§ 2.

Die Congruenzen zweier linearer Complexe.

51. Die zusammenfallenden Linien zweier Linien-Complexe des ersten Grades bilden eine Linien-Congruenz. Wir können die Linien einer Congruenz als Strahlen und als Axen betrachten und, dem entsprechend, die Congruenz in zwiefacher Weise darstellen, einmal durch das System zweier Gleichungen in Strahlen-Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho + F'\eta = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

das andere Mal durch das System zweier Gleichungen in Axen-Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &\equiv Dp + Eq + F - Ak + B\pi + C\omega = 0, \\ \Phi' &\equiv D'p + E'q + F' - A'k + B'\pi + C'\omega = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

52. In jedem der beiden Complexe, durch welche die Congruenz bestimmt wird, gehen durch einen gegebenen Punct unendlich viele Linien, die in der dem Puncte entsprechenden Ebene liegen. Die Durchschnittslinie der beiden dem gegebenen Puncte entsprechenden Ebenen ist die einzige Linie, welche durch diesen Punct geht und beiden Complexen zugleich, also der Congruenz angehört. Durch jeden Punct des Raumes geht eine einzige gerade Linie, von der wir sagen, dass sie, in der Congruenz, dem Puncte entspreche.

In jedem der beiden Complexe liegen innerhalb einer gegebenen Ebene unendlich viele Linien, die in dem der Ebene entsprechenden Puncte sich schneiden. Diejenige gerade Linie, welche in der gegebenen Ebene die beiden entsprechenden Puncte verbindet, ist die einzige, welche in dieser Ebene liegt und beiden Complexen zugleich, also der Congruenz angehört. In jeder den Raum durchziehenden Ebene liegt eine einzige gerade Linie, von der wir sagen, dass sie, in der Congruenz, der Ebene entspreche.

Die beiden vorstehenden Relationen, von welchen eine die nothwendige Folge der anderen ist, können wir als die geometrische Definition einer Congruenz linearer Complexe ansehen.

53. Bei der Bestimmung einer Congruenz können wir die beiden gegebenen Complexe:

$$\Omega = 0, \qquad \Omega' = 0,$$

durch irgend zwei andere ersetzen, welche, bei beliebiger Annahme des unbestimmten Coefficienten μ, durch die folgende Gleichung:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0 \tag{3}$$

dargestellt werden, und dürfen dabei auch Φ und Φ' an die Stelle von Ω und Ω' setzen. Wir sagen, dass alle Complexe, welche durch die vorstehende Gleichung dargestellt werden, und von welchen je zwei die Congruenz bestimmen, eine zweigliedrige Gruppe linearer Complexe bilden.

54. Wir erhalten nach der 31. Nummer für die durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Hauptschnitte der Complexe (3) die Gleichung:

$$Dx + Ey + Fz + \mu(D'x + E'y + F'z) = 0, \tag{4}$$

und diese Gleichung wird für beliebige Werthe von μ befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\begin{aligned} Dx + Ey + Fz &= 0, \\ D'x + E'x + F'z &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Da der Anfangspunct der Coordinaten von vornherein willkürlich angenommen ist, so ist hiermit ausgesprochen, dass in allen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe, welchen die Congruenz angehört, die durch irgend einen gegebenen Punct gehenden Hauptschnitte in derselben geraden Linie sich schneiden. Daraus ergibt sich, weil die Durchmesser eines Complexes auf den Hauptschnitten desselben senkrecht stehen, der folgende Satz:

Die Durchmesser aller Complexe einer zweigliedrigen Gruppe sind derselben Ebene parallel.

55. Zur Bestimmung der Richtungen der Durchmesser erhalten wir die folgende Doppelgleichung:

$$\frac{x}{D + \mu D'} = \frac{y}{E + \mu E'} = \frac{z}{F + \mu F'}, \tag{6}$$

und, wenn wir die Richtungs-Constanten r und s einführen:

$$r = \frac{D + \mu D'}{F + \mu F'}, \qquad s = \frac{E + \mu E'}{F + \mu F'}. \tag{7}$$

Eliminiren wir zwischen diesen Gleichungen μ, so finden wir:

$$(E'F - EF')r - (D'F - DF')s + (D'E - DE') = 0. \tag{8}$$

Durch diese Gleichung ist die Richtung der Ebene bestimmt, welcher die Durchmesser aller Complexe parallel sind. Indem wir für r und s einsetzen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$, erhalten wir die Gleichung:

$$(E'F - EF')x - (D'F - DF')y + (D'E - DE')z = 0, \tag{9}$$

welche in gewöhnlichen Punct-Coordinaten die durch den Anfangspunct gehende Ebene von der bestimmten Richtung darstellt, und hiernach zur Bestimmung der auf dieser Ebene senkrechten Richtung die Doppelgleichung:

$$\frac{x}{E'F-EF'} = -\frac{y}{D'F-DF'} = \frac{z}{D'E-DE'}. \tag{10}$$

Wenn wir der Axe OZ diese Richtung geben, so verschwinden F und F' und in den Complex-Gleichungen (1) wird:

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Dann sind die Durchmesser sämmtlicher Complexe der Gruppe (3) der Ebene XY parallel.

56. Wenn eine der folgenden drei Bedingungs-Gleichungen:

$$D'E - DE' = 0, \qquad D'F - DF' = 0, \qquad E'F - EF' = 0 \tag{12}$$

besteht, so liegt die gerade Linie, in der die durch den Anfangspunct gehenden Hauptschnitte aller Complexe der Gruppe sich schneiden, bezüglich in einer der drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ. Die Durchmesser sämmtlicher Complexe sind dann einer Ebene parallel, welche bezüglich durch OZ, OY, OX geht. Werden die drei Bedingungsgleichungen (12) gleichzeitig befriedigt, so löst sich der Widerspruch, dass eine Ebene gleichzeitig den drei Coordinaten-Axen parallel wird, dadurch, dass jede Bestimmung über diese Ebene fortfällt. Dann befindet sich unter den Complexen der Gruppe (3) einer, entsprechend:

$$\mu = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} = -\frac{F}{F'},$$

für dessen Gleichung wir die folgende nehmen können:

$$(A'D - AD')r + (B'D - BD')s + (C'D - CD') = 0. \tag{13}$$

Alle Linien dieses Complexes sind der durch die Gleichung:

$$(A'D - AD')x + (B'D - BD')y + (C'D - CD')z = 0 \tag{14}$$

dargestellten Ebene parallel. Die Congruenz ist in diesem Falle dadurch particularisirt, dass ihre Linien, weil sie sämmtlich auch diesem Complexe angehören, der eben bestimmten Ebene parallel sind. Dabei werden die Axen sämmtlicher Complexe der zweigliedrigen Gruppe einander parallel, wie aus der Doppelgleichung (10) zu ersehen ist. Wir wollen solch eine Congruenz als eine parabolische bezeichnen. Von den folgenden Betrachtungen schliessen wir sie aus und unterwerfen sie später (Nr. 75) einer besonderen Discussion.

Dieser Fall tritt insbesondere auch dann ein, wenn F und F' verschwinden, und überdies:

$$D'E - DE' = 0. \tag{15}$$

57. Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (x^0, y^0) verlegen, so wird das constante Glied in der Gleichung der Complexgruppe (3):

$$(C + Ex^0 - Dy^0) + \mu(C' + E'x^0 - D'y^0).$$

Dieses Glied fällt also aus, wenn der neue Anfangspunct in der Ebene XY auf der durch die Gleichung:

$$(C + Ex - Dy) + \mu(C' + E'x - D'y) = 0 \tag{16}$$

dargestellten geraden Linie angenommen wird. Nehmen wir für diesen Punct den Durchschnitt der beiden geraden Linien:

$$\left.\begin{aligned} C + Ex - Dy &= 0, \\ C' + E'x - D'y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so verschwindet aus der Gleichung aller Complexe der Gruppe das constante Glied. Dann kommt:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Wir haben überhaupt für die allgemeine Gleichung derjenigen Ebenen, welche in den verschiedenen Complexen der Gruppe (3) dem Anfangspuncte entsprechen (Nr. 32.):

$$Ax + By + Cz + \mu(A'x + B'y + C'z) = 0, \tag{19}$$

und diese Gleichung wird, unabhängig von dem jedesmaligen Werthe von μ, befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz &= 0, \\ A'x + B'y + C'z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Alle dem Anfangspuncte entsprechenden Ebenen schneiden sich also auf der durch die beiden Gleichungen dargestellten geraden Linie, und da der Anfangspunct von vorneherein willkürlich angenommen ist, gelangen wir zu dem folgenden Satze:

In den Complexen einer zweigliedrigen Gruppe entsprechen einem gegebenen Puncte Ebenen, welche in derselben Linie sich schneiden.

Dieser Satz ist unmittelbar durch die Zusammenstellung der 52. und 53. Nummer gegeben.

Wenn C und C' verschwinden, schneiden sich die Ebenen, welche in den verschiedenen Complexen der zweigliedrigen Gruppe dem Anfangspuncte entsprechen, auf der Axe OZ.

58. Wenn gleichzeitig F und F', C und C' verschwinden, wird OZ eine gemeinschaftliche Linie aller Complexe und also eine Linie der Congruenz, welche von den Axen aller Complexe geschnitten wird (vergl. Nr. 31.).

In jeder Congruenz gibt es, im Allgemeinen, eine einzige und vollkommen bestimmte gerade Linie, welche von den Axen sämmtlicher Complexe der zweigliedrigen Gruppe, durch welche die Congruenz bestimmt ist, geschnitten wird.

Diese gerade Linie, welche zur Congruenz eine ausschliessliche Beziehung hat, wollen wir die Axe der Congruenz nennen. Indem wir die Functions-Bestimmung der Gleichungen (18) zu Grunde legen, nehmen wir die Axe der Congruenz zur Axe OZ.

Wenn die Bedingungs-Gleichung

$$D'E - DE' = 0$$

besteht, kann die Congruenz im Allgemeinen nicht mehr durch das System der beiden Gleichungen (18) dargestellt werden. Einmal können F und F' nicht ausfallen. Denn die durch den Anfangspunct gehenden Hauptschnitte aller Complexe der zweigliedrigen Gruppe schneiden sich, wenn die obige Bedingungs-Gleichung befriedigt wird, auf einer in der Coordinaten-Ebene liegenden geraden Linie, deren Gleichung die folgende ist:

$$y + \frac{Dx}{E} = y + \frac{D'x}{E'} = 0.$$

Die Durchmesser und insbesondere die Axen aller Complexe der Gruppe sind nach der 54. Nummer einer Ebene parallel, welche auf dieser Linie senkrecht steht. Hiernach kann die Ebene XY den Durchmessern, im Allgemeinen, nicht parallel sein, und daher die Unmöglichkeit des Verschwindens von F und F'. Erst wenn

$$\frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'},$$

das heisst, in dem Falle der parabolischen Congruenz, tritt diese Möglichkeit dadurch wieder ein, dass die Gleichungen (5) identisch werden und, dem entsprechend, alle durch den Anfangspunct gehenden Hauptschnitte in derselben Ebene zusammenfallen. Alle Complex-Axen stehen dann senkrecht auf dieser Ebene und sind demnach, in Uebereinstimmung mit der 56. Nummer, unter einander parallel. Es braucht also nur, damit F und F' ausfallen, die Ebene XY so genommen zu werden, dass sie selbst auf der fraglichen Ebene senkrecht steht, oder was dasselbe heisst, die Axe OZ muss in dieser Ebene liegen, kann aber in derselben jede beliebige Richtung haben.

Aber auch C und C' können, wenn die obige Bedingungs-Gleichung besteht, im Allgemeinen nicht gleichzeitig ausfallen. Dann wird nämlich innerhalb XY die Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten, wodurch dieses Ausfallen bedingt wird, illusorisch und zwar dadurch, dass die beiden geraden Linien (17), in deren Durchschnitt der neue Anfangspunct liegt, parallel werden. (Es kommen hierbei die Werthe von F und F' nicht in Betracht.) Nur wenn gleichzeitig

$$\frac{C}{C'} = \frac{D}{D} = \frac{E}{E'},$$

und in Folge davon die beiden geraden Linien (17) in eine einzige zusammenfallen, können C und C' wiederum durch Verlegung des Anfangspunctes fortgeschafft werden, und zwar können wir zu diesem Ende jeden beliebigen Punct der geraden Linie

$$1 + \frac{Ex}{C} - \frac{Dy}{C} \equiv 1 + \frac{E'x}{C'} - \frac{D'y}{C'} = 0$$

zum neuen Anfangspuncte der Coordinaten nehmen. Wir werden dem Falle, dass die beiden geraden Linien (17) in eine einzige zusammenfallen, später (Nr. 75) begegnen und dann sehen, dass dieses Zusammenfallen in einer besonderen Lage der Congruenz gegen das Coordinaten-System seinen Grund hat.

59. Wenn eine einzelne der drei Bedingungen:

$$A'B - AB' = 0, \qquad A'C - AC' = 0, \qquad B'C - BC' = 0 \tag{21}$$

befriedigt wird, so liegt diejenige gerade Linie, in welcher alle dem Anfangspuncte entsprechende Ebenen sich schneiden, bezüglich in den Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ. Wenn gleichzeitig zwei dieser Gleichungen und, in Folge davon, alle drei befriedigt werden, so gibt es unter den Complexen der Gruppe (3), entsprechend:

$$\mu = -\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'} = -\frac{C}{C'},$$

einen, dessen Linien sich sämmtlich auf seiner Axe schneiden, und diese Axe geht durch den Anfangspunct. Für die Gleichung desselben können wir

$$-(A'D - AD')\sigma + (A'E - AE')\varrho + (A'F - AF')\eta = 0 \tag{22}$$

nehmen. Diesen Bedingungen wird entsprochen, wenn C und C' verschwinden und gleichzeitig:

$$A'D - AD' = 0. \tag{23}$$

Dann liegt die Axe des Complexes, welche durch den Anfangspunct geht, in der Ebene YZ.

Wenn zugleich C und C', F und F' verschwinden und zugleich die Bedingung (23) erfüllt wird, fällt die Axe des Complexes mit der Coordinaten-Axe OY zusammen. Die Discussion dieser Fälle wird ihre Erledigung später (in Nr. 76.) finden.

60. Die Complexe Ω und Ω' sind irgend zwei, welche wir beliebig aus der Complex-Gruppe (3) genommen haben. Unter den unendlich vielen Complexen der Gruppe befinden sich aber im Allgemeinen solche, die von einer Constanten weniger abhängen und deren sämmtliche Linien die Axe schneiden (vergl. Nr. 45.). Bei der Bestimmung dieser Complexe wollen wir die Functions-Bestimmung (18) zu Grunde legen, was, nach dem Vorstehenden, mit Ausnahme des Falles, dass die Bedingungsgleichungen (12) zugleich bestehen, immer gestattet ist. Dann schneiden alle Axen der Complexe, die nunmehr durch die Gleichung:

$$(Ar + Bs - D\sigma + E\varrho) + \mu(A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho) = 0 \tag{24}$$

dargestellt werden, OZ unter rechtem Winkel.

Wenn der einem beliebigen Werthe von μ entsprechende Complex von der bezeichneten Art ist, erhalten wir nach der 45. Nummer für die Gleichungen der drei Projectionen seiner Axe die folgenden:

$$(A - Ez) + \mu(A' - E'z) = 0, \tag{25}$$

$$(B + Dz) + \mu(B' + D'z) = 0, \tag{26}$$

$$(Ex - Dy) + \mu(E'x - D'y) = 0. \tag{27}$$

In einem solchen Complexe ist die einem Puncte des Raumes entsprechende Ebene diejenige, welche durch den Punct und die Axe des Complexes, in die alle Durchmesser desselben zusammenfallen (Nr. 45), sich legen lässt. Die Gleichung der dem Anfangspuncte entsprechenden Ebene ist bei unserer Annahme der Coordinaten-Axen die folgende:

$$(Ax + By) + \mu(A'x + B'y) = 0. \tag{28}$$

In dieser Ebene liegt also die Axe des Complexes.

Wenn wir durch (x, y, z) irgend einen Punct der Axe eines der zu bestimmenden Complexe, die wir auch dadurch definiren können, dass ihre Parameter gleich Null sind, ausdrücken, so bestehen zwischen diesen Coordinaten gleichzeitig die vorstehenden vier Gleichungen. Eliminiren wir Z zwischen (25) und (26), so erhalten wir:

$$(A + \mu A')(D + \mu D') + (B + \mu B')(E + \mu E') = 0. \tag{29}$$

Dieselbe Gleichung hätten wir durch Elimination von $\frac{y}{x}$ zwischen (27) und (28) erhalten. Sie drückt aus, dass der Parameter des Complexes verschwindet (Nr. 38.). Wir hätten sie von vorneherein aufstellen können.

61. Die letzte Gleichung wird, wenn wir entwickeln:

$$(A'D' + B'E')\mu^2 + [(A'D + AD') + (B'E + EB')]\mu + (AD + EB) = 0. \quad (30)$$

Bezeichnen wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung durch μ^0 und μ_0, so kommt:

$$\mu^0 + \mu_0 = -\frac{(A'D + AD') + (B'E + BE')}{A'D' + B'E'}, \quad (31)$$

$$(\mu^0 - \mu_0)^2 = \frac{[(A'D - AD') + (B'E - BE')]^2 - 4(A'B - AB')(D'E - DE')}{(A'D' + B'E')^2}. \quad (32)$$

Es gibt also in der Complexgruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

zwei Complexe von der besonderen Art, dass in jedem derselben die Linien auf einer festen Linie, der Axe, sich schneiden. Je nachdem die beiden Werthe von μ^0 und μ_0 reell oder imaginär sind, sind es auch die beiden Complexe und ihre Axen. Wir wollen die Axen der so bestimmten beiden Complexe die beiden Directricen der Congruenz nennen.

Alle Linien einer Congruenz schneiden die Directricen derselben.

62. Nach dem in der vorigen Nummer gewonnenen Resultate können wir nunmehr eine Congruenz dadurch geometrisch definiren, dass sie die Gesammtheit aller Linien ist, welche zwei gegebene feste gerade Linien schneiden. Die gerade Linie, welche in der Congruenz einem gegebenen Puncte entspricht, ist hiernach diejenige, welche durch den gegebenen Punct geht und die beiden Directricen schneidet, die gerade Linie, welche einer gegebenen Ebene entspricht, diejenige, welche in der gegebenen Ebene die Durchschnittspuncte derselben mit den beiden Directricen verbindet.

63. Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (25) und (26) μ eliminiren, so kommt:

$$\frac{A - Ez}{A' - E'z} = \frac{B + Dz}{B' + D'z}, \quad (33)$$

und, wenn wir entwickeln:

$$(D'E - DE')z^2 + [(A'D - AD') + (B'E - BE')]z + (A'B - AB') = 0. \quad (34)$$

Durch die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind die Ebenen bestimmt, in welchen die Directricen der Congruenz liegen, und somit die Puncte, in welchen OZ von den beiden Directricen geschnitten wird.

Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (27) und (28) μ eliminiren, so kommt:

$$\frac{Ex - Dy}{E'x - D'y} = \frac{Ax + By}{A'x + B'y}. \tag{35}$$

Die beiden Werthe, welche diese Gleichung für $\frac{y}{x}$ gibt, sind die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die beiden Directricen der Congruenz in den eben bestimmten Ebenen mit der Richtung von OX machen. Setzen wir:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \vartheta,$$

indem wir diesen Winkel ϑ nennen, so ergibt sich, indem wir entwickeln:

$$(B'D - BD')\operatorname{tang}^2\vartheta + [(A'D - AD') - (B'E - BE')]\operatorname{tang}\vartheta - (A'E - AE') = 0. \tag{36}$$

64. Durch das Zusammenfallen der geraden Linie, welche die beiden Directricen der durch (3) bestimmten Congruenz rechtwinklig schneidet, mit der Coordinaten-Axe OZ haben die Gleichungen der beiden Complexe Ω und Ω', die wir beliebig aus der zweigliedrigen Gruppe ausgewählt, die folgende Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned} Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Wir können noch neue Constante aus dem System der beiden Gleichungen fortschaffen.

Derjenige Punct, welcher auf der Axe OZ in der Mitte zwischen den beiden Directricen liegt, soll der Mittelpunct der Congruenz, der halbe Abstand der beiden Directricen von einander die Constante derselben heissen. Legen wir dann die Ebene XY durch den Mittelpunct der Congruenz, so gibt die Gleichung (34):

$$(A'D - AD') + (B'E - BE') = 0, \tag{38}$$

und hiernach, wenn wir die Constante der Congruenz mit Δ bezeichnen:

$$\Delta = \sqrt{-\frac{A'B - AB'}{D'E - DE'}}. \tag{39}$$

Weil der Fall

$$D'E - DE' = 0$$

von der Discussion einstweilen ausgeschlossen ist, erhält Δ immer einen endlichen Werth.

Die Richtung der beiden Coordinaten-Axen ist bisher unbestimmt geblieben. Bestimmen wir noch nachträglich diese Richtung so, dass sie den

Winkel halbiren, welchen die Richtungen der beiden Directricen mit einander bilden — was auf zwiefache Weise geschehen kann — so gibt die Gleichung (36):

$$(A'D - AD') - (B'E - BE') = 0, \tag{40}$$

und für die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Richtungen der beiden Directricen mit OX bilden:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \pm \sqrt{\frac{A'E - AE'}{B'D - BD'}}. \tag{41}$$

Wenn wir den Axen OX und OY die eben bezeichnete Richtung geben und gleichzeitig den Anfangspunct im Mittelpuncte der Congruenz annehmen, bestehen die beiden Bedingungsgleichungen (38) und (40) zugleich und können dann durch die folgenden beiden ersetzt werden:

$$A'D - AD' = 0, \tag{42}$$

$$B'E - BE' = 0. \tag{43}$$

Die beiden Coordinaten-Axen in der so bestimmten Lage wollen wir die beiden Nebenaxen der Congruenz nennen. Sie liegen in der Centralebene der Congruenz und halbiren die Winkel, welche die beiden Projectionen der Directricen auf diese Ebene mit einander bilden.

65. Bei dieser Coordinatenbestimmung ergibt sich:

$$\Delta = \sqrt{-\frac{A'B'}{D'E'}} = \sqrt{-\frac{AB}{DE}}, \tag{44}$$

$$\operatorname{tang} \vartheta = \pm \sqrt{-\frac{A'E'}{B'D'}} = \pm \sqrt{-\frac{AE}{BD}}. \tag{45}$$

Eine Congruenz ist durch ihre beiden Directricen in linearer Weise bestimmt, und hängt somit von acht von einander unabhängigen Constanten ab. Von diesen finden sich sechs in der Annahme des Coordinaten-Systems wieder, welches dadurch, dass wir die Hauptaxe und die beiden Nebenaxen der Congruenz zu Coordinaten-Axen nehmen, vollkommen bestimmt ist. Die zur weiteren Bestimmung der Congruenz dienenden beiden Complexe (37) hängen noch von sechs unabhängigen Constanten, die in ihren Gleichungen auftreten, ab. Die Anzahl derselben reducirt sich in Gemässheit der beiden Bedingungsgleichungen (42) und (43) auf vier. Unter diesen vier Constanten sind noch zwei überzählige, was seine Erklärung darin findet, dass wir unter den Complexen der zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

nicht zwei ausgezeichnete, sondern zwei willkürliche, entsprechend $\mu = 0$

und $\mu = \infty$, Ω und Ω', zur Bestimmung der Congruenz ausgewählt haben. Zwei ausgezeichnete Complexe der Gruppe sind aber diejenigen beiden, welche die beiden Directricen zu Axen haben, das heisst, deren Parameter gleich Null ist. Nehmen wir diese beiden Complexe für Ω und Ω', so ergeben sich die beiden neuen Bedingungs-Gleichungen:

$$AD + BE = 0, \tag{46}$$

$$A'D' + B'E' = 0. \tag{47}$$

Dann bleiben also zur Bestimmung der Congruenz neben den sechs Constanten der Lage noch zwei Constante übrig. Die Anzahl der Constanten ist auf die nothwendige, auf acht, reducirt.

66. Die oben entwickelten Ausdrücke (31) und (32) werden in der neuen Coordinaten-Bestimmung:

$$\mu^0 + \mu_0 = -2.\frac{AD' + BE'}{A'D' + B'E'}, \tag{48}$$

$$(\mu^0 - \mu_0)^2 = -4.\frac{(A'B - AB')(D'E - DE')}{(A'D' + B'E')^2}. \tag{49}$$

Die beiden Wurzeln μ^0 und μ_0 sind reell, wenn:

$$(A'B - AB')(D'E - DE') < 0, \tag{50}$$

und imaginär, wenn

$$(A'B - AB')(D'E - DE') > 0. \tag{51}$$

Der vorstehende Ausdruck lässt sich in Gemässheit der Bedingungs-Gleichungen (42) und (43) unter der folgenden Form schreiben:

$$A'B'D'E'\left[\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'}\right]^2 = ABDE\left[\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right]^2.$$

Die Realität der beiden Wurzeln hängt also davon ab, ob die Producte $A'B'D'E'$ und $ABDE$, welche unter einander im Zeichen übereinstimmen, negativ oder positiv sind. Im ersten Falle sind μ^0 und μ_0 reell, und mit ihnen, in Gemässheit von (44) und (45), auch Δ und die beiden Werthe von tang ϑ; im zweiten Falle sind μ^0 und μ_0, Δ und die beiden Werthe von tang ϑ gleichzeitig imaginär.

67. Die beiden Werthe von μ^0 und μ_0 werden einander gleich, wenn eine der beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$A'B - AB' = 0, \qquad D'E - DE' = 0 \tag{52}$$

befriedigt wird. In diesem Falle aber ergibt sich im Allgemeinen unter Berücksichtigung der Gleichungen (42) und (43),

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'}.$$

Dann sind die beiden Complexe Ω und Ω' der zweigliedrigen Gruppe und in Folge davon alle Complexe dieser Gruppe identisch dieselben. Die Bestimmung der Congruenz wird illusorisch.

Dadurch werden scheinbare Widersprüche gelöst.

68. Es gibt aber auch besondere Fälle, wo die Gleichungsformen (18) ihre Bedeutung behalten, obgleich die beiden Werthe μ^0 und μ_0 einander gleich werden. Im Allgemeinen bedingen die beiden Gleichungen (42) und (43) in Verbindung mit einer der beiden Gleichungen (53) die zweite der letztgenannten Gleichungen. Sind aber etwa

$$A \text{ und } A'$$

gleich Null, so findet dies nicht mehr statt; dann haben wir es mit einer wirklichen Congruenz zu thun, die von besonderer Art ist.

In diesem Falle verschwinden nämlich nach (44) und (45) sowohl Δ, als tang ϑ. Es fallen also die beiden Directricen der Congruenz in eine gerade Linie zusammen. In Uebereinstimmung hiermit verschwindet in dem Werthe (49) für $(\mu^0 - \mu_0)^2$ der Zähler, während der Nenner einen endlichen Werth behält.

Wir können in unserem Falle für die Gleichung der zweigliedrigen Gruppe (37), unter Berücksichtigung der Gleichung (43):

$$B'E - BE' = 0,$$

die folgende nehmen:

$$(Bs + E\varrho) - D\sigma + \mu\,[(Bs + E\varrho) - D'\sigma] = 0 \tag{53}$$

und aus derselben als ausgezeichnete Complexe die folgenden beiden auswählen, deren Gleichungen sind:

$$Bs + E\varrho = 0, \qquad \sigma = 0,$$

und diese Gleichungen in homogenen Coordinaten auch in folgender Weise schreiben:

$$B\,(y - y') + E\,(x'z - xz') = 0, \qquad yz' - y'z = 0. \tag{54}$$

Der erste der beiden vorstehenden Complexe hat die Coordinaten-Axe OY zu seiner Axe. Sein Parameter ist $\frac{B}{E}$. Der zweite Complex ist von der besonderen Art, dass sein Parameter gleich Null ist. Seine Axe, die sonach von allen seinen Linien geschnitten wird, fällt in die Coordinaten-Axe OX. In Uebereinstimmung mit (44) und (45) wird also OX Directrix der Congruenz.

Während eine Congruenz im Allgemeinen durch ihre beiden Directricen vollkommen bestimmt ist, muss, in dem speciellen Falle, dass die beiden Directricen in eine gerade Linie zusammenfallen, ausser dieser geraden Linie noch ein neuer Complex der die Congruenz bestimmenden zweigliedrigen Gruppe gegeben sein.*)

In dem Complexe, dessen Gleichung die folgende ist:

$$B(y - y') + E(x'z - xz') = 0,$$

entspricht irgend einem Puncte der Coordinaten-Axe OX die Ebene:

$$By + Ex'z = 0,$$

wobei x' den Abstand des Punctes von dem Anfangspuncte bezeichnet. Für irgend einen anderen Complex der zweigliedrigen Gruppe (53) finden wir dieselbe Ebene, weil für alle auf OX liegende Puncte y' und z' verschwinden. Diese Ebene geht durch OX. Sonach schliessen wir:

Fallen in einer Congruenz die beiden Directricen in eine gerade Linie zusammen, so ist diese Linie selbst eine gemeinschaftliche Linie aller Complexe, das heisst, eine Linie der Congruenz.

Wir erhalten also eine Congruenz der fraglichen Art, wenn wir in einem Complexe alle diejenigen Linien nehmen, die eine feste Linie desselben schneiden. Wenn ein Punct auf einer Linie eines Complexes fortrückt, so dreht sich die ihm entsprechende Ebene um dieselbe (Nr. 28). Es gehen also durch jeden Punct derjenigen geraden Linie, in welche die beiden Directricen zusammenfallen, unendlich viele Linien der Congruenz, die sämmtlich einer Ebene angehören, die ihrerseits durch diese gerade Linie geht. Rückt der Punct auf einer geraden Linie fort, so dreht sich die Ebene um dieselbe. Die Beziehung zwischen Punct und Ebene ist eine vollkommen gegenseitige.

Indem wir weiter particularisiren, sei

$$A,\ A',\ B \text{ und } B'$$

gleich Null. Dann verschwindet nach (44) Δ, während tang ϑ nach (45) unter der Form $^0/_0$ auftritt und, weil zwischen den verschwindenden Coef-

---

*) Der Grund davon liegt darin, dass eine gerade Linie vier Constanten repräsentirt, während eine Congruenz, die, wie die vorliegende, durch eine Bedingung particularisirt ist, von sieben abhängt. Die drei noch übrigen Constanten finden wir in dem zweiten gegebenen Complex, der darum nur von drei willkürlichen Constanten abhängt, weil er an die zwei Bedingungen geknüpft ist, dass seine Axe die gerade Linie, in welche die beiden Directricen der Congruenz zusammenfallen, schneidet, und zwar senkrecht schneidet.

ficienten keine Relation besteht, unbestimmt wird. Damit in Uebereinstimmung nehmen in dem Ausdrucke (49) für $(\mu^0 - \mu_0)^2$ Zähler und Nenner zugleich den Werth Null an.

Eine jede Linie, welche in der Coordinaten-Ebene XY durch den Anfangspunct geht, ist eine Directrix der Congruenz.

Für die Gleichung der die Congruenz bestimmenden zweigliedrigen Gruppe nehmen wir die folgende, in der nur von einander abhängige Coefficienten vorkommen:

$$- D\sigma + E\varrho + \mu(- D'\sigma + E'\varrho) = 0. \tag{55}$$

Insbesondere können wir aus dieser Gruppe die folgenden beiden Complexe auswählen:

$$\varrho = 0, \qquad \sigma = 0,$$

die, in homogenen Coordinaten ausgedrückt, die nachstehenden Gleichungen haben:

$$x'z - xz' = 0, \qquad yz' - y'z = 0. \tag{56}$$

Danach umfasst die Congruenz einmal alle Linien, die in der Coordinaten-Ebene XY liegen, sodann alle Linien, die durch den Anfangspunct gehen.

Eine jede Linie der Congruenz schneidet sämmtliche Directricen derselben. Die Directricen sind selbst Linien der Congruenz.

Durch einen gegebenen Punct geht im Allgemeinen eine einzige Linie der fraglichen Congruenz: die Verbindungslinie desselben mit dem Anfangspuncte. Liegt insbesondere der gegebene Punct in XY, so gehen durch denselben unendlich viele Linien der Congruenz, welche sämmtlich der genannten Coordinaten-Ebene angehören. Rückt der in der Ebene XY angenommene Punct insbesondere in den Anfangspunct, so gehört jede durch denselben gehende gerade Linie der Congruenz an.

Andererseits liegt, im Allgemeinen, in jeder gegebenen Ebene eine Linie der Congruenz: die Durchschnittslinie derselben mit der Coordinaten-Ebene XY. Geht insbesondere die gegebene Ebene durch den Anfangspunct, so liegen in derselben unendlich viele Linien der Congruenz, welche sämmtlich durch den genannten Punct laufen. Fällt die durch den Anfangspunct gelegte Ebene insbesondere mit der Coordinaten-Ebene XY zusammen, so gehört jede in derselben liegende gerade Linie der Congruenz an.

69. Wir haben im Vorstehenden die Hauptaxe einer Congruenz und

die beiden Nebenaxen derselben zu Coordinaten-Axen genommen und hiernach die Congruenz durch die folgenden beiden Complex-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

unter der Voraussetzung, dass:

$$A'D - AD' = 0, \tag{42}$$

$$B'E - BE' = 0, \tag{43}$$

dargestellt und zur geometrischen Bestimmung der Congruenz erhalten:

$$\varDelta^2 = -\frac{AB}{DE}, \tag{44}$$

$$\text{tang}^2\,\vartheta = -\frac{AE}{BD}. \tag{45}$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen unentschieden, ob diejenige Directrix der Congruenz, welcher $+\text{tang}\,\vartheta$ entspricht, die Hauptaxe derselben in einem Puncte schneidet, für welchen $z = +\varDelta$ oder $z = -\varDelta$ ist, wonach die andere Directrix, welcher $-\text{tang}\,\vartheta$ entspricht, die Axe bezüglich in dem Puncte schneidet, dessen z das entgegengesetzte Zeichen hat. Hiermit in Uebereinstimmung, gelangen wir zu denselben Gleichungen (44) und (45), wenn wir in den Gleichungen (37) gleichzeitig das Vorzeichen von A und B und von A' und B', oder, was dasselbe heisst, gleichzeitig das Vorzeichen und D und E und von D' und E' ändern. Indem wir die dieser Vertauschung entsprechenden Complexe durch die Symbole Ω_1 und Ω'_1 bezeichnen, treten die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv Ar + Bs + D\sigma - E\varrho = 0, \\ \Omega'_1 &\equiv A'r + B's + D'\sigma - E'\varrho = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

an die Stelle der früheren. Die beiden Congruenzen, welche durch die beiden Gleichungen-Paare (37) und (57) dargestellt werden, haben denselben Mittelpunct und dieselbe Centralebene, senkrecht auf dieser dieselbe Hauptaxe und in derselben dieselben beiden Nebenaxen. Auch der Abstand der beiden Directricen von einander und die Winkel, welche ihre Richtungen mit einander bilden, sind in beiden Congruenzen gleich. Die Beziehung der beiden Congruenzen zu einander ist eine gegenseitige: es ist, wenn wir die frühere Anschauung einer Spiegelung wieder zu Hülfe nehmen und als spiegelnde Fläche die Ebene XY (oder statt derselben eine andere Coordinaten-Ebene) betrachten, die eine derselben das Spiegelbild der anderen.

Zwei Congruenzen, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, wollen wir zwei conjugirte Congruenzen nennen.

70. Wir haben im Vorstehenden nachgewiesen, dass eine Congruenz gleichzeitig sämmtlichen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe angehört, und dass unter diesen Complexen sich im Allgemeinen zwei von der besonderen Art befinden, deren Parameter gleich Null sind. Die Axe jedes der beiden Complexe wird von sämmtlichen Linien desselben geschnitten, woraus folgt, dass alle Linien der Congruenz, weil sie auch diesen beiden Complexen angehören müssen, die beiden Axen derselben schneiden. Dem entsprechend haben wir diese Axen als die beiden Directricen einer Congruenz definirt. Wir können aber auch die beiden Directricen unter einem anderen Gesichtspuncte auffassen.

71. Eine Congruenz ist dadurch bestimmt, dass ihre Linien gleichzeitig zweien beliebig aus einer zweigliedrigen Complex-Gruppe genommenen Complexen angehören. Die Complexe werden durch die Gleichung:

$$\Omega + \mu \Omega' = 0$$

dargestellt, wenn wir in dieselbe für μ nach einander zwei beliebige Werthe setzen. Dadurch reducirt sich aber die Anzahl der unabhängigen Constanten jeder dieser Gleichungen um eine Einheit. Die Anzahl der Constanten, von welchen die Congruenz abhängt, beträgt hiernach:

$$2\,(5 - 1) = 8,$$

die Summe der Constanten zweier Complexe, deren Constanten sich von fünf auf vier reducirt haben. Wenn eine der Congruenz angehörige Linie gegeben ist, so erhalten wir eine lineare Bedingungsgleichung zwischen den vier Constanten jedes der beiden Complexe, durch welche die Congruenz gegeben ist. Vier gegebene gerade Linien der Congruenz sind zur Bestimmung der beiden Complexe und mithin der Congruenz nothwendig und hinreichend. Durch vier gegebene gerade Linien der Congruenz sind zwei der Congruenz nicht angehörige gerade Linien, welche die vier gegebenen schneiden, bestimmt. Diese Linien hängen von acht Constanten ab; sie bestimmen gegenseitig die vier gegebenen Linien und alle Linien der Congruenz.

Je vier Linien eines Complexes bestimmen eine Congruenz, die dem Complexe angehört. Ist die Congruenz durch vier ihrer Linien gegeben, so ist durch jede fünfte Linie ein Complex bestimmt, welchem die Congruenz angehört. Die beiden Linien, welche die vier gegebenen Linien schneiden, sind einerseits die beiden Directricen der Congruenz, andererseits zwei zugeordnete Polaren jedes Complexes, dem die Congruenz angehört.

Je zwei zugeordnete Polaren eines gegebenen Complexes sind die beiden Directricen einer dem Complex angehörigen Congruenz.

Die beiden Directricen einer gegebenen Congruenz sind zwei zugeordnete Polaren jedes Complexes, dem die Congruenz angehört.

Fallen die beiden Directricen in eine gerade Linie zusammen, so ist diese gemeinschaftliche Linie aller Complexe, also selbst eine Linie der Congruenz (vergl. Nr. 68.).

72. Im Allgemeinen geht durch einen gegebenen Punct nur eine einzige Linie einer gegebenen Congruenz, so wie in jeder Ebene nur eine einzige Linie derselben liegt. Wir können die beiden Directricen als den Ort solcher Puncte betrachten, durch welche unendlich viele Linien der Congruenz gehen, so wie andererseits als den von solchen Ebenen umhüllten Ort, in welchem unendlich viele Linien der Congruenz liegen. Wenn nämlich ein Punct auf einer von zwei zugeordneten Polaren eines Complexes der zweigliedrigen Gruppe angenommen wird, so ist diejenige Ebene, welche durch den Punct und die andere Polare geht, die in dem Complexe dem Puncte entsprechende Ebene. Wenn also die beiden zugeordneten Polaren allen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe gleichzeitig angehören, entspricht jedem Puncte einer der beiden gemeinschaftlichen Polaren in allen Complexen der Gruppe dieselbe Ebene, welche dadurch bestimmt ist, dass sie durch die andere Polare geht. Die Beziehung der beiden Polaren zu den Complexen der Gruppe ist eine durchaus gegenseitige. Wir können auch, umgekehrt, von einer Ebene, welche durch eine der beiden Polaren gelegt ist, ausgehen; dann ist, in allen Complexen der zweigliedrigen Gruppe, der dieser Ebene entsprechende Punct derselbe und zwar der Durchschnitt dieser Ebene mit der anderen Polaren. Während also in einer Congruenz einem gegebenen Puncte im Allgemeinen *eine* gerade Linie entspricht, entspricht demselben, wenn er insbesondere auf einer der beiden Directricen angenommen wird, *eine Ebene*, die durch die andere Directrix geht, sowie jeder Ebene, der im Allgemeinen *eine einzige* gerade Linie entspricht, dann, wenn sie durch eine der beiden Directricen geht, *ein Punct* entspricht, welcher auf der anderen Directrix liegt.

73. Die vorstehende Definition der Directricen können wir sonach in folgender Weise umschreiben. Sie sind der geometrische Ort solcher Puncte, denen in den verschiedenen Complexen der bezüglichen zweigliedrigen Gruppe dieselbe Ebene entspricht, oder auch als den von solchen Ebenen umhüllten Ort, denen in den verschiedenen Complexen derselbe Punct entspricht. Hieran knüpft sich unmittelbar eine neue analytische Bestimmung der beiden Directricen einer Congruenz, sei es, dass wir von Strahlen-Coordinaten, sei es, dass wir von Axen-Coordinaten Gebrauch machen.

Wir wollen, wie früher (3):

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

für die Gleichung der Complexgruppe nehmen, indem wir in allgemeinster Weise

$$\Omega \equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta,$$
$$\Omega' \equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho + F'\eta$$

setzen. Dann ist die Gleichung derjenigen Ebene, welche in irgend einem durch eine beliebige Annahme des unbestimmten Coefficienten bezeichneten Complexe der Gruppe einem gegebenen Puncte x', y', z' entspricht, die folgende (Nr. 27):

$$\begin{aligned}(A+Fy'-Ez')x+(B-Fx'+Dz')y+(C+Ex'-Dy')z-(Ax'+By'+Cz')\\ +\mu[(A'+F'y'-E'z')x+(B'-F'x'+D'z')y+(C'+E'x'-D'y')z-(A'x'+B'y'+C'z')]\\ =0. \qquad (58)\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird immer, welches auch der Werth von μ sein mag, befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$(A+Fy'-Ez')x+(B-Fx'+Dz')y+(C+Ex'-Dy')z-(Ax'+By'+Cz')=0, \quad (59)$$

$$\begin{aligned}(A'+F'y'-E'z')x+(B'-F'x'+D'z')y+(C'+E'x'-D'y')z-(A'x'+B'y'+C'z')\\ =0. \qquad (60)\end{aligned}$$

Die beiden, durch diese Gleichung dargestellten Ebenen entsprechen in den Complexen Ω und Ω' dem gegebenen Puncte; sie haben mit den, in allen verschiedenen Complexen der Gruppe, demselben Puncte entsprechenden Ebenen eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie. Wenn insbesondere die beiden Ebenen (59) und (60) zusammenfallen, so fallen mit ihnen alle entsprechenden Ebenen (58) zusammen. Damit dies stattfinde, müssen die beiden letzten Gleichungen identisch werden, was unmittelbar die folgenden sechs Relationen liefert:

$$\frac{A+Fy'-Ez'}{A'+F'y'-E'z'} = \frac{B-Fx'+Dz'}{B'-F'x'+D'z'} = \frac{C+Ex'-Dy'}{C'+E'x'-D'y'} = \frac{Ax'+By'+Cz'}{A'x'+B'y'+C'z'}. \quad (61)$$

Die Puncte (x', y', z'), welche durch (61) bestimmt sind, liegen auf den beiden Directricen der Congruenz. Wir wollen ihre Coordinaten als veränderlich betrachten und dem entsprechend fortan die denselben beigefügten Accente fortlassen.

74. Um die Gleichungen (61) geometrisch zu deuten, wollen wir diejenigen Ebenen, welche in den beiden Complexen Ω und Ω' bezüglich den Axen OX, OY, OZ zugeordnet sind, das heisst mit anderen Worten, Puncten entsprechen, welche auf diesen Axen unendlich weit liegen, durch P und P', Q und Q', R und R' und diejenigen Ebenen, welche in den beiden Complexen dem Anfangspuncte entsprechen, durch S und S' bezeichnen. Dann sind die Gleichungen dieser Ebenen:

$$\left.\begin{array}{ll} A + Fy - Ez \equiv p = 0, & A' + F'y - E'z \equiv p' = 0, \\ B - Fx + Dz \equiv q = 0, & B' - F'x + D'z \equiv q' = 0, \\ C + Ex - Dy \equiv r = 0, & C' + E'x - D'y \equiv r' = 0, \\ Ax + By + Cz \equiv s = 0, & A'x + B'y + C'z \equiv s' = 0. \end{array}\right\} \quad (62)$$

Zwischen den linearen Functionen p, q, r, s und p', q', r', s' bestehen die folgenden beiden identischen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} px + qy + rz \equiv s, \\ p'x + q'y + r'z \equiv s'. \end{array}\right\} \quad (63)$$

Gegenseitig ist durch diese beiden identischen Gleichungen die besondere Form der acht linearen Functionen bestimmt.

Die geraden Linien PP', QQ', RR', SS' sind solche vier gerade Linien, welche in der Congruenz denjenigen vier Puncten entsprechen, welche, in Beziehung auf das gewählte Coordinaten-System, eine ausgezeichnete Lage haben, nämlich den drei Puncten, welche nach der Richtung der drei Coordinaten-Axen unendlich weit liegen, und dem Anfangspuncte. Die vier Linien gehören der Congruenz an. Die beiden Directricen der Congruenz sind sonach dadurch vollkommen bestimmt, dass sie diese vier geraden Linien schneiden. Je nachdem diejenige Linienfläche, welche irgend drei der vier geraden Linien PP', QQ', RR', SS' zu Linien einer ihrer Erzeugungen hat, von der vierten dieser Linien geschnitten wird oder nicht, sind die beiden Directricen reell oder imaginär.

Die viertheilige Gleichung (61) wird nach Einführung der acht Symbole:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'}. \quad (64)$$

Sie ergibt sich in Folge der beiden identischen Gleichungen (62) unmittelbar aus der dreitheiligen Gleichung:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}. \tag{65}$$

Diese Gleichung ist also zur Bestimmung der beiden Directricen hinreichend. Sie löst sich in die folgenden drei Gleichungen auf:

$$\left.\begin{aligned} pq' &= p'q, \\ pr' &= p'r, \\ qr' &= q'r, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

welche drei Linienflächen zweiter Ordnung darstellen, die durch die beiden Directricen gehen. In Folge der viertheiligen Gleichung (64) kommen zu diesen drei Linienflächen noch drei neue, durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} ps' &= p's, \\ qs' &= q's, \\ rs' &= r's \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

dargestellte Linienflächen hinzu, welche ebenfalls die beiden Directricen enthalten. Auf diese Weise sind die beiden Directricen dadurch bestimmt, dass auf ihnen irgend zwei der sechs Hyperboloide (66) und (67) sich schneiden.*)

---

*) Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die viertheilige Gleichung (64) das System zweier reellen oder imaginären geraden Linien darstellt, ganz in derselben Weise, wie die dreitheilige Gleichung:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

eine einzige gerade Linie darstellt. Die vorstehende Gleichung enthält noch fünf unabhängige Constante, worunter eine überzählige, welche darauf kommt, dass (x_0, y_0, z_0) ein willkürlicher Punct der dargestellten geraden Linie ist. Die Gleichung (64) enthält, bei der gemachten Functions-Bestimmung, zehn unabhängige Constante, darunter zwei überzählige, die dadurch bedingt sind, dass die beiden Complexe Ω und Ω' durch irgend zwei andere der zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu \Omega' = 0$$

ersetzt werden können.

Es scheint angemessen, dieses Resultat auch direct abzuleiten.

Die Gleichung (65) wird befriedigt, wenn gleichzeitig den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} p &= \lambda p', \\ q &= \lambda q', \\ r &= \lambda r', \end{aligned}$$

welche, entwickelt, in die folgenden übergehen:

$$\left.\begin{aligned} (A - \lambda A') + (F - \lambda F')y - (E - \lambda E')z &= 0, \\ (B - \lambda B') - (F - \lambda F')x + (D + \lambda D')z &= 0, \\ (C - \lambda C') + (E - \lambda E')x - (D + \lambda D')y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Genüge geschieht. Diejenigen Puncte, welche zugleich in den durch diese Gleichungen dargestellten Ebenen liegen, gehören dem Ort an, der durch die Gleichung (65) dargestellt wird. Aber für einen gegebenen Werth von λ widersprechen sich im Allgemeinen die vorstehenden drei Gleichungen. Dieser Widerspruch wird nur dadurch gehoben, dass x, y, z unendlich gross werden und also der bezüg-

Wenn insbesondere C und F, C' und F' gleich Null werden, so gibt die

---

liche Punct unendlich weit rückt. Dann aber ist es nicht gestattet, aus den vorstehenden drei Gleichungen die vierte:

$$s = \lambda s'$$

abzuleiten.

Wenn insbesondere aber:

$$(A-\lambda A')\,(D-\lambda D')+(B-\lambda B')\,(E-\lambda E')+(C-\lambda C')\,(F-\lambda F')=0, \tag{69}$$

so ist eine der drei fraglichen Gleichungen eine algebraische Folge der beiden anderen: es schneiden sich die drei bezüglichen Ebenen in einer geraden Linie. Da die letzte Gleichung im Allgemeinen zwei Werthe von λ gibt, so gibt es auch zwei solcher geraden Linien. Die Puncte dieser beiden geraden Linien sind die einzigen im Endlichen liegenden Puncte, deren Coordinaten die Gleichung (65) und damit (64) befriedigen. Durch die Gleichung (64) werden also zwei gerade Linien, die beiden Directricen, dargestellt.

Wir wollen, um noch einige Erläuterungen hinzuzufügen, von dem Satze ausgehen, dass zwei Linienflächen zweiter Ordnung und Classe, welche durch zwei gerade Linien gehen, sich ausserdem noch in zwei anderen geraden Linien schneiden. Dieser Satz behält seine Bedeutung auch dann, wenn eine der beiden gegebenen geraden Linien in einer gegebenen Ebene unendlich weit liegt. Die Flächen sind dann nicht mehr zwei einschalige Hyperboloide, sondern zwei hyperbolische Paraboloide, deren Linien einer Erzeugung der gegebenen Ebene parallel sind. Wenn also die sechs Flächen (66) und (67) zwei feste gerade Linien zu Linien einer ihrer beiden Erzeugungen haben, so haben sie, paarweise zusammengestellt, ausserdem noch zwei andere Linien zu gemeinsamen Linien ihrer anderen Erzeugung. Umgekehrt also muss nachgewiesen werden, dass irgend zwei der sechs Linienflächen durch dieselben beiden geraden Linien gehen.

Die erste der drei Gleichungen (66) nimmt, wenn wir zu den Functionen, welche durch die in ihnen vorkommenden Symbole dargestellt werden, wieder zurückgehen, und der Kürze halber:

$$(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z\equiv g,$$

$$(A'B-AB')-(A'F-AF')x+(B'F-BF')y+[(A'D-AD')-(B'E-BE')]z\equiv h_2$$

setzen, die folgende Form an:

$$h_2+gz=0, \tag{70}$$

wonach die beiden letzten Gleichungen (65) in die folgenden übergehen:

$$\left.\begin{aligned} h_1+gz&=0,\\ h+gz&=0.\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Die Functionen g sind dieselben in den drei Gleichungen. Die Ausdrücke h_1 und h ergeben sich unmittelbar, wenn wir in h_2 einmal B und B' mit C und C', E und E' mit F und F', so wie unter Zeichenwechsel y mit z vertauschen und das Zeichen von x ändern; das andere Mal A und A' mit C und C', D und D' mit F und F', so wie unter Zeichenwechsel x mit z vertauschen und das Zeichen von y ändern.

Die ursprüngliche Form der drei Gleichungen (66) zeigt, dass die durch diese Gleichungen dargestellten drei Linienflächen paarweise genommen PP', QQ', RR' zu einer gemeinschaftlichen Erzeugenden haben. Die neue Form dieser Gleichungen zeigt, dass diese drei Flächen hyperbolische Paraboloide sind und eine zweite gemeinschaftliche Erzeugende haben, welche in der durch die Gleichung:

$$(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z\equiv h=0$$

dargestellten Ebene unendlich weit liegt. Dieser Ebene sind die drei Linien PP', QQ', RR' parallel.

Die Gleichungen (67) können wir zunächst in folgender Weise entwickeln:

$$\left.\begin{aligned} (pq'-p'q)y+(pr'-p'r)z&=0,\\ (qr'-q'r)z+(pq'-p'q)x&=0,\\ (pr'-p'r)x+(qr'-q'r)y&=0,\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

und dann, nach dem Vorstehenden, auch folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} h_1z+h_2y&=0,\\ hz+h_2x&=0,\\ hy+h_1x&=0.\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Gleichsetzung der vier Ausdrücke (61) die beiden Gleichungen (34) und (36), durch welche wir früher die beiden Directricen bestimmt haben.*)

75. Wir wollen an die Gleichungen (61) nachträglich hier nur die Discussion derjenigen beiden Fälle knüpfen, die sich in Folge der besonderen Coordinaten-Bestimmung der früheren Discussion entzogen haben. In dem einen Falle ist:

$$\frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}, \tag{74}$$

in dem andern:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}. \tag{75}$$

In dem ersten Falle erhalten wir, wenn wir:

$$\mu = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} = -\frac{F}{F'} \tag{76}$$

setzen, einen Complex, für dessen Gleichung wir jede der folgenden drei unter sich identischen Gleichungen:

Sie stellen drei einschalige Hyperboloide dar, welche, in Gemässheit der ursprünglichen Form dieser Gleichungen, sämmtlich SS' zu einer ihrer gemeinschaftichen Erzeugenden haben. Ueberdies haben diese drei Hyperboloide, in Gemässheit der Form der letzten Gleichung, paarweise zusammengestellt eine zweite gemeinschaftliche Erzeugende. Für die durch die erste und zweite, die erste und dritte, die zweite und dritte Gleichung dargestellten beiden Hyperboloide werden diese Erzeugenden bezüglich durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} z = 0, & (A'B - AB') - (A'F - AF')x - (B'F - BF')y = 0, \\ y = 0, & (A'C - AC') + (A'E - AE')x + (C'E - CE')z = 0, \\ x = 0, & (B'C - BC') - (B'D - BD')y - (C'D - CD')x = 0 \end{array}$$

dargestellt. Die drei zweiten Erzeugenden liegen also bezüglich in den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ und schneiden, im Allgemeinen, die durch den Anfangspunct gehende erste Erzeugende SS' nicht. Die beiden gemeinschaftlichen Erzeugenden je zweier der drei Hyperboloide gehören also, wie zu erwarten war, derselben Erzeugung beider Flächen an.

Wenn wir zusammenfassen, gelangen wir zu der folgenden Anschauung:

So wie irgend zwei Ebenen durch ihren Durchschnitt eine gerade Linie bestimmen und unendlich viele Ebenen durch diese gerade Linie gehen, so werden durch zwei einschalige Hyperboloide, welche zwei feste gerade Linien zu Linien einer Erzeugung haben, zwei reelle oder imaginäre Linien als die gemeinschaftlichen Linien der anderen Erzeugung derselben bestimmt. Dieselben beiden geraden Linien sind gemeinschaftliche Erzeugende unendlich vieler solcher Hyperboloide. Irgend zwei gerade Linien des Raumes, welche die beiden gegebenen schneiden, lassen sich auf diese Weise geometrisch bestimmen und, dem entsprechend, unter der gemachten Bestimmung der linearen Functionen durch je zwei der sechs Gleichungen (66) und (67), in welche die viertheilige Gleichung:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'}$$

sich auflöst, analytisch darstellen. Nehmen wir insbesondere zur Bestimmung der beiden geraden Linien zwei der drei Gleichungen (66), so treten in der vorstehenden Construction an die Stelle der beiden Hyperboloide zwei hyperbolische Paraboloide, deren Linien einer Erzeugung einer gegebenen Ebene parallel sind, und die eine dieser Linien gemein haben.

In ein ausführliches Detail einzugehen, ist hier nicht der Ort.

*) Vergl.: On a New Geometry of Space. Phil. Trans. 1865. p. 750.

$$\left.\begin{aligned}(A'D - AD')r + (B'D - BD')s + (C'D - CD') = 0,\\ (A'E - AE')r + (B'E - BE')s + (C'E - CE') = 0,\\ (A'F - AF')r + (B'F - BF')s + (C'F - CF') = 0\end{aligned}\right\}\quad(77)$$

nehmen können. Dann sind alle Linien der Congruenz einer Ebene parallel, deren Gleichung wir erhalten, wenn wir in eine beliebige der vorstehenden Gleichungen r und s durch $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ ersetzen. In derselben Ebene liegt eine Directrix unendlich weit: die Durchschnittslinie paralleler Ebenen. Wir haben eine Congruenz, deren eine Directrix unendlich weit liegt, eine parabolische genannt. Zur Bestimmung der nicht unendlich weit liegenden Directrix gibt die paarweise Gleichsetzung der drei ersten Ausdrücke (61):

$$\left.\begin{aligned}(A'B-AB')-(A'F-AF')x-(B'F-BF')y+[(A'D-AD')+(B'E-BE')]z=0,\\ (A'C-AC')+(A'E-AE')x-[(A'D-AD')+(C'F-CF')]y+(C'E-CE')z=0,\\ (B'C-BC')+[(B'E-BE')+(C'F-CF')]x-(B'D-BD')y-(C'D-CD')z=0.\end{aligned}\right\}(78)$$

Diese drei Gleichungen stellen drei durch die Directrix gehende Ebenen dar. Wenn insbesondere F und F' verschwinden, reduciren sich die fraglichen Bedingungen auf:

$$D'E - DE' = 0.$$

Dann erhalten wir für die Ebene, welcher die eine Directrix parallel ist, die unter sich identischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(A'D-AD')x + (B'D-BD')y + (C'D-CD')z = 0,\\ (A'E-AE')x + (B'E-BE')y + (C'E-CE')z = 0,\end{aligned}\right\}\quad(79)$$

und für die Gleichungen der anderen:

$$\left.\begin{aligned}(A'B-AB') + [(A'D-AD') + (B'E-BE')]z = 0,\\ (A'C-AC') + (A'E-AE')x - (A'D-AD')y + (C'E-CE')z = 0,\\ (B'C-BC') + (B'E-BE')x - (B'D-BD')y - (C'D-CD')z = 0.\end{aligned}\right\}\quad(80)$$

Die nicht unendlich weit liegende Directrix ist also der Ebene XY parallel.

Die fraglichen Bedingungen werden insbesondere auch befriedigt, wenn gleichzeitig D und D', E und E' verschwinden. Dann liegt eine Directrix in der früheren Ebene unendlich weit, die nun durch die Gleichung:

$$(A'F-AF')x + (B'F-BF')y + (C'F-CF')z = 0\quad(81)$$

dargestellt wird. Für die andere Directrix kommt:

$$\left.\begin{aligned}(A'B-AB') - (A'F-AF')x - (B'F-BF')y = 0,\\ y = \frac{A'C-AC'}{C'F-CF'},\\ x = -\frac{B'C-BC'}{C'F-CF'}.\end{aligned}\right\}\quad(82)$$

Dieselbe ist also der Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, dessen Coordinaten durch die letzten beiden Gleichungen bestimmt werden. Wenn wir diese Coordinaten-Werthe in die erste der letzten drei Gleichungen einsetzen, so wird diese Gleichung in Folge der identischen Gleichung:

$$(A'B-AB')(C'F-CF')+(B'C-BC')(A'F-AF')-(A'C-AC')(B'F-BF')=0$$

befriedigt.

Wenn insbesondere:

$$(A'D-AD')+(B'E-BE')+(C'F-CF')=0, \tag{83}$$

so particularisirt sich die parabolische Congruenz. Alsdann werden die drei Ebenen (78), durch deren Durchschnitt die im Endlichen liegende Directrix der Congruenz bestimmt wurde, unter sich und mit der Ebene parallel, in welcher die zweite Directrix unendlich weit liegt.

Die beiden Directricen der parabolischen Congruenz fallen im Unendlichen in eine gerade Linie zusammen.

Wir gehen hier nicht weiter auf diese besondere Art von Congruenzen ein, da sie dem ersten in der 68. Nummer behandelten Falle vollkommen analog ist.

Die vorstehende Bedingungs-Gleichung (83) wird vermöge (62) insbesondere befriedigt, wenn

$$\left.\begin{aligned} AD+BE+CF&=0,\\ A'D'+B'E'+C'F'&=0.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Alsdann sind sämmtliche Complexe der die Congruenz bestimmenden zweigliedrigen Gruppe von der besonderen Art, dass ihre Parameter verschwinden. In Uebereinstimmung hiermit fallen die drei Ebenen (78) in eine einzige zusammen. Da die Axen aller Complexe, denen eine parabolische Congruenz angehört, unter sich parallel sind, so schliessen wir:

Die Congruenz hat unendlich viele, unter sich parallele Directricen, die in derselben Ebene liegen. In dieser Ebene liegt auch die unendlich weit liegende Directrix.

Dieser Fall entspricht dem zweiten Falle der 68. Nummer. Es ist bloss der gemeinschaftliche Durchschnitt der Directricen unendlich weit gerückt.

76. Wenn die Bedingungs-Gleichungen (63) erfüllt werden, entspricht dem besonderen Werthe des unbestimmten Coefficienten:

$$\mu=-\frac{A}{A'}=-\frac{B}{B'}=-\frac{C}{C'} \tag{85}$$

ein Complex der zweigliedrigen Gruppe, welcher durch eine der drei folgenden unter sich identischen Gleichungen dargestellt wird:

$$\left.\begin{aligned} -(A'D-AD')\sigma+(A'E-AE')\varrho+(A'F-AF')\eta&=0,\\ -(B'D-BD')\sigma+(B'E-BE')\varrho+(B'F-BF')\eta&=0,\\ -(C'D-CD')\sigma+(C'E-CE')\varrho+(C'F-CF')\eta&=0.\end{aligned}\right\}\quad(86)$$

Die Axe des Complexes steht auf derjenigen Ebene, welche, wenn wir $-\sigma, \varrho, \eta$ mit x, y, z vertauschen, durch die letzte Gleichung dargestellt wird, im Anfangspuncte senkrecht. Da der Parameter des Complexes gleich Null ist, ist diese Axe eine der beiden Directricen der Congruenz. In Uebereinstimmung hiermit werden die Gleichungen (61) befriedigt, wenn x, y, z gleichzeitig verschwinden. Diese Gleichungen reduciren sich im vorliegenden Falle auf:

$$\frac{A+Fy-Ez}{A'+F'y-E'z}=\frac{B-Fx+Dz}{B'-F'x+D'z}=\frac{C+Ex-Dy}{C'+E'x-D'y}=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.\quad(87)$$

Sie geben, wenn wir die drei ersten ihrer vier Glieder nach einander dem vierten gleichsetzen:

$$\begin{aligned}(C'F-CF')y-(C'E-CE')z&=0,\\ (C'F-CF')x-(C'D-CD')z&=0,\\ (C'E-CE')x-(C'D-CD')y&=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen, in welchen wir B und A an die Stelle von C schreiben können, lassen sich in folgender Weise zusammenziehen:

$$\frac{x}{C'D-CD'}=\frac{y}{C'E-CE'}=\frac{z}{C'F-CF'},\quad(88)$$

und stellen die durch den Anfangspunct gehende Directrix dar.

Die Bedingungs-Gleichungen (63) werden insbesondere befriedigt, wenn A und A', B und B' verschwinden. Dann erhalten wir, wenn wir paarweise die drei ersten Ausdrücke (61) einander gleich setzen:

$$\left.\begin{aligned} [(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z]z&=0,\\ [(C'F-CF')+(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z]y&=0,\\ [(C'F-CF')+(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z]x&=0.\end{aligned}\right\}\quad(89)$$

Um die vorstehenden drei Gleichungen gleichzeitig zu befriedigen, genügt es,

$$\left.\begin{aligned} z&=0\\ (C'F-CF')+(E'F-EF')x-(D'F-DF')y&=0\end{aligned}\right\}\quad(90)$$

zu setzen. Die durch diese beiden Gleichungen dargestellte gerade Linie ist die zweite Directrix der Congruenz. Sie liegt in der Coordinaten-Ebene XY.

77. Wenn gleichzeitig

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \qquad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'},$$

so ist die Congruenz eine parabolische, deren nicht unendlich weit liegende Directrix durch den Anfangspunct der Coordinaten geht. Dann wird die Gleichung der durch den Anfangspunct gelegten Ebene, denen die Linien der Congruenz parallel sind, die folgende:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Die durch den Anfangspunct gehende Directrix erhält zu Gleichungen:

$$\frac{x}{D} = \frac{y}{E} = \frac{z}{F},$$

und die auf ihr senkrechte, durch den Anfangspunct gehende Ebene hat die Gleichung:

$$Dx + Ey + Fz = 0.$$

78. Wenn wir particularisiren und

$$A'B - AB' = 0, \qquad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} \tag{91}$$

setzen, sind alle Linien der parabolischen Congruenz einer Ebene parallel, die auf der Coordinaten-Ebene XY senkrecht steht, während ihre Directrix durch den Anfangspunct geht.

Wenn

$$A,\ A',\ B,\ B' = 0, \qquad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}, \tag{92}$$

sind alle Linien der parabolischen Congruenz der Ebene XY parallel.

Wenn

$$D'E - DE' = 0, \qquad F,\ F' = 0, \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \tag{93}$$

liegt die Directrix der parabolischen Congruenz in der Ebene XY.

Wenn

$$D,\ D',\ E,\ E' = 0, \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \tag{94}$$

fällt die Directrix der parabolischen Congruenz in die Coordinaten-Axe OZ.

Wenn

$$A,\ A',\ B,\ B',\ D,\ D',\ E,\ E' = 0, \tag{95}$$

sind die Linien der parabolischen Congruenz der Coordinaten-Ebene XY parallel und ihre Directrix fällt mit der Coordinaten-Axe OZ zusammen. Bei diesen Voraussetzungen wird die Gleichung der zweigliedrigen Complex-Gruppe:

$$(C + F\eta) + \mu(C' + F'\eta) = 0, \tag{96}$$

und alle Complexe der Gruppe werden, bei willkürlicher Annahme von k, durch die Gleichung:

$$\eta + k = 0 \tag{97}$$

dargestellt.*)

Wenn

$$\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'}, \tag{98}$$

so gibt

$$\mu = -\frac{C}{C'} = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} \tag{99}$$

die folgende Gleichung eines Complexes der zweigliedrigen Gruppe:

$$(A'C - AC')r + (B'C - BC')s - (C'F - CF')\eta = 0.$$

Dieser Complex ist von der besondern Art, dass alle seine Linien die Axe desselben schneiden, und diese Axe, eine Directrix der Congruenz, ist hier der Coordinaten-Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, dessen Gleichung in Linien-Coordinaten dieser Ebene die folgende ist:

$$(B'C - BC')t - (A'C - AC')u - (C'F - CF')w = 0.$$

(Vergl. Nr. 45. (95).)

Wenn insbesondere

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}, \tag{100}$$

so fällt eine Directrix der Congruenz mit der Axe OZ zusammen.

Um noch ein letztes Beispiel zu geben, wollen wir:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{F}{F'}, \qquad \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} \tag{101}$$

setzen. Wenn wir dann nach einander

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'} = -\frac{F}{F'}, \\ \mu &= -\frac{C}{C'} = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

nehmen, erhalten wir für die Gleichungen zweier Complexe der Gruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

---

*) Setzen wir für η den Ausdruck $\frac{xy' - x'y}{z - z'}$, so geht die Gleichung des Textes in die folgende über:

$$\frac{x'y - xy'}{z - z'} = k$$

und gibt, wenn k unbestimmt wird, gleichzeitig

$$x'y - xy' = 0, \qquad z - z' = 0.$$

die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l}(A'C-AC')-(A'D-AD')\sigma+(A'E-AE')\varrho=0,\\(A'C-AC')r+(B'C-BC')s-(C'F-CF')\eta=0.\end{array}\right\}\qquad(103)$$

Diese beiden Gleichungen reduciren sich auf:

$$\left.\begin{array}{r}C-D\sigma+E\varrho=0,\\Ar+Bs+F\eta=0\end{array}\right\}\qquad(104)$$

und stellen zwei Complexe der besonderen Art dar, deren Parameter verschwinden. Die Axen der Complexe sind die beiden Directricen der Congruenz. Eine derselben liegt in der Ebene XY und wird in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$C+Ex-Dy=0\qquad(105)$$

dargestellt. Die andere ist der Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, der, in dieser Ebene, durch die Gleichung:

$$Bt-Au+F=0\qquad(106)$$

dargestellt wird (Nr. 33.).

79. Zur analytischen Darstellung einer zweigliedrigen Complex-Gruppe und der dadurch bestimmten Congruenz haben wir uns bisher rechtwinkliger Coordinaten-Axen bedient, und dabei den Mittelpunct der Congruenz zum Anfangspuncte der Coordinaten und zur Axe OZ diejenige Linie genommen, welche die beiden Directricen rechtwinklig schneidet. Indem wir alsdann die beiden Axen OX und OY mit den beiden Nebenaxen der Congruenz zusammenfallen liessen, haben wir auf dem einfachsten Wege die allgemeine Bestimmung derselben in der 69. Nummer erhalten.

Wir können aber auch jede beliebige gerade Linie der Congruenz als Axe OZ und den Punct, in welchem sie die Central-Ebene schneidet, zum Anfangspunct nehmen. Wenn wir dann die beiden Nebenaxen in dieser Ebene parallel mit sich selbst so verschieben, dass sie in dem neuen Anfangspuncte sich schneiden, so halbiren sie, nach wie vor, die Winkel, welche die beiden Directricen, projicirt nach OZ auf die Central-Ebene, mit einander bilden. Es ist klar, dass in der neuen Coordinaten-Bestimmung die Gleichung der Complex-Gruppe die frühere Form behält. Ist der Neigungswinkel der Axe OZ gegen die Ebene XY γ, so tritt an die Stelle von Δ nunmehr $\frac{\Delta}{\sin\gamma}$, das heisst, der Abstand der Durchschnittspuncte der Axe OZ mit den beiden Directricen vom Anfangspuncte der Coordinaten.

Wir können endlich auch, ohne die Form der obigen Gleichung zu ändern, die beiden Axen OX und OY in der Central-Ebene beliebig so annehmen, dass sie mit den Projectionen beider Directricen vier Harmonicalen bilden. Die Axe OZ können wir als einen Hauptdurchmesser, die Axen OX und OY als zwei conjugirte Nebendurchmesser der Congruenz bezeichnen. Die conjugirten Nebendurchmesser bleiben auch dann reell, wenn die beiden Directricen imaginär werden.

Wir haben früher zwei conjugirte Congruenzen dadurch definirt, dass in denselben Axen und Nebenaxen dieselben sind, nur die durch den Scheitel der Axe gehenden Directricen ihre Richtungen gegenseitig vertauschen. Wir können an die Stelle der Axe der Congruenz in dieser Definition einen beliebigen Durchmesser setzen. Dann hat eine Congruenz unendlich viele conjugirte: jedem Durchmesser derselben entspricht eine solche.

80. Das Vorstehende enthält die vollständige Discussion der durch zweigliedrige Complex-Gruppen bestimmten Congruenzen. Wir wollen in dem Folgenden an diese Discussion neue Betrachtungen anknüpfen, welche bestimmt sind, von der Natur solcher Congruenzen ein anschauliches Bild zu geben.

Im Anschluss an die 69. Nummer stelle unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0 \tag{107}$$

einen derjenigen beiden Complexe besonderer Art dar, welche eine der beiden Directricen der Congruenz zu Axen haben. Dann erhalten wir zur Bestimmung der Constanten dieser Gleichung neben den beiden Gleichungen (44) und (45) die folgende:

$$AD + BE = 0. \tag{108}$$

Aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen ergibt sich:

$$\frac{A^2}{D^2} = \varDelta^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta, \tag{109}$$

aus (44) und (108):

$$\frac{B^2}{D^2} = \varDelta^2. \tag{110}$$

Dividiren wir die beiden letzten Gleichungen in einander und berücksichtigen (108), so ergibt sich

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{E^2}{D^2} = \operatorname{tang}^2 \vartheta. \tag{111}$$

Setzen wir $D = 1$, wonach erst A, B, E absolute Werthe erhalten, und berücksichtigen wir, dass für den Fall reeller Directricen das Product:

$$ABC = \Delta^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta$$

nach der 66. Nummer einen positiven Werth erhalten muss, so ergeben sich die folgenden vier möglichen Constanten-Bestimmungen:

$$A = -\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = +\Delta, \qquad E = -\operatorname{tang} \vartheta, \tag{112}$$
$$A = -\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = -\Delta, \qquad E = +\operatorname{tang} \vartheta, \tag{113}$$
$$A = +\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = +\Delta, \qquad E = +\operatorname{tang} \vartheta, \tag{114}$$
$$A = +\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = -\Delta, \qquad E = -\operatorname{tang} \vartheta. \tag{115}$$

Die beiden ersten Combinationen, und ebenso die beiden letzten, lassen sich aus einander dadurch ableiten, dass man gleichzeitig die Vorzeichen von Δ und tang ϑ ändert. Die beiden ersten Combinationen bestimmen also die fraglichen Complexe der einen, die beiden letzten der anderen von zwei conjugirten Congruenzen. Wir können also, indem wir:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &\equiv \sigma - \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r - \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho + \Delta s = 0, \\ \Xi' &\equiv \sigma - \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r + \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho - \Delta s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

setzen, durch

$$\Xi + \mu \Xi' = 0 \tag{117}$$

die Complex-Gruppe der einen Congruenz, indem wir:

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 &= \sigma + \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r + \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho + \Delta s = 0, \\ \Xi_1' &= \sigma + \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r - \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho - \Delta s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

setzen, durch

$$\Xi_1 + \mu \Xi_1' = 0 \tag{119}$$

die Complex-Gruppe der conjugirten Congruenz darstellen.

81. Es möchte vielleicht nicht unpassend sein, auch noch auf directem Wege die vorstehenden Gleichungen abzuleiten. Unter Beibehaltung der bisherigen Coordinaten-Bestimmung seien die Gleichungen der beiden, als gegeben betrachteten Directricen einer Congruenz:

$$\left.\begin{aligned} y &= \operatorname{tang} \vartheta \cdot x, \qquad & z &= \Delta, \\ y &= -\operatorname{tang} \vartheta \cdot x, \qquad & z &= -\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Es handelt sich darum, die beiden Complexe besonderer Art zu bestimmen, deren Axen mit den beiden Directricen zusammenfallen. Verschieben wir die beiden Complexe mit ihren Axen so, dass diese letztern in die mit der Central-Ebene der Congruenz zusammenfallende Coordinaten-Ebene XY rücken, so erhalten wir die Gleichungen der beiden Complexe in der neuen Lage unmittelbar, wenn wir in den Gleichungen der gegebenen Directricen x und y mit ϱ und σ vertauschen. Auf diese Weise kommt:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho,\\ \sigma &= -\operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho.\end{aligned}\right\}\tag{121}$$

Wenn wir die Complexe wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückführen, haben wir in der Gleichung des ersten ϱ und σ mit

$$\varrho + \Delta\cdot r \quad \text{und} \quad \sigma + \Delta\cdot s,$$

in der Gleichung des zweiten mit

$$\varrho - \Delta\cdot r \quad \text{und} \quad \sigma - \Delta\cdot s$$

zu vertauschen (Nr. 12.). Nach dieser Vertauschung ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\sigma - \Delta\operatorname{tang}\vartheta\cdot r - \operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho + \Delta\cdot s = 0,\\ \sigma - \Delta\operatorname{tang}\vartheta\cdot r + \operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho - \Delta\cdot s = 0.\end{aligned}\right\}\tag{116}$$

Diese Gleichungen sind dieselben, die wir eben für die erste der beiden conjugirten Congruenzen gefunden haben; die Gleichungen der zweiten erhalten wir durch Aenderung des Vorzeichens von $\operatorname{tang}\vartheta$ (116), (118).

82. Zur Bestimmung der Congruenz können wir an die Stelle der beiden Complexe Ω und Ω' die beiden Complexe Ξ und Ξ' nehmen, und demnach dieselbe Complex-Gruppe, die wir früher durch die Gleichung:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0 \tag{3}$$

dargestellt haben, nunmehr durch die Gleichung:

$$\Xi + \mu\Xi' = 0 \tag{117}$$

darstellen. Diese Gleichung wird, wenn wir entwickeln und der Kürze wegen

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} = \lambda \tag{122}$$

setzen:

$$\sigma - \Delta\operatorname{tang}\vartheta\cdot r - \lambda(\operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho - \Delta\cdot s) = 0. \tag{123}$$

Sie stellt, wenn wir für λ nach einander alle möglichen Werthe einsetzen, die sämmtlichen Complexe der zweigliedrigen Gruppe dar, durch welche die Congruenz bestimmt ist.

Zu diesen Complexen gehören insbesondere zwei, den Werthen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entsprechend, welche, wenn wir der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}\Delta\operatorname{tang}\vartheta &= k^0,\\ \frac{\Delta}{\operatorname{tang}\vartheta} &= k_0\end{aligned}\tag{124}$$

setzen, durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Omega^0 &= +\sigma - k^0\cdot r = 0,\\ \Omega_0 &= +\varrho + k_0\cdot s = 0\end{aligned}\right\}\tag{61}$$

dargestellt werden. Die Parameter der beiden Complexe sind k^0 und k_0. Die

Axen derselben fallen mit den beiden Nebenaxen der Congruenz zusammen. Ihr Durchschnitt ist der Mittelpunct der Congruenz. Wir wollen sie, ihrer ausgezeichneten Beziehung zur Congruenz wegen, besonders hervorheben und die beiden Central-Complexe derselben nennen.

Wenn die conjugirte Congruenz an die Stelle der gegebenen tritt, bleiben die Axen der beiden Central-Complexe, die mit den gemeinschaftlichen Nebenaxen der beiden Congruenzen zusammenfallen, dieselben. Auch die absoluten Werthe ihrer beiden Parameter ändern sich nicht, nur ändert sich, in Folge der Zeichenänderung von tang ϑ, gleichzeitig das Vorzeichen beider Parameter.

Die Gleichung der Complexgruppe nimmt hiernach, wenn wir überdies noch der Kürze wegen:

$$\lambda \operatorname{tang} \vartheta = \lambda_0$$

setzen, die folgende einfache Form an:

$$\Omega^0 + \lambda_0 \Omega_0 \equiv (\sigma - k^0 r) + \lambda_0(\varrho + k_0 s) = 0. \tag{126}$$

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} k^0 k_0 &= -\Delta^2, \\ \frac{k^0}{k_0} &= -\operatorname{tang}^2 \vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

und hiernach:

$$\left.\begin{aligned} k^0 - k_0 &= \frac{\Delta}{\sin\vartheta \cos\vartheta} = \frac{2\Delta}{\sin 2\vartheta}, \\ k^0 + k_0 &= \frac{-2\Delta}{\operatorname{tang} 2\vartheta}, \\ \frac{k^0 - k_0}{k^0 + k_0} &= -\cos 2\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Hier erhalten wir, zur Bestimmung der Congruenz, ausser den sechs Constanten der Lage die beiden Parameter ihrer Central-Complexe.

83. Wenn wir von den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0, \end{aligned} \tag{129}$$

durch welche wir früher die Congruenz bestimmt haben, und zwischen deren Coefficienten, wenn die Nebenaxen der Congruenz zu Coordinaten-Axen OX und OY genommen werden, die Relationen:

$$A'D - AD' = 0,$$
$$B'E - BE' = 0$$

bestehen, ausgehen, so können wir leicht daraus die Gleichung der beiden Central-Complexe ableiten. Zu diesem Ende brauchen wir bloss die beiden

Gleichungen von einander abzuziehen, nachdem wir zuvor einmal die erste derselben mit B', die zweite mit B, das andere Mal die erste derselben mit A', die zweite mit A multiplicirt haben. Auf diese Weise kommt, wenn wir die vorstehenden Bedingungs-Gleichungen berücksichtigen:

$$(B'D - BD')\sigma + (A'B - AB')r = 0,$$
$$(A'E - AE')\varrho + (A'B - AB')s = 0,$$

wonach:

$$\left.\begin{aligned} k^0 &= -\frac{A'B - AB'}{B'D - BD'}, \\ k_0 &= \frac{A'B - AB'}{A'E - AE'}. \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

84. Um unter den Complexen der zweigliedrigen Gruppe einen einzelnen zu bestimmen, den wir durch die Gleichung:

$$Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0$$

darstellen wollen, müssen wir den Parameter desselben, k, das z desjenigen Punctes, in welchem seine Axe die Axe OZ einschneidet, und den Winkel ω kennen, den die Richtung dieser Axe mit der Richtung der Axe OX bildet. Wir können, bei der Bestimmung dieser Constanten, in gleich einfacher Weise einmal von den beiden Central-Complexen, das andere Mal von den beiden Directricen der Congruenz, als bekannt, ausgehen. Indem wir, dem entsprechend, die letzte Gleichung einmal der Gleichung (126), das andere Mal der Gleichung (123) identisch setzen, ergeben sich die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\ k^0 = -\Delta \operatorname{tang}\vartheta, \\ B &= \lambda_0 k_0 = \lambda\Delta, \\ D &= -1, \\ E &= \lambda_0 = -\lambda \operatorname{tang}\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Die allgemeinen Gleichungen des vorigen Paragraphen (15), (16) und (53) ergeben für den fraglichen Complex, indem wir C und F gleich Null setzen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\omega &= \frac{E}{D}, \\ z &= \frac{AE - BD}{E^2 + D^2}, \\ k &= \frac{AD + BE}{E^2 + D^2}. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Führen wir k^0, k_0 und λ_0 ein, so kommt:

$$\operatorname{tang}\omega = -\lambda_0, \tag{132}$$

$$z = -\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0^2}(k^0 - k_0), \tag{133}$$

$$k = \frac{k^0 + \lambda_0^2 k_0}{1+\lambda_0^2}, \tag{134}$$

und hieraus, wenn wir λ_0 eliminiren:

$$z = (k^0 - k_0)\sin\omega\cos\omega, \tag{135}$$

$$k = k^0\cos^2\omega + k^0\sin^2\omega, \tag{136}$$

und schliesslich, nach Elimination von ω:

$$z^2 + (k - k^0)(k - k_0) = 0. \tag{137}$$

Wenn wir die Constanten der beiden Directricen einführen, gehen die Gleichungen (135) und (136) in die folgenden über:

$$z = \varDelta \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\vartheta}, \tag{138}$$

$$k = -2\varDelta \cdot \frac{\sin(\omega+\vartheta)\cdot\sin(\omega-\vartheta)}{\sin 2\vartheta}. \tag{139}$$

Jedem Werthe von ω entspricht ein einziger Werth von z (135), (138) und ein Werth des Complex-Parameters (136), (139). Da aber jedem Werthe von z zwei Richtungen der Complex-Axe und zwei Werthe von k, die reell und imaginär sein können, entsprechen, so gibt es ein Maximum der Entfernung der Complex-Axen von der Central-Ebene. Für dieses Maximum gibt die Gleichung (138) unmittelbar, dem Winkel $\omega = \frac{\pi}{4}$ entsprechend:

$$z = \frac{\varDelta}{\sin 2\vartheta} = \tfrac{1}{2}(k^0 - k_0), \tag{140}$$

und gleichzeitig wird nach (136):

$$k = -\frac{\varDelta}{\operatorname{tang} 2\vartheta} = \tfrac{1}{2}(k^0 + k_0). \tag{141}$$

85. Die Discussion der vorstehenden analytischen Entwickelungen liefert eine Reihe von geometrischen Resultaten.

Wir haben nach der 64. Nummer der Axe OX eine beliebige derjenigen beiden Richtungen gegeben, welche die von den beiden Directricen einer gegebenen Congruenz gebildeten spitzen und stumpfen Scheitelwinkel halbiren, und die positive Erstreckung dieser Axe beliebig angenommen. Den Winkel rechnen wir von der positiven Erstreckung der Axe OX nach der positiven Erstreckung der Axe OY. Indem wir durch ϑ die Richtung derjenigen der beiden Directricen bezeichnen, die einem positiven Z entspricht, ist hiernach die positive Erstreckung von OY bestimmt. In der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung tritt $(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)$ an die Stelle von ϑ, und demnach (124) vertauschen sich die Werthe von k^0 und k_0 gegenseitig unter Zeichenwechsel. Wir wollen das Coordinatensystem so annehmen, dass OX die spitzen Scheitelwinkel, die in der Central-Ebene der Congruenz von den Projectionen der beiden Directricen gebildet werden, halbirt. Dann ist (128) k^0 positiv, k_0 negativ, und, weil tang $2\vartheta > 0$:

$$k^0 + k_0 < 0.$$

Der Parameter des Central-Complexes, dessen Axe in OX fällt, ist k^0 und positiv, der Parameter des Central-Complexes, dessen Axe in OY fällt, ist k_0 und negativ. Absolut genommen ist der Werth des zweiten Parameters grösser als der Werth der ersten.

Wir haben früher bereits neben die gegebene Congruenz eine zweite gestellt, die wir die ihr conjugirte genannt haben (Nr. 69.), und die wir erhalten, wenn die beiden Parameter der Central-Complexe der gegebenen, k^0 und k_0, gleichzeitig ihr Zeichen ändern, oder, was dasselbe heisst, wenn $\varDelta$ dasselbe bleibt und ϑ sein Zeichen wechselt. Neben die gegebene Congruenz stellt sich noch eine dritte, welche wir die ihr adjungirte nennen wollen, und die man erhält, wenn k^0 und k_0 sich gegenseitig vertauschen und zugleich ihr Zeichen ändern. Dies kommt nach (124) darauf hinaus, $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ an die Stelle von ϑ treten zu lassen. Endlich erhalten wir noch eine vierte Congruenz, welche von der gegebenen unmittelbar abhängt, wenn wir von der gegebenen einmal die conjugirte, dann von dieser die adjungirte nehmen, was darauf hinauskommt, k^0 und k_0 ohne Zeichenwechsel zu vertauschen, oder, was dasselbe heisst, $\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)$ an die Stelle von ϑ zu setzen.

In unserer Annahme ist für die gegebene Congruenz 2ϑ ein spitzer Winkel; für die adjungirte Congruenz ist der entsprechende Winkel $(\pi - 2\vartheta)$ ein stumpfer. Bezeichnen wir zur Unterscheidung die Parameter der beiden Central-Complexe der adjungirten Congruenz durch (k^0) und (k_0), so ist:

$$(k^0) + (k_0) > 0,$$

und da (k^0) positiv, (k_0) negativ ist, hat (k^0) absolut einen grösseren Werth als (k_0).

Die Axe, die Central-Ebene und in ihr die beiden Nebenaxen, so wie der Abstand der beiden Directricen von einander bleiben für sämmtliche vier Congruenzen dieselben.

86. Wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes auf der Axe irgend

eines Complexes der zweigliedrigen Gruppe durch x, y, z bezeichnen, so ist:

$$\cos^2 \omega = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad \sin^2 \omega = \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

wonach die Gleichung (135) in die folgende übergeht:

$$(x^2-y^2)z \pm (k^0-k_0)xy = 0. \tag{142}$$

Diese Gleichung stellt diejenige Linienfläche dar, die von den Axen der Complexe der zweigliedrigen Gruppe, durch welche die Congruenz bestimmt ist, gebildet wird.

Je nachdem wir in der vorstehenden Gleichung das eine oder das andere der beiden Vorzeichen nehmen, bezieht sie sich auf die gegebene oder die dieser conjugirte Congruenz. Soll sie sich auf die gegebene beziehen, so muss, der gemachten Coordinaten-Bestimmung gemäss, nach welcher (k^0-k_0) positiv ist, wenn wir $\frac{y}{x}$ gleich der Tangente des Winkels ϑ, also positiv, nehmen, auch der Werth von z positiv, $= +\varDelta$, werden. Wir müssen also das untere Zeichen wählen und erhalten:

$$(x^2+y^2)z - (k^0-k_0)xy = 0. \tag{143}$$

Die einzige Constante, welche in dieser Gleichung vorkommt, (k^0-k_0), ist die Summe der absoluten Werthe der Parameter der Central-Complexe. Diese Summe ist aber auch (140) das Doppelte des Maximum von z, also gleich der Höhe h der Fläche, die von zwei Ebenen eingeschlossen ist, in deren Mitte die Central-Ebene hindurchgeht. Die Fläche wird von jeder zwischenliegenden Ebene in zwei geraden Linien geschnitten, welche in der Central-Ebene, indem sie mit den beiden Axen der Central-Complexe zusammenfallen, auf einander senkrecht stehen. Wenn sich die schneidende Ebene von der Central-Ebene nach der positiven Seite entfernt, wird der Winkel, welchen sie mit einander bilden, immer kleiner, bis er, in der einen Gränz-Ebene, für $\omega = \frac{\pi}{4}$, verschwindet, und demnach die beiden Linien in eine einzige zusammenfallen. Wenn sich die schneidende Ebene von der Central-Ebene nach der negativen Seite entfernt, wird der Winkel, den die beiden Durchschnittslinien mit einander bilden, ein stumpfer, bis derselbe in der anderen Gränz-Ebene, $\omega = -\frac{\pi}{4}$ entsprechend, gleich π wird und demnach die beiden Durchschnittslinien wieder zusammenfallen. Die Gleichung (135) zeigt, dass die Linien, welche den Winkel der beiden Durchschnittslinien in einer beliebigen, der Central-Ebene parallelen, Ebene halbiren, in denjenigen beiden Ebenen liegen, welche mit den Coordinaten-Ebenen XZ, YZ gleiche Winkel bilden.*)

Da die gegebene Congruenz von zwei Constanten k^0 und k_0, die fragliche Fläche aber nur von einer Constanten, der Differenz jener beiden, abhängt, so steht diese Fläche zu unendlich vielen Congruenzen in der gleichen Beziehung, dass sie der geometrische Ort der bezüglichen Complex-Axen ist. Unter diesen Congruenzen befindet sich auch die der gegebenen adjungirte; denn wir können k^0 und k_0 unter Zeichenwechsel vertauschen, ohne dass die Gleichung der Fläche sich ändert. Diese Fläche steht also in derselben Beziehung zu der gegebenen Congruenz und der ihr adjungirten.

87. Wir wollen die Complexe der zweigliedrigen Gruppe dadurch geometrisch bestimmen, dass wir auf den Axen derselben, welche sämmtlich OZ schneiden, von dieser Axe aus die entsprechenden Parameter unter Berücksichtigung des Vorzeichens, auftragen. Dann erhalten wir eine der in der vorigen Nummer betrachteten Linienfläche aufgeschriebene Curve, durch welche die ganze zweigliedrige Complexgruppe bestimmt wird. Wir wollen diese Curve die characteristische Curve der Congruenz nennen. Es genügt, die Projection dieser Curve auf die Coordinaten-Ebene XY zu kennen: jedem Puncte der Projection entspricht ein einziger reeller Punct der Fläche.

Die Gleichung (136) ist, in Polar-Coordinaten, die Gleichung dieser Projection, wenn wir in ihr k als Leitstrahl und gleichzeitig mit ω als veränderlich betrachten. Diese Gleichung geht, wenn wir:

$$k = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\omega = \frac{x}{k}, \quad \sin\omega = \frac{y}{k}$$

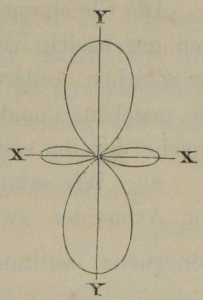
setzen, in die folgende über:

$$(x^2 + y^2)^3 = (k^0 x^2 + k_0 y^2)^2, \tag{144}$$

und stellt dann die projicirte Curve in gewöhnlichen Punct-Coordinaten dar. Diese Gleichung bleibt dieselbe, wenn wir die Zeichen von k^0 und k_0 gleichzeitig ändern. Die durch die Gleichung dargestellte Curve steht also in gleicher Beziehung zu der gegebenen Congruenz und der ihr conjugirten.

*) Für die geometrische Anschauung bieten Modelle, die ich von dieser und ähnlichen Flächen habe anfertigen lassen, grosse Erleichterung.

Sie besteht, (Figur 7), aus vier paarweise gleichen Schleifen, die innerhalb der vier von den Projectionen der beiden Directricen gebildeten Scheitelwinkel liegen.



Figur 7.

88. Die Gleichung (137) liefert, wenn wir sie in derselben Weise behandeln, wie in der vorigen Nummer die Gleichung (136), eine neue Fläche, welche durch die eben bestimmte Curve doppelter Krümmung geht. Diese Gleichung formt sich in die folgende um:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + k^0 k_0)^2 = (k^0 + k_0)^2 (x^2 + y^2), \qquad (145)$$

und stellt eine Fläche vierter Ordnung dar. Diese Fläche ist eine Umdrehungsfläche, deren Axe OZ ist. Für die Meridian-Curve derselben in der Ebene XZ erhalten wir, indem wir y verschwinden lassen:

$$(x^2 + z^2 + k^0 k_0)^2 = (k^0 + k_0)^2 x^2,$$

und, wenn wir entwickeln:

$$z^2 + (x \pm \frac{k^0 + k_0}{2})^2 = (\frac{k^0 - k_0}{2})^2.$$

Diese Gleichung stellt ein System zweier Kreise dar, deren beiderseitiger Radius:

$$\tfrac{1}{2}(k^0 - k_0) = h \qquad (146)$$

ist, und deren Mittelpuncte auf der Axe OX von der Axe OZ nach entgegengesetzter Seite den Abstand:

$$-\tfrac{1}{2}(k^0 + k_0) = c \qquad (147)$$

haben. Die beiden Kreise schneiden sich auf OZ in denjenigen beiden Puncten, in welchen diese Axe von den beiden Directricen geschnitten wird.*)

Die neue Fläche wird also durch Umdrehen eines Kreises um die Axe der Congruenz erzeugt. Der Radius desselben ist gleich der halben Höhe der Linienfläche (142). Sein Mittelpunct liegt in der Central-Ebene und dessen Abstand von der Axe OZ ist dem Parameter desjenigen Complexes gleich, dessen Axe in die Begränzungs-Ebene der Linienfläche (142) fällt. Die Rotationsfläche liegt ganz zwischen denselben Ebenen und wird von jeder derselben nach dem Umfange eines Kreises berührt.

*) Wir können beiläufig bemerken, dass die Durchschnittspuncte der beiden Directricen mit der Axe der Congruenz die beiden Brennpuncte eines Rotations-Ellipsoids sind, dessen Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Congruenz zusammenfällt, dessen Rotationsaxe in OZ liegt und gleich h ist, während der Radius seines Aequatorialkreises den Werth c hat.

Die Gleichung (145) bleibt ungeändert dieselbe, sowohl wenn k^0 und k_0 sich gegenseitig vertauschen, als auch, wenn beide Constanten gleichzeitig ihr Zeichen ändern. Die Rotationsfläche bezieht sich also gleichzeitig auf die gegebene Congruenz, die ihr conjugirte, die ihr adjungirte und diejenige, welche der ihr conjugirten adjungirt ist.

89. Wir erhalten, wenn wir zusammenfassen, die folgende Bestimmung der Axen der zweigliedrigen Complexgruppe, durch welche die gegebene Congruenz bestimmt wird. Wir haben vorausgesetzt, dass $\vartheta < \frac{\pi}{4}$. Wir wollen von dem Werthe $\omega = 0$ ausgehen, wo die Complexaxe in der Centralebene liegt und der Complex-Parameter sein positives Maximum k^0 erreicht. Wenn ω von 0 bis $+\vartheta$ wächst, entfernt sich die Complexaxe von der Centralebene auf der positiven Seite derselben, während der Complex-Parameter abnimmt. Wenn ω durch ϑ hindurch bis $\frac{\pi}{4}$ wächst, wächst z, der Abstand von der Centralebene, durch $\varDelta$ hindurchgehend, wo die Complexaxe mit einer Directrix der Congruenz zusammenfällt, bis er sein Maximum $\frac{1}{2}(k^0 - k_0) \equiv h$ erreicht, während der Complex-Parameter, durch Null hindurchgehend, negative Werthe erhält und an der Gränze gleich $\frac{1}{2}(k^0 + k_0) \equiv c$ wird. Fährt die Complexaxe fort, sich um OZ zu drehen, von $\omega = \frac{\pi}{4}$ bis $\omega = \frac{\pi}{2}$, so nähert sich dieselbe wieder der Centralebene, während der negative Werth des Complex-Parameters wächst, bis er in dieser Ebene das Maximum k_0 erreicht. Dauert die Drehung von $\omega = \frac{\pi}{2}$ bis $\omega = \frac{3\pi}{4}$ fort, so entfernt sich die Axe wieder von der Centralebene auf der negativen Seite derselben, bis an der Grenze z sein negatives Maximum $(-h)$ erreicht, während der negative Werth des Complex-Parameters abnimmt und an der Gränze den Werth c erhält. Bei der Drehung von $\omega = \frac{3\pi}{4}$ bis $\omega = \pi - \vartheta$ nähert sich die Axe wieder der Centralebene, bis sie, $z = -\varDelta$ entsprechend, mit der zweiten Directrix der Congruenz zusammenfällt, während der negative Complex-Parameter bis zum Verschwinden abnimmt. Vollendet die Axe ihre Drehung um OZ, indem ω von $(\pi - \vartheta)$ bis π wächst, so nähert sie sich wieder der Centralebene, bis sie wieder die Lage annimmt, von der wir ausgegangen sind, während der Complex-Parameter, der sein Zeichen geändert, wächst und in der Centralebene wiederum sein positives Maximum erreicht.

90. Um vollständige Symmetrie in diesen Untersuchungen zu erzielen, müssen wir die gegebene Congruenz gleichzeitig mit den genannten drei anderen betrachten, die unmittelbar von ihr abhängen. Das fordert zunächst, dass wir auf die beiden Linienflächen Rücksicht nehmen, welche, bei dem doppelten Vorzeichen, durch die Gleichung (142) bestimmt werden. Das System dieser beiden Flächen können wir durch die einzige Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 z^2 = (k^0 - k_0)^2 x^2 y^2 \tag{148}$$

darstellen.

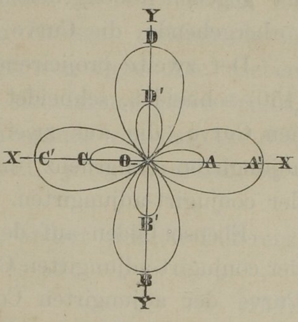
Der vollständige Durchschnitt der Rotationsfläche (145) mit den beiden Linienflächen zerfällt in zwei algebraische Raumcurven, von denen eine auf jeder dieser beiden Flächen liegt. Die Projectionen der beiden räumlichen Durchschnitts-Curven auf die Centralebene decken sich und lösen sich dabei in zwei Curven sechsten Grades auf, von welchen eine durch die frühere Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^3 = (k^0 x^2 + k_0 y^2)^2, \tag{149}$$

die andere durch die folgende:

$$(x^2 + y^2)^3 = (k_0 x^2 + k^0 y^2)^2 \tag{150}$$

dargestellt wird. In der bisherigen Voraussetzung reeller Directricen besteht jede der beiden Curven (Figur 8) aus vier Schleifen, die im Anfangspuncte der Coordinaten einen vierfachen Punct bilden. Wenn man eine der beiden Curven in ihrer Ebene um den Anfangspunct durch einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ dreht, so erhält man die andere.



Figur 8.

Die characteristische Curve der gegebenen Congruenz liegt auf der ersten Linienfläche (142), bildet aber auf derselben keinen vollständigen, in sich abgeschlossenen Zug. Die Projection derselben auf die Centralebene der Congruenz bildet nur die eine Hälfte $AOBOC$ der Curve (149). Sie ist durch zwei Puncte begränzt, die auf OX auf beiden Seiten des Anfangspunctes in gleichem Abstande von demselben liegen.

Die characteristische Curve der adjungirten Congruenz liegt auf derselben Linienfläche, ihre Projection ist die eine Hälfte $A'OB'OC'$ der Curve (150). Sie bricht, analog wie die vorige, in zwei Puncten von OX ab.

Die characteristische Curve der conjugirten Congruenz liegt auf der zweiten Linienfläche (142). Ihre Projection bildet die eine Hälfte $CODOA$ der Curve (149), welche die Projection der characteristischen Curve der gegebenen Congruenz zu der vollständigen Curve (149) ergänzt. Die beiden characteristischen Curven brechen auf OX in denselben beiden Puncten A und D ab.

Die characteristische Curve der conjugirt-adjungirten Congruenz liegt auf der zweiten Linienfläche und ihre Projection bildet die zweite Hälfte $C'OD'OA'$ der Curve (150), welche die Projection der characteristischen Curve der adjungirten Congruenz zu der vollständigen algebraischen Curve ergänzt.

Der projicirende Cylinder, der die Centralebene in der Curve (149) schneidet, schneidet die erste Linienfläche in einer in sich geschlossenen Curve, die aus zwei Theilen besteht, der characteristischen Curve der gegebenen Congruenz und dem Spiegelbilde der characteristischen Curve der conjugirten Congruenz, genommen in Beziehung auf die Centralebene.

Ebenso bilden auf der zweiten Linienfläche die characteristische Curve der conjugirten Congruenz und das Spiegelbild der characteristischen Curve der gegebenen Congruenz eine in sich geschlossene Curve, welche, wie die vorhergehende, die Curve (149) zur Projection hat.

Der zweite projicirende Cylinder, welcher die Centralebene in der Curve (150) schneidet, schneidet die erste Linienfläche in einer in sich geschlossenen Curve, die aus zwei Theilen besteht, der characteristischen Curve der adjungirten Congruenz und dem Spiegelbilde der characteristischen Curve der conjugirt-adjungirten.

Ebenso bilden auf der zweiten Linienfläche die characteristische Curve der conjugirt-adjungirten Congruenz und das Spiegelbild der characteristischen Curve der adjungirten Congruenz eine in sich geschlossene Curve, welche, wie die vorhergehende, die Curve (150) zur Projection hat.

Die so bestimmten vier in sich geschlossenen Curven bilden den vollständigen reellen Theil algebraischer Raumcurven. Jede derselben hat zwei Doppelpuncte, die auf der gemeinschaftlichen Axe der vier Congruenzen in diejenigen beiden Puncte fallen, in welchen diese Axe von den Directricen der Congruenzen geschnitten werden. In diesen beiden Puncten wird jede Raumcurve in vier Zweige getheilt, sodass wir im Ganzen sechszehn solcher Curvenzweige erhalten, welche sämmtlich in den beiden Puncten der Axe auslaufen. Die acht Curvenzweige auf der einen Linienfläche haben mit den acht Curvenzweigen auf der zweiten Linienfläche die acht Schleifen der beiden Curven (149) und (150) zur gemeinschaftlichen Projection. Diejenigen Curvenzweige, welche die grossen Schleifen zur Projection haben, schneiden die Gränzlinien der beiden Linienflächen in Puncten, die gleichen Abstand von der Axe haben; diejenigen Curvenzweige, deren Projectionen die kleineren Ovale sind, schneiden die Axe nicht.

Die vier in sich geschlossenen Curven liegen vollständig auf der durch die Gleichung (145) dargestellten Rotationsfläche.

91. Gehen wir von einer gegebenen Linienfläche (143) aus, so können wir auf ihr die characteristischen Curven unendlich vieler Congruenzen auftragen. Jede dieser Curven ist durch den Durchschnitt mit einer Rotationsfläche bestimmt, welche mit der Linienfläche zwischen denselben Gränzebenen eingeschlossen ist. Diese Gränzebenen berühren die Linienfläche je in einer geraden Linie, die Rotationsfläche je in einem Kreise. Die Richtungen der beiden Berührungslinien, welche die Axe OZ schneiden, stehen auf einander senkrecht; die beiden Berührungskreise haben ihren Mittelpunct auf der Axe und ihre Radien sind einander gleich. Die einzelne Rotationsfläche ist durch diesen Radius vollkommen bestimmt. Dieser Radius ist gleich dem Abstande des Mittelpunctes desjenigen Kreises, welcher durch seine Umdrehung um OZ die Rotationsfläche erzeugt, von dieser Axe. Geben wir dem Mittelpuncte dieses Kreises, dessen Radius sich immer gleich bleibt, in der Centralebene nach einander alle möglichen Abstände von der Axe OZ, so erhalten wir alle möglichen Rotationsflächen und, jeder derselben entsprechend, eine Congruenz.

Wenn wir die frühere Bezeichnung beibehalten, ändert sich die Differenz der Parameter der beiden Central-Complexe nicht, es ist:

$$k^0 - k_0 = 2h, \tag{151}$$

während die Summe dieser Constanten von einer Congruenz zur andern sich so ändert, dass

$$k^0 + k_0 = -2c. \tag{152}$$

Hiernach ist:

$$k^0 = h - c, \qquad k_0 = -(h + c), \tag{153}$$

$$\Delta^2 = -k^0 k_0 = h^2 - c^2, \tag{154}$$

$$\operatorname{tang}^2 \vartheta = -\frac{k^0}{k_0} = \frac{h - c}{h + c}. \tag{155}$$

Wenn wir also für die Constante c, durch welche die jedesmalige Rotationsfläche bestimmt ist, nach einander alle möglichen positiven Werthe nehmen, so entspricht jedem Werthe dieser Constanten auf der gegebenen Linienfläche eine characteristische Curve. Die den jedesmaligen adjungirten Congruenzen entsprechenden Curven besitzen dieselben absoluten, aber mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen Werthe von c.

92. Wenn $c = 0$, so kommt:

$$k^0 = -k_0 = h = \Delta, \qquad \operatorname{tang}^2 \vartheta = 1. \tag{156}$$

Dann liegen die beiden Directricen in den Ebenen, welche die Linienfläche begränzen und haben den grösstmöglichsten Abstand von der Centralebene. Ihre beiden Richtungen stehen auf einander senkrecht und sind für die beiden adjungirten Congruenzen dieselben. Die Gleichung der Rotationsfläche wird in diesem Falle:

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2. \tag{157}$$

Wenn c wächst, nimmt der absolute Werth des negativen k_0 zu, des positiven k^0 ab. Dann nimmt der Abstand der beiden Directricen von der Centralebene ab und der Winkel, welchen die beiden Richtungen derselben mit einander bilden, entfernen sich immer mehr von rechten Winkeln. Innerhalb der Gränzen $2h$ und 0 können wir den Abstand der beiden Directricen einer Congruenz von einander beliebig annehmen. Der die Rotationsfläche erzeugende Kreis schneidet alsdann die Rotationsaxe in zwei reellen Puncten.

An der Gränze $c = h$ ist:

$$k^0 = 0, \qquad k_0 = -2h, \qquad \Delta = 0, \qquad \operatorname{tang} \vartheta = 0. \tag{158}$$

Der Parameter eines der beiden Central-Complexe ist gleich Null. Die beiden Directricen der Congruenz fallen in der Axe OX zusammen. Der die Rotationsfläche erzeugende Kreis berührt die Rotationsaxe OZ in dem Anfangspuncte der Coordinaten O. Die Gleichung der Rotationsfläche wird:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = h^2 (x^2 + y^2). \tag{159}$$

Die characteristische Curve bestimmt nach wie vor die Parameter und die Axenlagen unendlich vieler Complexe. Dies ist der erste in Nr. 68. behandelte Fall.

Wenn $c > h$, wird k^0 negativ, wie es k_0 ist. Die beiden Directricen der Congruenz, wie ihrer adjungirten, werden imaginär; weder ihre Richtung, noch ihr Durchschnitt mit OZ bleibt reell. Die Rotationsfläche bildet, während der erzeugende Kreis die Axe OZ nicht schneidet, einen vollständigen

Ring, ihre Durchschnittscurve mit der Linienfläche zieht sich um diese Axe, ohne dieselbe zu schneiden.

Wenn der absolute Werth des negativ gewordenen k^0 wächst, nimmt c, die Entfernung des Mittelpunctes des erzeugenden Kreises, immer mehr zu, während das Verhältniss der beiden Parameter der Central-Complexe der Congruenz sich der Einheit nähert. An der Gränze ist:

$$\operatorname{tang}^2 \vartheta = -1. \tag{160}$$

93. Ein ungemein einfaches Verfahren, die characteristischen Curven der sämmtlichen Congruenzen auf die gegebene Linienfläche aufzutragen, können wir der Gleichung:

$$z^2 + (k - k^0)(k - k_0) = 0 \tag{137}$$

entnehmen. Beim Uebergange von einer characteristischen Curve zur anderen wachsen die beiden Constanten k^0 und k_0 um dieselbe Grösse. Hierbei wird, welches auch der Werth von z sein mag, die vorstehende Gleichung immer befriedigt, wenn die Veränderliche k denselben Zuwachs erhält.

Es sei hiernach irgend eine der Linienfläche aufgeschriebene, characteristische Curve gegeben; und für diese können wir insbesondere diejenige nehmen, nach welcher die Linienfläche von einer Kugel geschnitten wird, die die Höhe derselben zu ihrem Durchmesser und den Mittelpunct derselben auch zu dem ihrigen hat. Dann erhalten wir nach einander alle characteristischen Curven, wenn wir alle Durchschnittspuncte der gegebenen Curve mit den Erzeugenden der Linienfläche auf diesen Erzeugenden der Axe um ein constantes Stück sich nähern oder von ihr sich entfernen lassen.

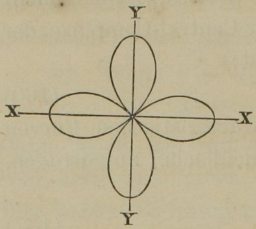
Zu derselben Construction gelangen wir auf geometrischem Wege, wenn wir erwägen, dass eine characteristische Curve der geometrische Ort derjenigen Puncte ist, in welchen die Erzeugenden der Fläche von dem die Rotationsfläche beschreibenden Kreise geschnitten werden, und dass von einer characteristischen Curve zur anderen der Mittelpunct dieses Kreises, dessen Ebene durch OZ geht, der Axe OZ sich nähert oder von ihr sich entfernt.

94. Wenn wir die characteristische Curve zweier conjugirten Congruenzen für den Fall, dass die Rotationsfläche mit einer Kugeloberfläche zusammenfällt, auf die Central-Ebene projiciren, so erhalten wir für die Projection die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^3 = h^2 (x^2 - y^2)^2. \tag{161}$$

Die projicirte Curve hat, wie die allgemeinen Curven (149) oder (150), im

Anfangspuncte einen vierfachen Punct; die vier Schleifen, aus denen sie besteht, sind gleich. Bei unserer Annahme fallen die beiden Curven (149) und (150) in die eine (161) zusammen (Figur 9).



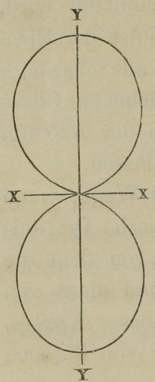
Figur 9.

An dem zweiten Uebergange (Figur 10), wo die beiden Directricen in OX zusammenfallen, gehen die beiden Gleichungen (149) und (150) in die folgenden über:

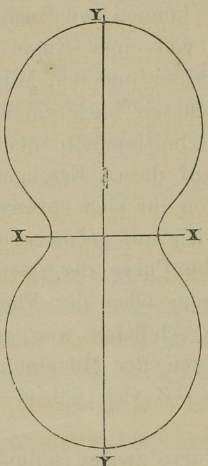
$$(x^2 + y^2)^3 = 4h^2y^4, \tag{162}$$

$$(x^2 + y^2)^3 = 4h^2x^4. \tag{163}$$

Wenn der Werth von ϑ, dem entsprechend, dass c bis $\pm h$ wächst, sich allmählich von $\frac{\pi}{4}$ entfernt, indem er einmal bis zum Verschwinden abnimmt, das andere Mal sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, verschwinden allmählich zwei Schleifen der Curve (161), indem die Puncte, in welchen einmal die Axe OX, das andere Mal die Axe OY von denselben geschnitten wird, dem Puncte O immer näher rücken, während zugleich ihre in O sich schneidenden Tangenten immer mehr sich der bezüglichen Coordinaten-Axe nähern und an der Gränze mit derselben zusammenfallen. Dann besteht die Curve aus zwei gleichen Ovalen, welche eine der beiden Nebenaxen auf entgegengesetzter Seite berühren.



Figur 10.



Figur 11.

Wenn endlich c über h hinauswächst und ϑ imaginär wird, zieht sich dieselbe um den Anfangspunct O herum, in welchem nunmehr 4 isolirte Punkte derselben zusammenfallen (Figur 11).

Die Curven, welche überhaupt durch jede der beiden Gleichungen (149) und (150) bei verschiedener Annahme der Constanten dargestellt werden, ergeben sich, wie die räumlichen Curven, deren Projectionen sie sind, sämmtlich, wenn eine derselben gegeben ist. Wenn wir in der Gleichung:

$$k = k^0 \cos^2\omega + k_0 \sin^2\omega \tag{136}$$

k als Leitstrahl betrachten, so ist diese Gleichung die Gleichung in Polar-Coordinaten derselben Curve, die wir früher durch die Gleichung (149) dargestellt haben. Durch bestimmte Werthe von k^0 und k_0 ist eine dieser Curven gegeben, und wir erhalten alle übrigen, wenn wir diese Constanten um dieselbe Grösse δ wachsen lassen. Dann aber kommt:

$$k + \delta = (k^0 + \delta)\cos^2\omega + (k_0 + \delta)\sin^2\omega, \tag{164}$$

d. h. von einer Curve zur andern wachsen alle Leitstrahlen um δ.

Die Gleichung der Curve (162) wird in Polar-Coordinaten:

$$k = 2h \sin^2\omega, \tag{165}$$

wonach diese Curve auf ausserordentlich einfache Weise mit Hülfe eines Kreises mit dem Durchmesser $2h$ construirt werden kann. Damit ist also die Construction aller Curven (149) und (150) gegeben.

95. Es ist die Discussion der Complexe einer zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

für denjenigen Fall noch rückständig, dass durch diese Gruppe eine parabolische Congruenz bestimmt wird. Zur Bestimmung einer solchen Congruenz ist es hinreichend, ihre einzige Directrix und eine Ebene zu kennen, welcher alle Linien derselben parallel sind. Wir wollen die Directrix als Coordinaten-Axe OX nehmen. Dann befindet sich unter den Complexen der Gruppe einer, dessen Gleichung ist:

$$\sigma = 0. \tag{166}$$

Wir wollen ferner die Coordinaten-Ebene ZX durch OX so legen, dass sie auf der Ebene, der alle Linien der Congruenz parallel sind, senkrecht steht. Dann können wir der Gleichung dieser Ebene die folgende Form geben:

$$x + \lambda z = 0, \tag{167}$$

wobei λ eine gegebene Constante bedeutet. Hiernach erhalten wir:

$$r + \lambda = 0, \tag{168}$$

um einen Complex auszudrücken, der aus Linien besteht, die alle der fraglichen Ebene parallel sind, dem also ebenfalls die Congruenz angehört.

Indem wir die beiden so bestimmten Complexe für Ω und Ω' nehmen, erhalten wir für die Gleichung der Gruppe:

$$\sigma + \mu(r + \lambda) = 0. \tag{169}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass alle Linien der parabolischen Congruenz die Axe OX schneiden und der Ebene (167) parallel sind.

Die Axen der verschiedenen Complexe, welche die parabolische Congruenz bilden, liegen sämmtlich in der Ebene XY und schneiden in dieser Ebene (Nr. 31.) von der Axe OY ein Stück

$$y = -\mu\lambda \tag{170}$$

ab. Der bezügliche Parameter ist:

$$k = -\mu, \tag{171}$$

und hiernach:

$$y = \lambda k \tag{172}$$

die Gleichung der characteristischen Curve der parabolischen Congruenz. Diese Gleichung stellt, wenn wir k von OY aus auf die Complex-Axen, also als x, auftragen, eine gerade Linie in XY dar, welche mit OX denselben Winkel bildet, wie die Ebene (167) mit der Coordinaten-Ebene YZ.

96. Im Anschluss an die geometrischen Betrachtungen der 79. Nummer lassen wir, analog wie es in der 46. Nummer für einen einzelnen Complex geschehen ist, noch einige analytische Entwickelungen folgen, die bezwecken, die Gleichung einer Congruenz auch in schiefwinkligen Coordinaten auf ihren einfachsten Ausdruck zu führen. Es seien:

$$\sigma - k^0 r = 0, \qquad \varrho + k_0 s = 0 \tag{173}$$

die beiden Central-Complexe, durch welche eine Congruenz in rechtwinkligen Coordinaten bestimmt wird. Wir wollen den Anfangspunct in der Central-Ebene in einen beliebigen Punct (x^0, y^0) verlegen. Verschieben wir zu diesem Ende das Coordinaten-System parallel mit sich selbst zuerst in der Richtung von OY um ein Stück y^0, so bleibt die Gleichung des zweiten Complexes, der OY zur Axe hat, unverändert, während die Gleichung des ersten Complexes in die folgende übergeht:

$$\sigma - \frac{k^0}{\sin\delta^0} \cdot r = 0, \tag{174}$$

wobei

$$y^0 \sin\delta^0 - k^0 \cos\delta^0 = 0. \tag{175}$$

Durch diese Verschiebung ist die Axe OX ein Durchmesser der ersten Congruenz geblieben. Dadurch, dass wir die Axe OZ in der Ebene XZ um OY so drehen, dass OX mit OZ in der neuen Lage den Winkel δ^0 bildet, wird YZ die dem Durchmesser OX zugeordnete Ebene und δ^0 ist der Neigungswinkel des Durchmessers gegen seine zugeordnete Ebene. Der Winkel YOZ ist ein rechter geblieben.

Wenn wir hiernach das Axen-System parallel mit OX um eine Strecke x_0 verschieben, so bleibt die Gleichung des ersten Complexes (173) unverändert, während die Gleichung des zweiten Complexes in die folgende übergeht:

$$\varrho + \frac{k_0}{\sin \delta_0} \cdot s = 0, \tag{176}$$

wobei

$$x_0 \sin \delta_0 + k_0 \cos \delta_0 = 0. \tag{177}$$

Der Winkel δ_0 ist hier der Neigungs-Winkel von OY gegen XZ, also des in OY fallenden Durchmessers des Complexes gegen seine zugeordnete Ebene. Der Winkel XOZ ist ein rechter geblieben.

Die Gleichungen der beiden Ebenen, welche in den beiden Complexen OX, dem Durchmesser des ersten, und OY, dem Durchmesser des zweiten Complexes, zugeordnet sind, haben zu Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{cotg} \delta^0 \cdot z, \\ y = \operatorname{cotg} \delta_0 \cdot z. \end{array}\right\} \tag{178}$$

Nehmen wir endlich für die Axe OZ die Durchschnittslinie der beiden zugeordneten Ebenen, so sind in der analytischen Darstellung die beiden Axen in den OX und OY conjugirten Ebenen YZ und XZ nicht mehr auf einander senkrecht. Bezeichnen wir die Winkel YOZ und XOZ durch ε^0 und ε_0, so ist:

$$\sin \delta^0 \sin \varepsilon^0 = \sin \delta_0 \sin \varepsilon_0 = \sin \delta, \tag{179}$$

indem wir durch δ den Neigungs-Winkel der neuen Axe OZ gegen XY bezeichnen.

Nehmen wir also für OX und OY, indem wir die ursprünglichen Coordinaten-Axen parallel mit sich verschieben, statt der beiden Axen der Central-Complexe irgend zwei Durchmesser derselben und für OZ den Durchschnitt zweier Ebenen, die diesen Durchmessern zugeordnet sind, so werden die Gleichungen dieser Complexe:

$$\sigma - \frac{k^0}{\sin \delta} \cdot r = 0, \qquad \varrho + \frac{k_0}{\sin \delta} \cdot s = 0, \tag{180}$$

und dieselbe Congruenz, die früher durch die Gleichung:

$$(\sigma - k^0 r) + \mu (\varrho + k_0 s) = 0$$

bestimmt wurde, bestimmt sich nun durch die Gleichung von ganz gleicher Form:

$$\left(\sigma - \frac{k^0}{\sin \delta} \cdot r\right) + \mu \left(\varrho + \frac{k_0}{\sin \delta} \cdot s\right) = 0 \tag{181}$$

in dem neuen Coordinaten-Systeme.

97. Eliminiren wir mittelst (175) und (177) aus (178) cotg δ^0 und cotg δ_0, so kommt:

$$\frac{y}{x} = -\frac{k^0 x_0}{k_0 y^0},$$

oder

$$\operatorname{tang} \alpha \cdot \operatorname{tang} \alpha' = -\frac{k^0}{k_0}, \tag{182}$$

wenn α und α' die Winkel sind, welche einerseits die Linie, welche den neuen Anfangspunct mit dem alten verbindet, und andererseits die Projection des neuen Hauptdurchmessers der Congruenz mit der Axe OX bilden. Wenn insbesondere $k^0 = k_0$, stehen die beiden Linien für jede Aenderung des Anfangspunctes auf einander senkrecht.

Wir haben:

$$\sin^2 \delta = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 \delta^0 + \operatorname{cotg}^2 \delta_0},$$

mithin:

$$\frac{1}{\sin^2 \delta} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \delta^0 + \operatorname{cotg}^2 \delta_0,$$

und nach Berücksichtigung von (175) und (177):

$$\frac{x_0^2}{k_0^2} + \frac{y^{0\,2}}{k^{0\,2}} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \delta}, \tag{183}$$

oder:

$$k^{0\,2} x_0^2 + k_0^2 y^{0\,2} = \Delta^4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \delta}. \tag{184}$$

Es folgt hieraus, dass δ constant ist, wenn der neue Anfangspunct in der Central-Ebene auf einer Ellipse angenommen wird, deren in OX und OY fallende Axen sich wie k_0 zu k^0 verhalten.

Diejenigen Hauptdurchmesser einer Congruenz, welche gleich gegen die Central-Ebene geneigt sind, schneiden diese Ebene in den Puncten einer Ellipse.

98. Durch zwei imaginäre Complexe ist eine imaginäre Congruenz gegeben. Wir wollen, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, die Gleichung:

$$(\sigma - k_1 r \sqrt{-1}) + \mu (\varrho + k_2 s \sqrt{-1}) = 0 \tag{185}$$

für das Symbol einer solchen Congruenz nehmen. Diese Gleichung geht, wenn wir gleichzeitig das Zeichen von k_1 und k_2 ändern, in die folgende über:

$$(\sigma + k_1 r \sqrt{-1}) + \mu (s - k_2 s \sqrt{-1}) = 0. \tag{186}$$

Sie bezieht sich dann noch auf eine zweite immaginäre Congruenz. Die beiden Congruenzen bezeichnen wir, nach Analogie mit dem Früheren, als zwei conjugirte imaginäre Congruenzen. Die Gleichungen der beiden Congruenzen können in die folgende quadratische Gleichung zusammengezogen werden:

$$(\sigma + \mu\varrho)^2 + (k_1 r - \mu k_2 s)^2 = 0. \tag{187}$$

Die beiden Central-Complexe beider Congruenzen sind:

$$\sigma \mp k_1 r \sqrt{-1} = 0, \qquad \varrho \pm k_2 s \sqrt{-1} = 0.$$

Die beiden Congruenzen haben eine reelle gemeinschaftliche Hauptaxe und zwei gemeinschaftliche reelle Nebenaxen. Für beide ist der Abstand der beiden Directricen von einander und der Winkel, den die beiden Directricen bilden, gleich. Wenn wir jenen Abstand $\varDelta$ und diesen Winkel ϑ nennen, so haben wir nach der 82. Nummer:

$$\left.\begin{aligned} k_1 k_2 &= \quad \varDelta^2 \\ \frac{k_1}{k_2} &= -\operatorname{tang}^2 \vartheta \end{aligned}\right\} \tag{188}$$

Wenn k_1 und k im Zeichen übereinstimmen, ist $\varDelta$ reell und tang ϑ imaginär. Dann schneiden die beiden Directricen der einen Congrunenz die beiden Directricen der andern in zwei reellen Puncten der Axe OZ. Die Richtungen der beiden Directricen sind imaginär. Projicirt auf XY werden sie durch die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{k_1} \cdot x \pm \sqrt{-k_2} \cdot y = 0,$$

die in die folgende sich zusammenziehen lassen:

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = 0,$$

dargestellt.

Wenn k_1 und k_2 entgegengesetzte Zeichen haben, wird $\varDelta$ imaginär und tang ϑ bleibt reell. Dann ist die Projection der beiden Directricen auf XY reell, aber die Puncte, in welchen die Axe OZ von denselben geschnitten wird, sind imaginär.

Wenn wir zusammenfassen, sind wir einer vierfachen Unterscheidung von Congruenzen begegnet:

1. Die beiden Directricen sind reell;

2. die beiden Directricen sind imaginär und zwar so, dass sie weder durch einen reellen Punct gehen, noch eine reelle Richtung haben;

3. die beiden Directricen sind imaginär, schneiden aber die Axe der Congruenz in zwei reellen Puncten, durch welche auch die beiden Directricen der conjugirten Congruenz gehen;

4. die beiden Directricen sind imaginär und gehen durch keinen reellen Punct der Axe der Congruenz, haben aber eine reelle Richtung.

In den beiden ersten Fällen sind die Complexe der zweigliedrigen Gruppe, welche die Congruenz bestimmen, reell, in den beiden letzten Fällen imaginär.

§ 3.

Congruenzen dreier linearer Complexe. Linienflächen.

99. Es seien:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho + F'\eta = 0, \\ \Omega'' &\equiv A''r + B''s + C'' - D''\sigma + E''\varrho + F''\eta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die allgemeinen Gleichungen dreier gegebener Complexe des ersten Grades. Die geraden Linien, deren Coordinaten diese drei Gleichungen befriedigen, gehören gleichzeitig den drei gegebenen Complexen an. Sie gehören gleichzeitig allen Complexen der dreigliedrigen Gruppe an, welche, indem wir durch μ und μ' zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, durch die folgende Gleichung dargestellt wird:

$$\Omega + \mu\Omega' + \mu'\Omega'' = 0. \qquad (2)$$

Solche Linien bilden nach der 22. Nummer eine Fläche der zweiten Ordnung und Classe, also, wenn wir zunächst nur reelle gerade Linien in's Auge fassen, ein einschaliges Hyperboloid, das auch in ein hyperbolisches Paraboloid ausarten kann. Wir müssen hierbei indess nicht übersehen, dass nur die Linien der einen der beiden Erzeugungen desselben durch die Complex-Gruppe bestimmt werden. Diese Erzeugung wollen wir als die erste Erzeugung der Fläche bezeichnen.

100. Drei aus der dreigliedrigen Gruppe beliebig auszuwählende Complexe Ω, Ω', Ω'' bilden, paarweise genommen, drei Congruenzen $(\Omega\Omega')$, $(\Omega\Omega'')$ und $(\Omega'\Omega'')$. Die Linien der Fläche gehören also auch diesen drei Congruenzen an und schneiden folglich die beiden Directricen jeder der drei Congruenzen. Zur Bestimmung der Fläche sind drei der sechs Directricen hinreichend, wonach wir die gewöhnliche Construction des Hyperboloids erhalten. Aber zugleich begegnen wir neben dieser ersten Erzeugung der Fläche ihrer zweiten Erzeugung. Die Linien der ersten Erzeugung sind diejenigen, welche sämmtlichen Complexen der dreigliedrigen Gruppe angehören, die Linien der zweiten