\\ v'z + t''x + 1 &= 0,\\ u'y + v''z + 1 &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

die Linien der ersten Erzeugung:

$$\left.\begin{aligned}t''x + u'y + 1 &= 0,\\ v''z + t'x + 1 &= 0,\\ u''y + v'z + 1 &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Berührungs-Puncte in den drei Coordinaten-Ebenen sind die Durchschnitte der Linien erster und zweiter Erzeugung in jeder der drei Ebenen. Die drei Linien zweiter Erzeugung sind die Axen solcher drei Complexe der dreigliedrigen Gruppe, auf denen alle Linien der Complexe sich schneiden, oder mit anderen Worten, drei Directricen dreier Congruenzen der Gruppe. Wenn wir die drei Linien zweiter Erzeugung mit den drei Linien erster Erzeugung vertauschen, so treten an die Stelle der drei Complexe (10) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}t''\varrho + u'\sigma + 1 &= 0,\\ -v''\sigma - t'\eta + s &= 0,\\ u''\eta - v'\varrho + r &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

und zur Bestimmung derselben Strahlenfläche erhalten wir die neue dreigliedrige Complex-Gruppe:

$$(t''\varrho + u'\sigma + 1) + \mu_1(v''\sigma + t'\eta - s) + \mu_1'(u''\eta - v'\varrho + r) = 0. \quad (15)$$

Jeder Congruenz einer der beiden dreigliedrigen Complex-Gruppen (11) und (15) entspricht in der andern eine conjugirte Congruenz.

113. Wenn insbesondere:

$$t' + t'' = 0, \qquad u' + u'' = 0, \qquad v' + v'' = 0, \tag{16}$$

nimmt die Gleichung der Fläche die folgende einfachere Form an:

$$1 - t'^2 x^2 - u'^2 y^2 - v'^2 z^2 + 2 u' v' \cdot yz + 2 t' v' xz + 2 t' u' xy = 0. \tag{17}$$

Dann sind die beiden Linien verschiedener Erzeugungen in jeder der drei Coordinaten-Ebenen einander parallel und stehen gleich weit vom Anfangspuncte der Coordinaten ab. Dieser ist der Mittelpunct der Fläche. Die drei Coordinaten-Ebenen berühren den Asymptoten-Kegel der Fläche.

114. Wenn die Fläche insbesondere ein hyperbolisches Paraboloid ist, bleiben die drei geraden Linien (12) Linien derselben Erzeugung desselben, sind aber der Bedingung unterworfen, dass sie einer gegebenen Ebene parallel sind. Nehmen wir für die Gleichung dieser Ebene:

$$ax + by + cz = 0, \tag{18}$$

so kommt:

$$\frac{a}{b} = \frac{t'}{u''}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{u'}{v''}, \qquad \frac{c}{a} = \frac{v'}{t''}, \tag{19}$$

woraus sich die folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den sechs Constanten, von welchen die Fläche abhängt, ergibt:

$$t' u' v' = t'' u'' v''. \tag{20}$$

In Folge derselben Bedingungs-Gleichung sind die Linien der zweiten Erzeugung einer zweiten gegebenen Ebene parallel. Nehmen wir:

$$a' x + b' y + c' z = 0 \tag{21}$$

für die Gleichung dieser Ebene, so kommt:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{t''}{u'}, \qquad \frac{b'}{c'} = \frac{u''}{v'}, \qquad \frac{c'}{a'} = \frac{v''}{t'}. \tag{22}$$

Entwickeln wir die Gleichungen (18) und (21), so kommt:

$$\left.\begin{aligned} t'' v'' x + u' v' y + v' v'' z &= 0, \\ t' v' x + u'' v'' y + v' v'' z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, denen die Linien der ersten und zweiten Erzeugung des Paraboloids parallel sind, bestimmen die Richtung der Durchmesser desselben.

Wir finden für dieselbe unter Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung (20):

$$\frac{t' t'' x}{t' - t''} = \frac{u' u'' y}{u' - u''} = \frac{v' v'' z}{v' - v''}. \tag{24}$$

116. Wir haben bisher gerade Linien vorzugsweise als Strahlen betrachtet, weil diese Vorstellungsart unserer Auffassung näher liegt und Kürze

uns geboten ist. Die Auffassung einer geraden Linie als Axe ist aber eine gleichberechtigte. Die Strahlen-Congruenzen treten dann als Axen-Congruenzen, die Strahlen-Fächen als Axen-Flächen auf. Wir wollen hier dieselbe Fläche, welche wir eben als Strahlen-Fläche betrachtet haben, nunmehr als Axen-Fläche betrachten und durch die früheren Complexe Ω, Ω', Ω'', welche nun nach Einführung der fünf Axen-Coordinaten p, q, π, $\varkappa$, ω durch die folgenden Gleichungen:

$$\Phi \equiv \quad C\omega + Dp + Eq = 0, \tag{25}$$

$$\Phi' \equiv \quad B'\pi + D'p + F' = 0, \tag{26}$$

$$\Phi'' \equiv - A''\varkappa + E''q + F'' = 0 \tag{27}$$

dargestellt werden, bestimmen. Wir erhalten die Gleichung dieser Fläche in Plan-Coordinaten t, u, v, wenn wir zwischen den vorstehenden drei Gleichungen und den Gleichungen:

$$t = pv + \pi,$$
$$u = qv + \varkappa,$$
$$pu - qt = \omega$$

die fünf Axen-Coordinaten eliminiren. Eliminiren wir zunächst zwischen der ersten und sechsten, der zweiten und vierten, der dritten und fünften der vorstehenden sechs Gleichungen bezüglich ω, π und $\varkappa$, so kommt:

$$(Cu + D)p = (Ct - E)q,$$
$$(B't + F') = (B'v - D')p,$$
$$(A''v + E'')q = (A''u - F''),$$

und hieraus, wenn wir diese drei Gleichungen mit einander multipliciren:

$$\frac{(Ct - E)(A''u - F'')(B'v - D')}{(B't + F')(Cu + D)(A''v + E'')} = 1.$$

Dividiren wir Zähler und Nenner des Bruches auf der ersten Seite dieser Gleichung durch $A'' \cdot B' \cdot C$, so kommt, wenn wir wiederum der Kürze wegen die früheren Constanten t' und t'', u' und u'', v' und v'' einführen:

$$\frac{(t - t')(u - u')(v - v')}{(t - t'')(u - u'')(v - v'')} = 1. \tag{28}$$

In dieser Gleichung fällt, wenn sie entwickelt wird, das Product der drei Veränderlichen aus. Sie stellt dieselbe Fläche in Plan-Coordinaten dar, die wir früher durch die Gleichung (9) in Punct-Coordinaten dargestellt haben.

116. Die vorstehende Gleichung wird befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\left.\begin{array}{ll} t - t' = 0, & u - u'' = 0, \\ u - u' = 0, & v - v'' = 0, \\ v - v' = 0, & t - t'' = 0, \end{array}\right\} \tag{29}$$

und ebenso, wenn gleichzeitig:

$$\left.\begin{array}{ll} t-t'=0, & v-v''=0, \\ u-u'=0, & t-t''=0, \\ v-v'=0, & u-u''=0. \end{array}\right\} \tag{30}$$

Die Gleichungen (29) und (30), welche sich auf sechs verschiedene reduciren, stellen, einzeln genommen, sechs Puncte dar, von denen zwei auf jeder der drei Coordinaten-Axen liegen. Paarweise zusammengestellt, wie vorstehend geschehen, stellen sie Axen dar, welche in den drei Coordinaten-Ebenen und zugleich auf der Fläche liegen, einmal die drei Linien zweiter Erzeugung der Fläche (12), das andere Mal die drei Linien erster Erzeugung derselben Fläche (13). Die Fläche wird von den drei Coordinaten-Ebenen berührt.

Wir können die Fläche, ihrer doppelten Erzeugung entsprechend, durch jede der folgenden beiden dreigliedrigen Gruppen linearer Axen-Complexe darstellen:

$$(\omega - u''p + t'q) + \lambda(\pi + v'p - t'') + \lambda'(k + v''q - u') = 0, \tag{31}$$

$$(\omega - u'p + t''q) + \lambda_1(\pi + v''p - t') + \lambda_1'(k + v'q - u'') = 0, \tag{32}$$

indem wir durch λ, λ', λ_1, λ'_1 unbestimmte Coefficienten bezeichnen.

117. Wenn wir für die drei Coordinaten-Ebenen irgend drei Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels der Fläche nehmen, so nimmt in Folge der Relationen (16)

$$t'+t''=0, \qquad u'+u''=0, \qquad v'+v''=0$$

die Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten die folgende Form an:

$$\frac{(t-t')(u-u')(v-v')}{(t+t')(u+u')(v+v')} = 1. \tag{33}$$

In dem Falle des hyperbolischen Paraboloids particularisirt sich die allgemeine Gleichung (28) dadurch, dass das constante Glied bei der Entwickelung fortfällt, was wieder zu der früheren Bedingungs-Gleichung (20) führt.

118. Wir haben in den letzten Nummern dieselbe Erzeugung derselben Fläche, einmal durch drei lineare Gleichungen in Strahlen-Coordinaten, das andere Mal durch drei lineare Gleichungen in Axen-Coordinaten dargestellt und aus den drei linearen Gleichungen die Gleichung derselben Fläche einmal in Punct-Coordinaten, das andere Mal in Plan-Coordinaten abgeleitet.

Wir wollen als zweites Beispiel eine Linienfläche durch drei Complexe der besonderen Art bestimmen, indem wir für die Gleichung derselben drei solche nehmen, die aus den früheren hervorgehen, wenn wir die Constanten derselben mit ihren reciproken Werthen und

$$r,\ s,\ \varrho,\ \sigma,\ \eta \text{ mit } p,\ q,\ \pi,\ \varkappa,\ \omega$$

gegenseitig vertauschen.

Auf diesem Wege erhalten wir, indem wir der Kürze wegen die reciproken Werthe von $t',\ t'',\ u',\ u'',\ v',\ v''$ durch $x',\ x'',\ y',\ y'',\ z',\ z''$ bezeichnen, statt der drei Complex-Gleichungen (10) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} x'\pi + y''\varkappa + 1 &= 0,\\ -z'\varkappa - x''\omega + q &= 0,\\ y'\omega - z''\pi + p &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

119. Wenn wir zwischen diesen drei Gleichungen und den drei Gleichungen:

$$t = pv + \pi, \qquad u = qv + \varkappa, \qquad pu - qt = \omega$$

die fünf Axen-Coordinaten $p,\ q,\ \pi,\ \varkappa,\ \omega$ eliminiren, erhalten wir die folgende Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten:

$$\begin{gathered} 1 + (x' + x'')\,t + (y' + y'')\,u + (z' + z'')\,v \\ + x'x''t^2 + y'y''u^2 + z'z''v^2 \\ + (y'z' + y''z'')\,uv + (x'z' + x''z'')\,tv + (x'y' + x''y'')\,tu = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Diese Gleichung ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der Gleichung (9) $t',\ t'',\ u',\ u'',\ v',\ v''$ durch $x',\ x'',\ y',\ y'',\ z',\ z''$ und $x,\ y,\ z$ durch $t,\ u,\ v$ ersetzen.

Um dieselben Complexe (34) in Strahlen-Coordinaten auszudrücken, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \eta - y''\cdot r + x'\cdot s &= 0,\\ \varrho + z'\cdot r - x'' &= 0,\\ -\sigma - z''\cdot s + y' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

und wenn wir zwischen diesen drei Gleichungen und den drei folgenden:

$$x = rz + \varrho, \qquad y = sz + \sigma, \qquad ry - sx = \eta,$$

die Strahlen-Coordinaten $r,\ s,\ \varrho,\ \sigma,\ \eta$ eliminiren, kommt:

$$\frac{(x - x')\,(y - y')\,(z - z')}{(x - x'')\,(y - y'')\,(z - z'')} = 1. \tag{37}$$

Diese Gleichung erhalten wir unmittelbar, wenn wir in der Gleichung (28) $t',\ t'',\ u',\ u'',\ v',\ v''$ mit $x',\ x'',\ y',\ y'',\ z',\ z''$ und $t,\ u,\ v$ mit $x,\ y,\ z$ vertauschen.

Die beiden Gleichungen (35) und (37) stellen dieselbe Fläche in Plan- und Punct-Coordinaten dar, die in Axen- und Strahlen-Coordinaten durch die Systeme linearer Gleichungen (34) und (36) dargestellt wird.

120. Wenn wir in der Gleichung (35) nach einander v, u und t gleich Null setzen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}(x't + y''u + 1)\,(x''t + y'u + 1) = 0,\\ (z'v + x''t + 1)\,(z''v + x't + 1) = 0,\\ (y'u + z''v + 1)\,(y''u + z'v + 1) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Während also im Allgemeinen die Tangential-Ebenen einer Fläche zweiter Ordnung und Klasse, welche einer gegebenen geraden Linie parallel sind, einen Cylinder umhüllen, artet dieser Cylinder, wenn wir für die gerade Linie nach einander die drei Coordinaten-Axen nehmen, in ein System von zwei parallelen geraden Linien aus. Die Coordinaten-Axen sind also irgend dreien Erzeugenden der Linienfläche, oder, was dasselbe ist, irgend dreien Seiten des Asymptoten-Kegels der Fläche parallel. Denn alle Ebenen, welche durch irgend eine Linie der Fläche gehen, sind Tangential-Ebenen der Fläche. Den drei Linien der ersten Erzeugung, denen die drei Coordinaten-Axen parallel genommen worden sind, sind drei Linien der zweiten Erzeugung parallel. Die beiden Puncten-Paare, in welchen die Ebenen YX, XZ, ZY von den Linien beider Erzeugungen, die bezüglich den Axen OZ, OY, OX parallel sind, getroffen werden, werden durch die Gleichungen (38) dargestellt.

121. In Uebereinstimmung hiermit erhalten wir, um die Gleichung (37) zu befriedigen, einmal die drei Gleichungen-Paare:

$$\left.\begin{aligned}x - x' = 0, \qquad & y - y'' = 0,\\ y - y' = 0, \qquad & z - z'' = 0,\\ z - z' = 0, \qquad & x - x'' = 0,\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

welche die drei Linien zweiter Erzeugung, das andere Mal die drei Gleichungen-Paare:

$$\left.\begin{aligned}x - x' = 0, \qquad & z - z'' = 0,\\ y - y' = 0, \qquad & x - x'' = 0,\\ z - z' = 0, \qquad & y - y'' = 0,\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

welche die drei Linien erster Erzeugung darstellen, die den drei Coordinaten-Axen, bezüglich OZ, OX, OY und OY, OZ, OX parallel sind.

123. Die drei Complexe besonderer Art, durch welche die Fläche bestimmt ist, die einmal durch die Gleichungen (34), das andere Mal durch die Gleichungen (36) dargestellt werden, haben zu Axen diejenigen Linien zweiter Erzeugung, die durch die Gleichungen-Paare (39) dargestellt werden, und andererseits dadurch bestimmt sind, dass sie den Coordinaten-Axen OX, OY,

OZ parallel sind und die bezüglichen Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY in Puncten schneiden, welche in diesen Ebenen durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y'u + z''v + 1 = 0, \\ z'v + x''t + 1 = 0, \\ x't + y''u + 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad (41)$$

dargestellt werden.

Wenn wir drei Seiten des Asymptoten-Kegels selbst zu Coordinaten-Axen nehmen, kommt:

$$x' + x'' = 0, \qquad y' + y'' = 0, \qquad z' + z'' = 0. \qquad (42)$$

Dann nimmt die Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten die folgende Form an:

$$1 - x'^2t^2 - y'^2u^2 - z'^2v^2 + 2y'z' \cdot uv + 2x'z' \cdot tv + 2x'y' \cdot tu = 0, \qquad (43)$$

die Gleichung derselben Fläche in Punct-Coordinaten die folgende:

$$\frac{(x-x')\,(y-y')\,(z-z')}{(x+x')\,(y+y')\,(z+z')} = 1. \qquad (44)$$

124. Wir wollen endlich, zunächst unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, für die Complexe einer dreigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu\,\Omega' + \mu'\,\Omega'' = 0,$$

durch welche eine Linienfläche bestimmt ist, die folgenden drei nehmen:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \equiv \sigma - k_1 r = 0, \\ \Omega' \equiv \varrho + k_2 s = 0, \\ \Omega'' \equiv \eta + k_3 = 0. \end{array}\right\} \qquad (45)$$

Dann fallen die Axen der drei Complexe in die drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ, sind also, wie diese, auf einander senkrecht und schneiden sich im Anfangspuncte der Coordinaten. Die Parameter sind k_1, k_2, k_3. Wenn wir die drei Complexe paarweise zusammenstellen, erhalten wir drei Congruenzen (Ω', Ω''), (Ω, Ω''), (Ω, Ω'), deren Hauptaxen bezüglich in OX, OY, OZ und deren Paare von Nebenaxen bezüglich in OY und OZ, OX und OZ, OX und OY fallen.

Wenn wir, wie früher, vermittelst der drei Gleichungen:

$$x = rz + \varrho, \qquad y = sz + \sigma, \qquad rx - sy = \eta$$

σ, ϱ und η eliminiren, so kommt:

$$\begin{array}{l} y - sz - k_1 r = 0, \\ x - rz + k_2 s = 0, \\ ry - sx + k_3 = 0. \end{array}$$

Aus den beiden ersten der vorstehenden Gleichungen folgt:

$$(k_1 k_2 + z^2)\, r = \quad xz + k_2 y,$$
$$(k_1 k_2 + z^2)\, s = -yz + k_1 x,$$

und wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen und der dritten der vorhergehenden drei Gleichungen r und s eliminiren:

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 + k_1 k_2 k_3 = 0,$$

oder:

$$\frac{x^2}{k_2 k_3} + \frac{y^2}{k_1 k_3} + \frac{z^2}{k_1 k_2} + 1 = 0. \tag{46}$$

Diese Gleichung bleibt ungeändert dieselbe, wenn die Werthe der drei Constanten k_1, k_2, k_3 gleichzeitig ihr Zeichen ändern. Dann treten an die Stelle der drei gegebenen Complexe drei andere, deren drei Durchmesser nach wie vor in die drei Coordinaten-Axen fallen und deren drei Parameter bloss ihr Zeichen geändert haben, das heisst, die drei neuen Complexe sind entgegengesetzt gewunden, als die drei gegebenen. Darin ist die doppelte Erzeugung der Fläche ausgesprochen. Die Linien der einen Erzeugung gehören gleichzeitig den drei ursprünglichen, die der anderen gleichzeitig den drei neuen Complexen an.

125. Wenn die Parameter der drei ursprünglichen Complexe sämmtlich positiv und demnach die Parameter der drei neuen Complexe negativ sind, oder umgekehrt, wenn jene negativ und diese positiv sind, so ist die Fläche imaginär. In allen übrigen Fällen, so lange die Werthe der Parameter reell bleiben, ist die Fläche ein einschaliges Hyperboloid. Dann stimmen die Werthe zweier der drei Parameter der beiden Gruppen von Complexen im Zeichen überein, und der Werth des jedesmaligen dritten Parameters hat das entgegengesetzte Zeichen. Je nachdem der Parameter des ersten, zweiten oder dritten Complexes der Gruppe im Zeichen von den Parametern der beiden übrigen Complexe abweicht, fällt die imaginäre Axe des Hyperboloids bezüglich in die Coordinaten-Axen OX, OY, OZ. In dem ersten Falle erhalten wir:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1, \tag{47}$$

indem wir:

$$\left.\begin{aligned} k_2 k_3 &= \quad a^2, \\ k_1 k_3 &= -b^2, \\ k_1 k_2 &= -c^2 \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

setzen.

Wenn wir den vorstehenden Entwickelungen statt Punct-Coordinaten

Linien-Coordinaten zu Grunde legen und demnach die Linien der Complexe, statt als Strahlen, als Axen betrachten, so erhalten wir für dieselbe Linienfläche, die nunmehr als Axenfläche auftritt, die folgende Gleichung:

$$k_2 k_3 t^2 + k_1 k_3 u^2 + k_1 k_2 v^2 + 1 = 0. \tag{49}$$

126. Jeder gegebenen geraden Linie im Raume sind die Durchmesser eines der unendlich vielen Durchmesser einer dreigliedrigen Gruppe parallel. Wir können daher die drei Coordinaten-Axen als Durchmesser dreier Complexe betrachten, durch welche eine Linienfläche bestimmt ist. In dem Falle rechtwinkliger Coordinaten-Axen stellen die Gleichungen (45) drei Complexe dar, deren drei Axen in die drei Axen der Linienfläche fallen. Die Hauptparameter der drei Complexe sind k_1, k_2, k_3. Wenn wir als Coordinaten-Axen irgend drei zugeordnete Durchmesser derselben Linienfläche nehmen, stellt die Gleichung (45) immer noch drei Complexe der dreigliedrigen Gruppe dar. Nur sind dann k_1, k_2, k_3 nicht mehr die Hauptparameter der drei Complexe, sondern die Parameter derjenigen drei Durchmesser derselben, welche mit den drei Coordinaten-Axen zusammenfallen. Diese drei Parameter wollen wir zur Unterscheidung durch k_1^0, k_2^0, k_3^0 bezeichnen und den drei obigen Constanten ihre Bedeutung als Hauptparameter der drei Complexe lassen. Drei Complexe der dreigliedrigen Gruppe, deren Durchmesser irgend dreien zugeordneten Durchmessern der durch diese Gruppe bestimmten Linienfläche parallel sind, wollen wir, in Beziehung auf die Linienfläche, drei conjugirte Complexe nennen. Es seien ε'', ε', ε die drei Winkel XOY, XOZ, YOZ, welche die drei Coordinaten-Axen, paarweise genommen, mit einander bilden, und δ'', δ', δ, die Neigungs-Winkel von OZ gegen XY, von OY gegen XZ, von OX gegen YZ. Dann sind die drei Ausdrücke:

$$\sin\varepsilon'' \sin\delta'', \qquad \sin\varepsilon' \sin\delta', \qquad \sin\varepsilon \sin\delta$$

einander gleich. Bezeichnen wir sie, der Kürze wegen, durch γ, so erhalten wir:

$$k_1^0 = \frac{k_1}{\gamma}, \quad k_2^0 = \frac{k_2}{\gamma}, \quad k_3^0 = \frac{k_3}{\gamma},$$

und hieraus:

$$k_1^0 : k_2^0 : k_3^0 = k_1 : k_2 : k_3. \tag{50}$$

Setzen wir, den Gleichungen (48) entsprechend,

$$\left.\begin{aligned} k_2^0 k_3^0 &= a_0^2, \\ k_1^0 k_3^0 &= -b_0^2, \\ k_1^0 k_2^0 &= -c_0^2, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

so erhalten wir für die Gleichung der Linienfläche in schiefwinkligen Coordinaten:

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{c_0}\right)^2 = -1. \tag{52}$$

Es bedeuten $a_0 \sqrt{-1}$, b_0, c_0 diejenigen Halbdurchmesser der Fläche, welche mit den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ zusammenfallen. Setzen wir

$$\gamma^2 \cdot a_0^2\, b_0^2\, c_0^2 = \Theta^2, \tag{53}$$

so ist bekanntlich Θ eine Grösse, welche sich nicht ändert, wenn wir statt der drei gegebenen zugeordneten Durchmesser der Fläche irgend drei andere zugeordnete Durchmesser zu Coordinaten-Axen nehmen.

127. Wenn wir gliedweise die beiden letzten Gleichungen (51) mit einander multipliciren und durch die erste dieser Gleichungen dividiren, so kommt:

$$k_1^{0\,2} = \frac{b_0^2\, c_0^2}{a_0^2},$$

und wenn wir k_1 statt k_1^0 einführen:

$$k_1^2 = \gamma^2 \frac{b_0^2\, c_0^2}{a_0^2} = \frac{\Theta^2}{a_0^4}.$$

Hiernach ist:

$$k_1 = \pm \frac{\Theta}{a_0^2}. \tag{54}$$

k_1 ist der Hauptparameter desjenigen Complexes der dreigliedrigen Gruppe, dessen Durchmesser der Axe OX parallel sind und a_0^2 (mit entgegengesetztem Zeichen genommen) das Quadrat desjenigen Halbdurchmessers der Fläche, welcher in diese Axe fällt. Da wir von vorne herein als Coordinaten-Axe jeden beliebigen Durchmesser der Linien-Fläche nehmen können (wobei, je nachdem der neue Durchmesser die Fläche schneidet oder nicht, a_0^2 mit positivem oder negativem Zeichen genommen werden muss), ergibt sich der folgende Satz unmittelbar:

Der Hauptparameter desjenigen Complexes einer dreigliedrigen Gruppe, dessen Durchmesser irgend einem Durchmesser der durch die Gruppe bestimmten Linienfläche parallel sind, ist umgekehrt dem Quadrate der Länge des Durchmessers der Fläche proportional.

128. Einer beliebigen durch den Anfangspunct gelegten Ebene ist gleichzeitig ein Durchmesser der Linien-Fläche, der Hauptdurchmesser einer Congruenz, der diese Fläche angehört, und ein Durchmesser eines Complexes

der dreigliedrigen Gruppe, durch welche die Fläche bestimmt wird, zugeordnet. Dieselben Ebenen, welche dem Durchmesser der Fläche zugeordnet sind, sind der Central-Ebene der Congruenz parallel und in dem Complexe ebenfalls dem mit dem Durchmesser der Fläche zusammenfallenden Durchmesser zugeordnet. Es folgt dies unmittelbar aus den Gleichungen der drei conjugirten Complexe (45), durch welche, auch in der Annahme schiefwinkliger Coordinaten, eine Linienfläche bestimmt wird. Dem Durchmesser eines der drei Complexe, welcher in eine der drei Coordinaten-Axen fällt, ist die Coordinaten-Ebene, welche durch die beiden andern Coordinaten-Axen geht, zugeordnet, und dieselbe Ebene ist einerseits die Central-Ebene derjenigen Congruenz, welche durch die beiden übrigen Complexe bestimmt wird und andererseits die Diametral-Ebene der Fläche, die demjenigen Durchmesser derselben conjugirt ist, welcher mit dem Durchmesser des Complexes zusammenfällt.

Ein Complex einer dreigliedrigen Gruppe ist vollkommen bestimmt, wenn die Richtung seiner Durchmesser gegeben ist. In der vorigen Nummer haben wir, vermittelst der entsprechenden Linien-Fläche, in einfachster Weise seinen Parameter erhalten. Die vorstehenden Erörterungen geben uns für einen seiner Durchmesser die zugeordneten Ebenen. Die Construction seiner Axe ist hiernach auf die 46. Nummer zurückgeführt.

Man trage auf demjenigen Durchmesser der Fläche, welcher die gegebene Durchmesser-Richtung des Complexes hat, vom Mittelpuncte aus den Parameter des Complexes auf und projicire denselben auf die dem Durchmesser zugeordnete Diametral-Ebene der Fläche. Der Parameter ist nach der vorigen Nummer, wenn wir die Länge des Halbdurchmessers der Fläche durch r_0^2 bezeichnen, gleich $\frac{\Theta}{r_0^2}$, die Projection desselben, wenn wir den Winkel, den der Durchmesser der Fläche mit der ihr conjugirten Ebene bildet, δ_0 nennen, gleich

$$\frac{\Theta}{r_0^2} \cos \delta_0 .$$

Wenn wir dann den Durchmesser der Fläche, parallel mit sich selbst, von der projicirenden Ebene um eine Strecke entfernen, die dieser Projection gleich ist, so ist der verschobene Durchmesser der Fläche in der neuen Lage die Axe des Complexes.

Diese Verschiebung kann nach entgegengesetzter Richtung vorgenommen werden. Dem entsprechend erhalten wir die beiden gleichweit vom Mittelpuncte abstehenden, unter sich parallelen Axen zweier verschiedenen Complexe. Diesen beiden Complexen gehören die beiden verschiedenen Erzeugungen der Linienfläche an.

129. Wir erhalten für die Parameter der bezüglich in OX, OY, OZ fallenden Durchmesser der drei conjugirten Complexe:

$$k_1^0 = \pm \frac{b^0 c^0}{a^0}, \qquad k_2^0 = \mp \frac{a_0 c_0}{b_0}, \qquad k_3^0 = \mp \frac{a_0 b_0}{c_0}, \tag{55}$$

und für die Hauptparameter dieser Complexe:

$$k_1 = \pm \frac{\Theta}{a_0^2}, \qquad k_2 = \mp \frac{\Theta}{b_0^2}, \qquad k_3 = \mp \frac{\Theta}{c_0^2}. \tag{56}$$

In Gemässheit der Gleichungen (58) haben k_2^0 und k_3^0 übereinstimmende Zeichen und k_1^0 weicht von ihnen im Zeichen ab, woraus unter Berücksichtigung der Proportionen (50) folgt, dass auch k_3 und k_2 unter sich gleiche, mit k_1 entgegengesetzte Zeichen haben. Wir müssen demnach sowohl in den Gleichungen (55) als auch in den Gleichungen (56) die drei obern und die drei untern Zeichen zusammennehmen.

Wenn wir die drei Gleichungen (55) gliedweise mit einander multipliciren, so kommt:

$$k_1^0\, k_2^0\, k_3^0 = \pm a_0\, b_0\, c_0. \tag{57}$$

Das Product der Parameter derjenigen Durchmesser dreier conjugirter Complexe, welche mit den drei zugeordneten Durchmessern der Linienfläche zusammenfallen, ist dem Producte der drei halben Durchmesser der Fläche gleich.

Wenn wir die drei Gleichungen (56) gliedweise mit einander multipliciren, so kommt:

$$k_1\, k_2\, k_3 = \pm \frac{\Theta^3}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} = \pm \gamma^3 .\, a_0\, b_0\, c_0 = \pm \gamma^2 .\, abc,$$

mithin

$$\frac{k_1 k_2 k_3}{abc} = \pm \gamma^2. \tag{58}$$

Aus denselben drei Gleichungen (56) erhalten wir ferner:

$$(a_0^2 - b_0^2 - c_0^2) = \pm \Theta \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)$$

und hieraus:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \pm \frac{a^2 - b^2 - c^2}{abc}. \tag{59}$$

Die Summe der reciproken Werthe der Parameter irgend dreier, in Beziehung auf eine gegebene Linienfläche zugeordneter, Complexe ist constant.

130. Wir wollen die Axen der Complexe einer dreigliedrigen Gruppe, durch welche eine Linienfläche bestimmt ist, parallel mit sich selbst verschieben, bis sie durch den Mittelpunct der Fläche gehen und dann, indem wir die Durchmesser der Fläche als Leitstrahlen betrachten, auf jedem derselben vom Mittelpuncte aus den Hauptparameter desjenigen Complexes auftragen, der diesen Durchmesser auch zu dem seinigen hat. Dann erhalten wir eine neue Fläche, welche in Beziehung auf die Linienfläche dieselbe Rolle spielt, als die characteristische Curve einer Linienfläche in Beziehung auf diese. Wir wollen die neue Fläche die characteristische Fläche der Linienfläche nennen.

Wenn wir irgend einen Leitstrahl der characteristischen Fläche durch r und den entsprechenden Leitstrahl der Linienfläche durch r_1 bezeichnen, so ist:

$$r = \pm \frac{\Theta}{{r_1}^2}.$$

Wir wollen die Linienfläche (47) auf ihre drei Axen als Coordinaten-Axen beziehen. Indem wir dann diejenigen drei Winkel, welche ein beliebiger Leitstrahl r_1 mit den drei Axen bildet, α, β, γ nennen, können wir die Gleichung dieser Fläche in der nachstehenden Weise schreiben:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2} = -\frac{1}{{r_1}^2},$$

und erhalten die Gleichung der characteristischen Fläche, wenn wir in dieser Gleichung für $\frac{1}{{r_1}^2}$ seinen Werth $\pm\frac{r}{\Theta}$ einsetzen. Auf diesem Wege ergibt sich:

$$\Theta\left\{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right\} = \pm r,$$

und wenn wir zu den rechtwinkligen Punct-Coordinaten zurückgehen:

$$\Theta\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right\} = \pm r^3. \tag{60}$$

Wenn wir die beiden Seiten der letzten Gleichung quadriren und für r^2 und Θ^2 bezüglich $(x^2+y^2+z^2)$ und $a^2b^2c^2$ schreiben, so kommt:

$$a^2b^2c^2\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right\}^2 - (x^2+y^2+z^2)^3, \tag{61}$$

oder:

$$(b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2)^2 = a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)^3. \tag{62}$$

131. Die vollständige characteristische Fläche zerfällt in zwei Theile, welche einzeln durch die Gleichung (60) dargestellt werden, wenn wir in dieser Gleichung r nach einander mit entgegengesetztem Vorzeichen nehmen. Es gibt immer zwei dreigliedrige Gruppen von Complexen, welche in einer solchen geometrischen Beziehung zu einander stehen, dass die Complexe der beiden Gruppen sich bloss dadurch von einander unterscheiden, dass ihre Parameter entgegengesetzte Zeichen haben. Solchen zwei Complex-Gruppen entsprechen die beiden Erzeugungen derselben Fläche. Es gibt also insbesondere auch zwei Systeme von drei conjugirten Complexen, deren Durchmesser irgend dreien zugeordneten Durchmessern der Linienfläche parallel und deren Parameter bezüglich gleich aber von entgegengesetztem Zeichen sind. Durch die beiden Gruppen zugeordneter Complexe sind die beiden Erzeugungen der Linienfläche bestimmt. Die characteristische Fläche bezieht sich gleichmässig auf beide Erzeugungen.

132. In Gemässheit der Relationen (48) können wir in die Gleichung der characteristischen Fläche, statt der drei Halbaxen der Linienfläche, die Hauptparameter derjenigen drei conjugirten Complexe einführen, deren Durchmesser den Axen der Linienfläche parallel sind. Auf diese Weise finden wir:

$$(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^3, \tag{63}$$

während die Gleichung der Linienfläche selbst, nach Einführung derselben Constanten, die folgende wird:

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 = k_1 k_2 k_3. \tag{64}$$

Wenn wir in der Gleichung (63) nach einander x, y, z gleich Null setzen, so erhalten wir für die Durchschnitts-Curven der characteristischen Fläche mit den drei Coordinaten-Ebenen:

$$\left.\begin{aligned} (k_1 x^2 + k_2 y^2)^2 &= (x^2 + y^2)^3, \\ (k_1 x^2 + k_3 z^2)^2 &= (x^2 + z^2)^3, \\ (k_2 y^2 + k_3 z^2)^2 &= (y^2 + z^2)^3. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Durch drei conjugirte Complexe einer Linienfläche, paarweise genommen, sind drei Congruenzen bestimmt, die wir ihrerseits als drei conjugirte Congruenzen der Linienfläche bezeichnen können. Den beiden Systemen dreier conjugirter Complexe, deren Durchmesser den drei Axen der Linienfläche parallel sind, entsprechen zwei Systeme dreier conjugirter Congruenzen, deren jede eine Axe der Linienfläche zur Hauptaxe und die jedesmaligen beiden andern Axen derselben zu Nebenaxen hat. Die drei Congruenzen eines der beiden Systeme entsprechen einer der drei Congruenzen des andern Systems der andern Erzeugung der Linienfläche. Die erste der drei Gleichungen (67) stimmt vollkommen mit der Gleichung (149) des vorigen Paragraphen überein. Daraus entnehmen wir den folgenden Satz:

Die drei Durchschnitts-Curven der characteristischen Fläche einer gegebenen Linienfläche mit den drei Hauptschnitten XY, XZ, YZ dieser letztern Fläche sind, in diesen Hauptschnitten, die Projectionen der characteristischen Curven dreier conjugirter Congruenzen, welche bezüglich OZ, OY, OX zu ihren Hauptaxen haben.*)

Wir verweisen, was die Discussion der Durchschnitts-Curven (67) betrifft, auf den vorigen Paragraphen und bemerken bloss, dass die in XY und XZ liegenden Durchschnitts-Curven aus vier Schleifen bestehen und im Mittelpuncte der Fläche einen vierfachen Punct haben, während für die in YZ liegende Durchschnitts-Curve dieser Punct ein isolirter ist.

133. Um die Gleichung der characteristischen Fläche (63) zu befriedigen, können wir gleichzeitig:

$$\left.\begin{aligned} k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 &= \pm\, \varkappa \cdot k_1 k_2 k_3, \\ x^2 + \quad y^2 + \quad z^2 &= \varkappa_0 \sqrt[3]{k_1^2\, k_2^2\, k_3^2} \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

setzen, indem wir durch $\varkappa$ und $\varkappa_0$ zwei beliebige Constanten bezeichnen, zwischen denen die folgende Relation besteht:

$$\varkappa^2 = \varkappa_0^3.$$

Diese Relation wird insbesondere befriedigt, wenn die beiden Constanten gleich Eins sind. Es lässt sich eine characteristische Fläche durch eine räumliche Curve beschreiben, welche der Durchschnitt einer Kugel mit zwei Flächen zweiter Ordnung ist. Diese Curve bestimmt in jeder ihrer Lagen solche Complexe, deren Parameter, abgesehen vom Zeichen, gleich sind.

In unserm Falle ist die gegebene Linienfläche ein einschaliges Hyperboloid. Führen wir in die letzten beiden Gleichungen statt der Parameter die Halbaxen-Quadrate desselben wieder ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \pm\, \varkappa, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \varkappa_0 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

*) Den Satz des Textes können wir auf drei beliebige zugeordnete Complexe einer gegebenen Linienfläche und die drei entsprechenden zugeordneten Durchmesser ausdehnen.

Wenn wir $\varkappa$ und $\varkappa_0$ gleich Eins setzen, so stellt die erste der beiden vorstehenden Gleichungen, wenn wir das untere Vorzeichen nehmen, das gegebene einschalige Hyperboloid dar, wenn wir das obere Zeichen nehmen, ein zweischaliges Hyperboloid. Die beiden Hyperboloide haben denselben Asymptoten-Kegel und die Quadrate irgend zweier gleichgerichteter Durchmesser derselben sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Ein einschaliges und zweischaliges Hyperboloid, welche in dieser gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, wollen wir überhaupt zwei zusammengehörige Hyperboloide nennen.

Die characteristische Fläche eines gegebenen einschaligen Hyperboloids geht durch die Curve, nach welcher das gegebene einschalige Hyperboloid und das mit diesem zusammengehörige zweischalige Hyperboloid von einer Kugel geschnitten wird, deren Radius der Cubik-Wurzel aus dem Producte der drei Halbaxen des gegebenen einschaligen Hyperboloids gleich ist.

Wenn wir die linearen Dimensionen der beiden Hyperboloide im quadratischen, den Radius der so bestimmten Kugel im cubischen Verhältnisse continuirlich wachsen lassen, so beschreiben die Durchschnitts-Curven die characteristische Fläche.

134. Die vollständige characteristische Fläche theilt sich in zwei Theile, die durch den Asymptoten-Kegel von einander getrennt sind. Der eine Theil besteht aus Curven-Zügen, die auf den einschaligen Hyperboloiden liegen. Durch ihn sind die Parameter solcher Complexe bestimmt, deren Durchmesser den reellen Durchmessern des gegebenen einschaligen Hyperboloids parallel sind. Der andere Theil besteht aus Curven-Zügen, die auf den zweischaligen Hyperboloiden liegen. Durch ihn sind die immer reellen Parameter derjenigen Complexe bestimmt, deren Durchmesser den (ihrer Länge nach) imaginären Durchmesser des gegebenen einschaligen Hyperboloids parallel sind. Während die Durchmesser der Fläche, durch die Seiten des Asymptoten-Kegels hindurchgehend, unendlich gross werden, werden die entsprechenden Parameter gleich Null. Diesem Durchgange entspricht der Uebergang zwischen reellen und imaginären Durchmessern der Fläche, zwischen positiven und negativen Parametern der Complexe.

135. Wir haben bisher bloss das einschalige Hyperboloid betrachtet, dessen Erzeugende reelle gerade Linien sind. Der imaginären Linienfläche, die wir imaginäres Ellipsoid nennen wollen, entspricht, dass die Para-

meter der drei Central-Complexe dasselbe Zeichen haben. Wenn wir dem entsprechend

$$\begin{aligned} k_2 k_3 &= a^2, \\ k_1 k_3 &= b^2, \\ k_1 k_2 &= c^2 \end{aligned} \tag{70}$$

setzen, erhalten wir für das imaginäre Ellipsoid folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \tag{71}$$

Aber die Gleichung (64), welche die Linienfläche darstellt, bleibt auch dann noch reell, wenn die Parameter der drei Central-Complexe gleichzeitig imaginär werden. Wenn wir für k_1, k_2, k_3 die imaginären Werthe $k_1' \sqrt{-1}$, $k_2' \sqrt{-1}$, $k_3' \sqrt{-1}$ einsetzen, geht diese Gleichung in die folgende über:

$$k_1' x^2 + k_2' y^2 + k_3' z^2 = - k_1' k_2' k_3'. \tag{72}$$

Hier haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden: entweder haben von den drei neuen Constanten nur zwei dasselbe Zeichen und die dritte hat das entgegengesetzte Zeichen, oder die Zeichen derselben stimmen sämmtlich überein. In dem ersteren Falle können wir

$$\begin{aligned} k_2' k_3' &= \quad a^2, \\ k_1' k_3' &= - b^2, \\ k_1' k_2' &= - c^2 \end{aligned} \tag{73}$$

setzen und erhalten:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{74}$$

Dann ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid. In dem zweiten Falle können wir

$$\begin{aligned} k_2' k_3' &= a^2, \\ k_1 k_3 &= b^2, \\ k_1 k_2 &= c^2 \end{aligned} \tag{75}$$

setzen und erhalten:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{76}$$

Dann ist die Fläche ein Ellipsoid.

In jedem Puncte des zweischaligen Hyperboloids und des Ellipsoids schneiden sich zwei imaginäre Erzeugende. Die Flächen werden in doppelter Weise von imaginären geraden Linien erzeugt, die beiden imaginären geraden Linien, welche in jedem Puncte der Flächen sich schneiden, gehören den beiden Erzeugungen derselben an.

136. Die Betrachtungen über characteristische Flächen in der 133. Nummer runden sich erst dann ab, wenn wir neben der characteristischen Fläche des einschaligen Hyperboloids auch die characteristische Fläche der imaginären Linienfläche, welche reell bleibt, und die imaginären characteristischen Flächen des zweischaligen Hyperboloids und des Ellipsoids betrachten.

Das einschalige und das zweischalige Hyperboloid, welche durch die beiden Gleichungen (47) und (74) dargestellt werden, haben wir, in dem Falle, dass $k_1 = k_1'$, $k_2 = k_2'$, $k_3 = k_3'$, zwei zusammengehörige Hyperboloide genannt. Unter derselben Voraussetzung sagen wir, dass das imaginäre und reelle Ellipsoid, welche durch die Gleichungen (72) und (76) dargestellt werden, zusammengehören.

Um die Gleichung der characteristischen Fläche für das imaginäre Ellipsoid (72) zu erhalten, brauchen wir bloss in der Gleichung dieser Fläche für das einschalige Hyperboloid (47) die Zeichen von b^2 und c^2 zu ändern. Dann kommt statt (61):

$$a^2 b^2 c^2 \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\}^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^3, \tag{77}$$

und wir erhalten statt (69) die folgenden beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \pm \varkappa, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \varkappa_0 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}, \end{aligned} \right\} \tag{78}$$

wobei zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_0$ die frühere Bedingungs-Gleichung fortbesteht. Die characteristische Fläche besteht hier aus einem reellen und einem imaginären Theile. Diese beiden Theile werden bezüglich von Curven erzeugt, nach welchen zusammengehörige reelle und imaginäre Ellipsoide von Kugeln geschnitten werden. Unter den imaginären Ellipsoiden befindet sich insbesondere das gegebene. Das mit diesem zusammengehörige reelle Ellipsoid wird von der characteristischen Fläche immer in einer reellen Curve geschnitten, die gleichzeitig auf einer Kugel liegt, deren Radius der dritten Wurzel aus dem Producte der drei Halbaxen dieses Ellipsoids gleich ist.

Wenn die Gleichung der für den Fall des einschaligen Hyperboloids und des imaginären Ellipsoids reellen characteristischen Fläche (63) auf den Fall des zweischaligen Hyperboloids und des reellen Ellipsoids bezogen werden soll, so müssen wir k_1, k_2, k_3 mit $k_1'\sqrt{-1}$, $k_2'\sqrt{-1}$, $k_3'\sqrt{-1}$ vertauschen. Dann wird das Quadrat des Leitstrahles der characteristischen Fläche negativ, die Fläche selbst also imaginär. Wir erhalten aber eine neue reelle Fläche, wenn wir für den imaginären Leitstrahl $r\sqrt{-1}$ nehmen. Dann kommt:

$$(k_1' x^2 + k_2' y^2 + k_3' z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^3,$$

und wenn insbesondere $k_1 = k_1'$, $k_2 = k_2'$, $k_3 = k_3'$, ist diese Gleichung dieselbe, von der wir ausgegangen sind.

Die characteristische Fläche eines einschaligen Hyperboloids bestimmt also zugleich die imaginären Parameter aller Complexe des zugehörigen zweischaligen Hyperboloids, so wie die characteristische Fläche eines imaginären Ellipsoids zugleich die imaginären Parameter aller Complexe des zugehörigen reellen Ellipsoids bestimmt.

137. Wir haben in der 98. Nummer vier verschiedene Arten von Congruenzen unterschieden. Jeder Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung und Classe, welche einen Mittelpunct hat, fällt, der Richtung und Grösse nach, mit dem Hauptdurchmesser einer Congruenz, der die Fläche angehört, zusammen. Es entspricht hierbei jedem Durchmesser des einschaligen Hyperboloids eine Congruenz der ersten oder zweiten Art, je nachdem dieser Durchmesser das Hyperboloid schneidet oder nicht schneidet. Den Uebergang bezeichnet der Fall, dass die beiden Directricen der Congruenz in einer Asymptote der Fläche zusammenfallen.

Jedem Durchmesser eines imaginären Ellipsoids entspricht eine Congruenz der zweiten Art.

Jedem Durchmesser eines zweischaligen Hyperboloids entspricht, je nachdem er die Fläche schneidet oder nicht schneidet, eine Congruenz der dritten oder vierten Art.

Jedem Durchmesser eines reellen Ellipsoids entspricht eine Congruenz der dritten Art.

138. Von den vorstehenden Entwickelungen sind diejenigen Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe ausgeschlossen, welche keinen Mittelpunct haben und einmal von reellen, das andere Mal von imaginären geraden Linien erzeugt werden: das hyperbolische und elliptische Paraboloid.

139. Wir haben bereits früher in der 111. Nummer eine Fläche zweiter Ordnung durch drei Complexe bestimmt, deren Parameter gleich Null sind. Es kommt dies darauf hinaus, die Axen solcher drei Complexe als Linien der zweiten Erzeugung der Fläche zu betrachten, die von den Linien ihrer ersten Erzeugung geschnitten werden. Durch die drei Linien der zwei-

ten Erzeugung haben wir drei beliebige Ebenen gelegt und diese Ebenen zu Coordinaten-Ebenen genommen. Dann berührt die Fläche diese drei Ebenen. Diese Ebenen schneiden die Fläche, ausser in den drei Linien der zweiten Erzeugung, auch noch in drei Linien der ersten Erzeugung. In jeder dieser Ebenen ist der Durchschnitt der beiden Linien der zwiefachen Erzeugung der Punct, in welchem dieselbe von der Fläche berührt wird. Unter analogen Voraussetzungen können wir auch das zweischalige Hyperboloid und das Ellipsoid bestimmen. Wir nehmen irgend drei Tangential-Ebenen einer dieser Flächen zu Coordinaten-Ebenen. Dann geht jede dieser Ebenen durch zwei conjugirt imaginäre Linien der Fläche und diese Linien schneiden sich in dem reellen Puncte, in welchem die Ebene von der Fläche berührt wird. Wir wollen in Uebereinstimmung hiermit, indem wir zur angezogenen Nummer zurückgehen,

$$\left.\begin{aligned} t',\ t'' &= t_0 \pm t_0' \sqrt{-1}, \\ u',\ u'' &= u_0 \pm u_0' \sqrt{-1}, \\ v',\ v'' &= v_0 \pm v_0' \sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

setzen. Dann gehen die Gleichungen (12) und (13) dieser Nummer, welche die drei Linien der zweiten und die drei Linien der ersten Erzeugung, welche in den drei Coordinaten-Ebenen liegen, darstellen, in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned} (t_0 + t_0'\sqrt{-1})x + (u_0 - u_0'\sqrt{-1})y + 1 &= 0, \\ (v_0 + v_0'\sqrt{-1})z + (t_0 - t_0'\sqrt{-1})x + 1 &= 0, \\ (u_0 + u_0'\sqrt{-1})y + (v_0 - v_0'\sqrt{-1})z + 1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

und

$$\left.\begin{aligned} (t_0 - t_0'\sqrt{-1})x + (u_0 + u_0'\sqrt{-1})y + 1 &= 0, \\ (v_0 - v_0'\sqrt{-1})z + (t_0 + t_0'\sqrt{-1})x + 1 &= 0, \\ (u_0 - u_0'\sqrt{-1})y + (v_0 + v_0'\sqrt{-1})z + 1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Die Coordinaten der drei Berührungspuncte in den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-u_0'}{t_0 u_0' + t_0' u_0}, & y_2 &= \frac{-t_0'}{t_0 u_0' + t_0' u_0}, \\ x_2 &= \frac{-v_0'}{t_0 v_0' + t_0' v_0}, & z_1 &= \frac{-t_0'}{t_0 v_0' + t_0' v_0}, \\ y_1 &= \frac{-v_0'}{u_0 v_0' + u_0' v_0}, & z_2 &= \frac{-u_0'}{u_0 v_0' + u_0' v_0}.\text{*)} \end{aligned} \tag{82}$$

*) Die Gleichungen (81) geben unmittelbar:

$$x_1 y_1 z_1 = x_2 y_2 z_2,$$

Wir erhalten für die Gleichung der Linienfläche aus (9):

$$1 + 2t_0 x + 2u_0 y + 2v_0 z + (t_0^2 + t_0'^2)x^2 + (u_0^2 + u_0'^2)y^2 + (v_0^2 + v_0'^2)z^2$$
$$+ 2(u_0 v_0 - u_0' v_0')yz + 2(t_0 v_0 - t_0' v_0')xz + 2(t_0 u_0 - t_0' u_0')xy = 0. \quad (83)$$

Je nachdem

$$(t_0^2 + t_0'^2)^2 > (t_0 v_0' - t_0' v)(t_0 v_0' - t_0' v_0),$$

oder

$$(t_0^2 + t_0'^2) < (t_0 v_0' - t_0' v_0)(t_0 v_0' - t_0' v_0),$$

stellt diese Gleichung ein zweischaliges Hyperboloid oder ein Ellipsoid dar.*)

Setzen wir in dieser Gleichung t_0, u_0, v_0 gleich Null, so kommt:

$$1 + t_0'^2 x^2 + u_0'^2 y^2 - v_0'^2 z^2 - 2u_0' v_0' yz - 2t_0' v_0' xz - 2t_0' u_0' xy = 0. \quad (84)$$

Dann ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid, das auf seinen Mittelpunct als Anfangspunct der Coordinaten bezogen ist.

140. Die Bestimmung des elliptischen Paraboloids ist der Bestimmung des hyperbolischen in der 114. Nummer ganz analog. Die Bedingungs-Gleichung (20) geht in die folgende über:

$$\frac{t_0}{t_0'} + \frac{u_0}{u_0'} + \frac{v_0}{v_0'} = 1. \quad (85)$$

Mit den Linien der beiden Erzeugungen werden die beiden Ebenen, denen sie parallel sind, conjugirt imaginär. Wir erhalten für dieselben die folgenden Gleichungen, welche wir in eine einzige zusammenziehen:

$$[(t_0 v_0 + t_0' v_0') \mp (t_0 v_0' - t_0' v_0)\sqrt{-1}]x + [(u_0 v_0 + u_0' v_0') \mp (u_0 v_0' + u_0' v_0)\sqrt{-1}]y$$
$$+ (v_0^2 + v_0'^2)z = 0 \quad (86)$$

und aus (24) zur Bestimmung der reellen Durchmesser-Richtung:

$$\frac{t_0^2 + t_0'^2}{t_0'}x = \frac{u_0^2 + u_0'^2}{u_0'}y = \frac{v_0^2 + v_0'^2}{v_0'}z. \quad (87)$$

141. Wir haben hiermit die sämmtlichen reellen Flächen der zweiten Ordnung und Classe durch die Gleichungen dreier linearer Complexe, deren Parameter verschwinden, dargestellt und aus den Systemen solcher drei Gleichungen die Gleichungen derselben in Punct-Coordinaten abgeleitet: das einschalige Hyperboloid (9), dasselbe bezogen auf seinen Mittelpunct (17), das hyperbolische Paraboloid (9), unter Voraussetzung der Bedingungs-Glei-

---

eine geometrische Beziehung zwischen irgend drei Tangential-Ebenen einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und Classe, welche zu discutiren hier nicht der Ort ist.

*) Geometrie des Raumes Nr. 26.

chung (20), das zweischalige Hyperboloid und das Ellipsoid (83), ersteres auf seinen Mittelpunct bezogen (84), und endlich, unter Voraussetzung der Bedingungs-Gleichung (85), das elliptische Paraboloid (86). Ausgeschlossen bleibt hier, für den Fall des zweischaligen Hyperboloids, des elliptischen Paraboloids und des Ellipsoids, die Annahme, dass der Anfangspunct der Coordinaten innerhalb der genannten Flächen liege. Für den Fall des einschaligen Hyperboloids gibt es kein Innerhalb und kein Ausserhalb. Die imaginäre Fläche ist ganz ausgeschlossen. Die Coordinaten-Bestimmung wird illusorisch, wenn der Anfangspunct auf der Fläche angenommen wird.

142. Dieselben Flächen der zweiten Ordnung und Classe, die wir durch drei lineare Gleichungen in Strahlen-Coordinaten dargestellt haben, haben wir in analoger Weise auch durch drei Gleichungen in Axen-Coordinaten dargestellt und, wie wir aus jenen die Gleichung der Flächen in Punct-Coordinaten abgeleitet haben, aus dieser die Gleichung derselben Flächen in Plan-Coordinaten abgeleitet. Die Gleichung (28), welche wir in der 115. Nummer erhalten haben, geht für solche reelle Flächen, welche nicht durch reelle gerade Linien erzeugt werden, in die folgende über:

$$\frac{((t-t_0)-t_0'\sqrt{-1})\,((u-u_0)-u_0'\sqrt{-1})\,((v-v_0)-v_0'\sqrt{-1})}{((t-t_0)+t_0'\sqrt{-1})\,((u-u_0)+u_0'\sqrt{-1})\,((v-v_0)+v_0'\sqrt{-1})}=1. \qquad (88)$$

Wenn wir entwickeln, verschwindet aus dieser Gleichung das Imaginäre.

143. Reelle und imaginäre Kegelflächen so wenig als reelle und imaginäre ebene Curven lassen sich durch drei lineare Gleichungen, weder in Strahlen-Coordinaten noch in Axen-Coordinaten, darstellen. Jene sind nicht als Flächen zweiter Classe, diese nicht als Flächen zweiter Ordnung zu betrachten.

144. Aber die Frage, ob die Linienflächen, die wir durch das Symbol:

$$\Omega+\mu\Omega'+\mu'\Omega''=0$$

dargestellt haben, durch Particularisation der Complexe Ω, Ω', Ω'' nicht dennoch in andere geometrische Gebilde ausarten können, ist hiermit nicht erledigt.

Wir wollen einem der drei Complexe seine ganze Allgemeinheit lassen, aber annehmen, dass die beiden anderen Complexe von der besonderem Art seien, dass sämmtliche Linien jedes derselben einer festen geraden Linie begegnen, und dass die beiden festen geraden Linien *sich schneiden*, oder, was dasselbe heisst, *in derselben Ebene liegen*. Wir wollen die beiden

Coordinaten-Axen OZ und OY mit ihnen zusammenfallen lassen. Dann stellen die Gleichungen

$$\Omega' \equiv \eta \equiv r\sigma - s\varrho = 0, \qquad \Omega'' \equiv \varrho = 0$$

die fraglichen beiden Complexe dar. Diese beiden Gleichungen haben zur Folge, dass entweder σ oder r gleich Null ist. Hiermit in Uebereinstimmung gehören einerseits alle Linien, deren Coordinaten die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} Ar + Bs + C = 0, \\ \varrho = 0, \qquad \sigma = 0 \end{array}\right\} \tag{89}$$

befriedigen, andererseits alle Linien, deren Coordinaten die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} Bs + C - D\sigma = 0, \\ \varrho = 0, \qquad r = 0 \end{array}\right\} \tag{90}$$

befriedigen, der durch die dreigliedrige Complex-Gruppe dargestellten Linienfläche an. Alle Linien, welche den drei Complexen (89) gleichzeitig angehören, liegen in der durch die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{91}$$

dargestellten Ebene und gehen, in dieser Ebene, durch den Anfangspunct der Coordinaten. Alle Linien, welche den drei Complexen (90) gleichzeitig angehören, liegen in der Coordinaten-Ebene YZ und gehen in dieser Ebene durch den Punct, der durch die Gleichung:

$$Cu - Bv + Dw = 0 \tag{92}$$

dargestellt wird. Die Ebene (91) bleibt dieselbe für alle Complexe der dreigliedrigen Gruppe:

$$(Ar - Bs + C) + \mu\varrho + \mu'\sigma = 0,$$

sie ist für alle die Ebene, welche dem Anfangspunct der Coordinaten entspricht. Der Punct (92) bleibt derselbe für alle Complexe der dreigliedrigen Gruppe:

$$(Bs + C - D\sigma) + \mu\varrho + \mu' r = 0,$$

er ist für alle der Punct, welcher der Coordinaten-Ebene YZ entspricht.

Die der so bestimmten Linienfläche angehörigen Linien liegen also in zwei Ebenen und gehen in jeder dieser beiden Ebenen durch einen festen Punct der Durchschnittslinie der beiden Ebenen. Die beiden Ebenen und die beiden Puncte entsprechen einander in allen Complexen der dreigliedrigen Gruppe.

Wir können die Linienfläche durch eine Gleichung zweiten Grades in Punct-Coordinaten darstellen. Dann erhalten wir die beiden eben bestimmten Ebenen; aber es verschwindet jede Spur der Erzeugung dieser Ebenen durch eine gerade Linie, welche innerhalb derselben um einen festen Punct sich dreht. Wenn wir uns der Plan-Coordinaten zur Darstellung der Linienfläche bedienen, so erhalten wir die beiden Puncte; es verschwindet aber jede Spur der Umhüllung dieser Puncte durch eine gerade Linie, welche in einer festen Ebene liegt.

145. Die geometrische Bestimmung der Linienfläche kommt in diesem Falle darauf hinaus, diejenigen geraden Linien zu bestimmen, welche zwei gegebene einander schneidende gerade Linien schneiden und überdiess einem gegebenen Complexe angehören. Diese Linien liegen entweder in der Ebene der beiden gegebenen geraden Linien und gehen durch den in dem Complexe dieser Ebene zugeordneten Punct, oder sie gehen durch den Durchschnittspunct der beiden gegebenen geraden Linien und liegen zugleich in derjenigen Ebene, welche in dem Complexe diesem Puncte entspricht.

Die vorstehenden geometrischen Betrachtungen ergänzen sich noch dadurch, dass unter den Complexen der Gruppe sich einer von der besondern Art befindet. Die feste Linie, die von allen Linien dieses Complexes geschnitten wird und welche im Allgemeinen den beiden gegebenen geraden Linien nicht begegnet, wird, wie diese, von den Linien der Linienfläche geschnitten. Diese Linienfläche ist im Allgemeinen ein einschaliges Hyperboloid, dessen Linien einer Erzeugung die drei gegebenen geraden Linien schneiden, artet aber, wenn zwei der drei gegebenen Linien sich schneiden, in ein System von zwei Ebenen, bezüglich in ein System von zwei Puncten aus.

Wenn die feste Linie einer der beiden gegebenen, sich schneidenden, gegeraden Linien begegnet, so ändert sich in den vorstehenden Beziehungen wesentlich nichts. Dann wird eine der drei Linien derselben Flächen-Erzeugung von den beiden übrigen in zwei Puncten geschnitten, oder, was dasselbe heisst, die drei Erzeugenden liegen in zwei Ebenen. Diese beiden Ebenen einerseits, die beiden Durchschnittspuncte andererseits sind diejenigen, in welche die Linienfläche ausartet.

146. Wenn insbesondere aber in den Complexen der dreigliedrigen Gruppe der Durchschnittspunct der beiden gegebenen geraden Linien der Ebene entspricht, welche durch diese Linie geht, so verschwinden die Constanten B und C in den vorstehenden analytischen Entwickelungen: dann fällt die Ebene (91) mit der Coordinaten-Ebene YZ, der Punct (92) mit dem Anfangspuncte der Coordinaten zusammen.

Die Linienfläche artet in diesem Falle in ein System von zwei zusammenfallenden Ebenen, bezüglich in ein System von zwei in diesen Ebenen zusammenfallenden Puncten aus.

147. Von dem zuletzt betrachteten Falle sind diejenigen wohl zu unterscheiden, in welchen ohne weitere Bedingung:

$$\sigma = 0, \qquad \varrho = 0, \qquad \eta = 0, \tag{93}$$

oder

$$r = 0, \qquad \varrho = 0, \qquad \eta = 0. \tag{94}$$

In dem ersten Falle befriedigen die dreigliedrige Complex-Gleichung die Coordinaten jeder durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie, in dem zweiten Falle die Coordinaten jeder in der Ebene YZ liegenden geraden Linie.

So wie zwei zusammenfallende Directricen erst dann eine Congruenz bestimmen (Nr. 68), wenn die Bedingung hinzukommt, dass die Linien derselben einem gegebenen Complexe angehören, der eine mit den Directricen zusammenfallende Linie hat, so bestimmen drei durch denselben Punct gehende Erzeugenden eine Linienfläche erst dann, wenn noch die Bedingung hinzukommt, dass die Linien derselben einem gegebenen Complexe angehören. Wenn diese doppelte Bedingung fehlt, so erhalten wir in dem ersten Falle statt der Congruenz einen Complex von besonderer Art, dessen Linien die beiden zusammenfallenden Directricen schneiden. Im zweiten Falle bedingen zwei der drei Complex-Gleichungen:

$$\varrho = 0, \qquad \eta \equiv r\sigma - s\varrho = 0, \tag{95}$$

dass $r\sigma$ gleich Null werde, und dieser Bedingung kann sowohl durch das Verschwinden von σ als durch das Verschwinden von r entsprochen werden. Demnach sind die beiden vorstehenden Gleichungen einmal mit den drei Gleichungen (93), das andere Mal mit den drei Gleichungen (94) gleichbedeutend. Die Congruenz besonderer Art, welche durch die beiden Gleichungen (95) dargestellt wird und die Coordinaten-Axen OZ und OY zu Directricen hat, umschliesst (Nr. 68) einmal alle Linien, welche in YZ, der Ebene der beiden Directricen liegt, das andere Mal alle Linien, welche durch O, den Durchschnitt der beiden Directricen, gehen. Kommt in der Gleichung (93) die Bedingung $\sigma = 0$ hinzu, so werden dadurch von der Congruenz alle Linien, welche in der Ebene der beiden Directricen liegen und nicht durch ihren Durchschnitt gehen, ausgeschlossen. Kommt in der Gleichung (94) die Bedingung $r = 0$ hinzu, so werden dadurch von der Congruenz alle diejenigen Linien ausgeschlossen, welche durch den Durchschnitt der beiden Directricen gehen und nicht mit ihnen in derselben Ebene liegen. Wir können also sagen, dass die beiden Gleichungen (93) und (94) zusammen die Congruenz besonderer Art darstellen. Die Linien des einen Theiles der Congruenz umhüllen einen Punct, den wir als eine Linienfläche erster Classe betrachten und durch eine Gleichung in Plan-Coordinaten darstellen können. Die Linien des anderen Theiles der Congruenz liegen in einer Ebene, die wir als Linienfläche erster Ordnung betrachten und durch eine Gleichung in Punct-Coordinaten darstellen können.*)

148. Wir haben in dem vorliegenden Paragraphen, indem wir die gerade Linie, in ihrer doppelten geometrischen Bedeutung als Strahl und Axe, statt des Punctes und der Ebene, als Raumelement eingeführt haben, durch drei lineare Gleichungen zwischen Strahlen- oder Axen-Coordinaten eine Fläche der zweiten Ordnung und der zweiten Classe bestimmt, in der Art, dass jede einzelne ihrer beiden Erzeugungen durch drei solcher Gleichungen dargestellt wird. Während die Fläche und demnach ihre Tangential-Ebenen und in diesen die Berührungspuncte reell sind, können die beiden Durchschnittslinien der Tangential-Ebene mit der Fläche, die beiden Erzeugenden, welche durch den Berührungspunct gehen, sowohl reell als imaginär sein. Unter dem so erweiterten Gesichtspuncte können wir alle Flächen zweiter Ordnung und Classe als Linienflächen ansehen. Die gesammten Eigenschaften solcher Flächen lassen sich, wozu der Weg in dem Vorstehenden angebahnt ist, in gleicher Weise aus der Discussion der drei linearen Gleichungen zwischen Strahlen- und Axen-Coordinaten ableiten, wie diess bisher aus der Discussion einer quadratischen Gleichung in Punct- oder Ebenen-Coordinaten geschehen ist.

*) Um bei der analytischen Discussion der fraglichen particulären Fälle möglichen Irrthümern vorzubeugen, ist es im Allgemeinen räthlich, homogene Gleichungen zwischen den sechs Linien-Coordinaten zu Grunde zu legen. Wenn wir zum Beispiel in der vorstehenden analytischen Discussion die Coordinaten-Axen OZ und OX mit einander vertauschen, könnten wir leicht zu übereilten Schlüssen inducirt werden.