Die Linien-Complexe des ersten Grades und ihre Congruenzen.

§ 1.

Die Linien-Complexe ersten Grades.

26. Wenn wir für die allgemeine homogene Gleichung des ersten Grades zwischen den sechs Strahlen-Coordinaten:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y) \tag{1}$$

die folgenden nehmen:

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D(yz'-y'z)+E(x'z-xz')+F(xy'-x'y)=0; \tag{2}$$

um einen Complex ersten Grades darzustellen, so erhalten wir gleichzeitig zur Darstellung desselben Complexes zwischen den Axen-Coordinaten:

$$(t-t'),\ (u-u'),\ (v-v'),\ (uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u) \tag{3}$$

die folgende Gleichung:

$$D(t-t')+E(u-u')+F(v-v')+A(uv'-u'v)+B(t'v-tv')+C(tu'-t'u)=0. \tag{4}$$

Um von einer dieser beiden Gleichungen zu der anderen überzugehen, haben wir bloss die Punct-Coordinaten $x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'$ mit den Plan-Coordinaten $t,\ u,\ v,\ t',\ u',\ v'$ und zugleich $A,\ B,\ C$ mit $D,\ E,\ F$ gegenseitig zu vertauschen.

Wenn wir statt der sechs Coordinaten (1) und (3) bezüglich die fünf Coordinaten:

$$r,\ s,\ \sigma,\ \varrho,\ \eta \tag{5}$$

und

$$p,\ q,\ \varkappa,\ \pi,\ \omega \tag{6}$$

nehmen, gehen die Gleichungen (2) und (4) nach der 2. und 3. Nummer über in:

$$Ar+Bs+C-D\sigma+E\varrho+F\eta=0, \tag{7}$$

und

$$Dp + Eq + F - A\varkappa + B\pi + C\omega = 0.^{*)} \tag{8}$$

27. Wir können die beiden Gleichungen (3) und (4), welche denselben Complex darstellen, in folgender Weise entwickeln:

$$\begin{aligned} &(A + Fy' - Ez')\,x \\ &+ (B - Fx' + Dz')\,y \\ &+ (C + Ex' - Dy')\,z \\ &- (Ax' + By' + Cz') = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned} &(D + Cu' - Bv')\,t \\ &+ (E - Ct' + Av')\,u \\ &+ (F + Bt' - Au')\,v \\ &- (Dt' + Eu' + Fv') = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn erstens (x', y', z') ein gegebener Punct ist, und wir demnach in (9) x', y', z' als constant, x, y, z als veränderlich betrachten, so stellt diese Gleichung eine Ebene dar, den geometrischen Ort beliebiger Puncte solcher Strahlen, welcher durch den gegebenen Punct gehen, mit anderen Worten, den geometrischen Ort dieser Strahlen selbst. Die Gleichung wird befriedigt, wenn wir für die veränderlichen Grössen die Coordinaten des gegebenen Punctes einsetzen: die bezügliche Ebene geht durch diesen Punct. Jedem Puncte des Raumes entspricht demnach eine Ebene, welche alle durch diesen Punct gehende Linien des Complexes enthält.

Wenn wir zweitens in (10) t', u', v' auf eine gegebene Ebene (t', u', v') beziehen und demnach als constant betrachten, während t, u, v veränderlich bleiben, so stellt diese Gleichung in Plan-Coordinaten einen Punct dar, welcher von den in der gegebenen Ebene liegenden Axen des Complexes umhüllt

*) Wir können nicht vermeiden, in der analytischen Darstellung der geraden Linie eine der drei Coordinaten-Axen auszuzeichnen. Indem wir die Gleichungen (1) und (2) der einleitenden Betrachtung zu Grunde legten, haben wir OZ für diese Axe genommen und, damit in Beziehung auf diese Axe Alles symmetrisch werde, in den beiden Ebenen XZ und YZ von dieser Axe aus die Winkel gerechnet. Hiermit im Widerspruch ist die Art und Weise, wie in der Mechanik die Drehungsmomente in Beziehung auf die drei Coordinaten-Axen genommen werden.

Rücksichten auf die späteren Untersuchungen über Mechanik bestimmen uns, daran festzuhalten, durch die drei letzten Coordinaten (1) auch dem Zeichen nach die drei doppelten Momente darzustellen. Dadurch wird die gewünschte Symmetrie in Beziehung auf OZ aufgehoben. Um sie aber in den analytischen Untersuchungen über Complexe wieder herzustellen, in dem Falle, dass wir (7) und (8) für die allgemeinen Gleichungen nehmen, müssen wir das positive σ, und, dem entsprechend, das positive $\varkappa$ als Coordinaten betrachten, die Glieder aber, welche σ und $\varkappa$ in ungeraden Potenzen enthalten, mit dem negativen Zeichen einführen. Dem entsprechend kommen in den beiden Gleichungen (7) und (8) $D\sigma$ und $A\varkappa$ mit dem negativen Zeichen vor.

wird, das heisst, in welchem diese Axen sich schneiden. In jeder Ebene liegen also unendlich viele Linien des Complexes, welche in einem Puncte derselben sich vereinigen, von dem wir sagen, dass er der Ebene entspreche.

Durch jeden Punct des Raumes gehen unendlich viele Linien des Complexes, welche in einer durch diesen Punct gehenden Ebene liegen. In jeder den Raum durchziehenden Ebene liegen unendlich viele Linien des Complexes, welche in einem Puncte der Ebene sich schneiden.

Die beiden Theile des Satzes bedingen einander. Die Beziehung von Punct und Ebene ist eine gegenseitige. Es gibt für jeden beliebigen Punct des Raumes eine Ebene, welche die durch diesen Punct gehenden Linien des Complexes enthält, und, umgekehrt, für diese Ebene ist es wiederum jener Punct, in welchem alle Linien des Complexes, welche in dieser Ebene liegen, sich schneiden.

28. Die einem gegebenen Puncte entsprechende Ebene ist bestimmt durch irgend zwei in dem Puncte sich schneidende Linien des Complexes, der einer gegebenen Ebene entsprechende Punct durch zwei in der Ebene liegende Linien des Complexes.

Es seien P und P' zwei Puncte, durch welche sich die gerade Linie (PP') legen lässt, p und p' die beiden diesen Puncten entsprechenden Ebenen, welche sich in einer zweiten geraden Linie (pp') schneiden. Dann gehören alle Linien, die durch P oder P' gehen und die gerade Linie (pp') schneiden, dem Complexe an. Schneiden sich zwei Linien, die durch P und bezüglich durch P' gehen, in irgend einem Puncte von (pp'), so ist die Ebene, welche diese beiden geraden Linien enthält, die ihrem Durchschnittspuncte auf (pp') entsprechende Ebene, und diese Ebene geht durch (PP'). Ebenso ist denn auch bewiesen, dass nicht nur die den beiden Puncten P und P', sondern überhaupt die allen Puncten der geraden Linie (PP') entsprechenden Ebenen sich in der Linie (pp') schneiden. Wir nennen die beiden geraden Linien (PP') und (pp'), deren Beziehung zu einander eine gegenseitige ist, zwei conjugirte Polaren in Beziehung auf den Complex.

Jede Linie des Raumes hat ihre conjugirte Polare. Jede Linie des Raumes kann als Strahl betrachtet werden: wenn dieselbe durch einen Punct beschrieben wird, so umhüllen die diesem Puncte entsprechenden Ebenen eine Axe, die dem Strahle conjugirt ist. Jede Linie des Raumes kann als Axe betrachtet werden: während dieselbe von einer sich drehenden Ebene umhüllt wird, beschreibt der dieser Ebene entsprechende Punct einen Strahl, der der Axe conjugirt ist. Jede der zwei conjugirten Linien kann als Strahl und als Axe angesehen werden.

Jede gerade Linie, welche zwei conjugirte Polaren schneidet, ist eine Linie des Complexes.

Jede Linie des Complexes ist als zwei zusammenfallende conjugirte Linien anzusehen.

29. Ein Complex ist durch fünf seiner Linien vollkommen bestimmt. Jede der Linien liefert eine lineare Gleichung zur Bestimmung der fünf unabhängigen Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung. Vier der fünf Constanten können dadurch ersetzt werden, dass irgend zwei zugeordnete Polaren des Complexes gegeben sind. Weil nämlich jede gegebene gerade Linie nur eine zugeordnete hat, die sich in linearer Weise durch vier Constante bestimmt, so erhalten wir vier lineare Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten der allgemeinen Gleichung, wenn irgend zwei zugeordnete Polaren eines Complexes gegeben sind. Zwei gegebene zugeordnete Polaren eines Complexes sind also für die Bestimmung desselben äquivalent mit vier gegebenen seiner Linien, so dass der Complex vollkommen bestimmt ist, sobald wir, ausser den beiden zugeordneten Polaren, noch irgend eine Linie desselben kennen.

Hiernach ergibt sich eine einfache Construction eines Complexes, wenn irgend fünf seiner Linien gegeben sind. Wenn wir von diesen fünf Linien irgend vier beliebig auswählen, so sind die beiden geraden Linien, welche diese vier Linien schneiden, zwei zugeordnete Polaren des Complexes, und jede neue Linie, welche diese beiden zugeordneten Polaren schneidet, ist eine neue Linie des Complexes. Wenn wir die gegebenen fünf geraden Linien in anderer Weise zu je vier combiniren, erhalten wir neue Paare zugeordneter Polaren, und jedem Paare entsprechen unendlich viele neue Linien des Complexes. Und so können wir fortfahren, indem wir die gefundenen Linien mit hinzuziehen, um neue Combinationen zu je vier zu bilden. Hierbei dürfen wir nicht übersehen, dass vier reelle gerade Linien nicht immer von zwei reellen geraden Linien geschnitten werden, sondern dass diese beiden Linien auch imaginär sein können.*)

*) Drei der fünf gegebenen geraden Linien können immer als drei Linien einer der beiden Erzeugungen eines Hyperboloids angesehen werden. Wenn eine vierte Linie das Hyperboloid schneidet,

Wenn ein Complex durch fünf seiner Linien gegeben ist, können wir für jeden gegebenen Punct die entsprechende Ebene, für jede gegebene Ebene den entsprechenden Punct construiren. Durch je vier gegebene gerade Linien ist ein Paar zugeordneter Polaren des Complexes bestimmt. Durch einen gegebenen Punct lässt sich eine einzige Linie legen, welche die beiden Polaren jedes Paares schneidet. Die so bestimmten geraden Linien liegen in der dem Puncte entsprechenden Ebene, welche durch zwei derselben vollkommen bestimmt ist. Eine gegebene Ebene schneiden die beiden Polaren jedes Paares in zwei Puncten. Die geraden Linien, welche die beiden Durchschnittspuncte jedes Paares verbinden, schneiden sich in dem der Ebene entsprechenden Puncte, welcher durch zwei dieser Linien bestimmt ist.

Die vorstehenden Betrachtungen schliessen sich an die allgemeine Theorie der Reciprocität. Die Gleichungen des Complexes (2) und (4) können betrachtet werden als besondere Fälle der allgemeinen Gleichung in Punct-Coordinaten x, y, z, x', y', z', und in Plan-Coordinaten t, u, v, t', u', v', durch welche die Reciprocität zweier Systeme überhaupt ausgedrückt wird. Wenn diese Gleichungen in Beziehung auf x, y, z und x', y', z' und in Beziehung auf t, u, v und t' u', v' symmetrisch sind, so entspricht demselben Punct und derselben Ebene in jedem der beiden Systeme bezüglich dieselbe Polar-Ebene und derselbe Pol in dem anderen Systeme. Das findet in dem Falle der Complex-Gleichungen Statt. Aber es kommt die Bedingung hinzu, dass der Pol einer gegebenen Ebene in dieser Ebene selbst liege. Durch diese neue Bedingung wird es nicht mehr möglich, Pole und Polar-Ebenen in gewohnter Weise vermittelst Flächen zweiter Ordnung und Classe zu construiren.*) Während im Allgemeinen die Polar-Ebene eines Punctes

---

so lässt sich durch jeden der beiden Durchschnittspuncte eine Linie der zweiten Erzeugung des Hyperboloids legen, welche sämmtliche vier Linien schneidet. Wenn die beiden Durchschnittspuncte imaginär sind, sind es auch die entsprechenden beiden geraden Linien.

*) Der analytische Grund hiervon liegt in dem Folgenden. Im allgemeinen Falle ist die Grund-Gleichung der Reciprocität (wir beschränken uns hier auf den Fall von Punct-Coordinaten und machen die Gleichungen durch Einführung von τ homogen):

$$(ax'+by'+cz'+d\tau')x+(bx'+b_1y'+c_1z'+d_1\tau')y+(cx'+c_1y'+c_2z'+d_2\tau')z$$
$$+(dx'+d_1y'+d_2z'+d_3\tau')\tau=0.$$

Schreiben wir in dem ersten Theile dieser Gleichung x', y', z', τ' für x, y, z, τ, so wird dieselbe eine homogene Function des zweiten Grades:

$$\Pi \equiv ax'^2+2bx'y'+2cx'z'+2dx'\tau'+b_1y'^2+2c_1y'z'+2d_1y'\tau'+c_2z'^2+2d_2z'\tau'+d_3\tau'^2$$

Durch Vermittelung dieser Function können wir die Reciprocitätsgleichung in der nachstehenden Weise schreiben:

$$\frac{d\Pi}{dx'}\cdot x+\frac{d\Pi}{dy'}\cdot y+\frac{d\Pi}{dz'}\cdot z+\frac{d\Pi}{d\tau'}\cdot \tau=0.$$

durch drei ihrer Puncte, der Pol einer Ebene durch drei in demselben sich schneidende Ebenen bestimmt ist, reichen hier zu dieser Bestimmung bezüglich zwei Puncte und zwei Ebenen hin. — Wenn eine gerade Linie, sich um einen festen Punct drehend, eine Kegelfläche n. Ordnung beschreibt, umhüllt die zugeordnete Polare eine Curve n. Classe in der dem festen Puncte entsprechenden, durch diesen Punct gehenden Ebene. Die n Linien, in welchen die dem Mittelpuncte des Kegels entsprechende Ebene von demselben geschnitten wird, sind zugleich die n Tangenten, welche von dem Mittelpuncte aus, der gegenseitig der Ebene entspricht, an die Curve in dieser Ebene sich legen lassen. Da nämlich diese Linien dem Complexe angehören, sind sie ihre eigenen zugeordneten Polaren.

30. Wir wenden uns zu dem rein analytischen Gange der Untersuchung zurück.

Die gewöhnlichen Coordinaten des Punctes, welcher der gegebenen Ebene (t', u', v') entspricht und in Plan-Coordinaten durch die Gleichung (10) dargestellt wird, sind:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{D + Cu' - Bv'}{Dt' + Eu' + Fv'}, \\ y &= -\frac{E - Ct' + Av'}{Dt' + Eu' + Fv'}, \\ z &= -\frac{F + Bt' - Au'}{Dt' + Eu' + Fv'}. \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn die gegebene Ebene parallel mit sich selbst verschoben wird, so beschreibt der in derselben liegende, ihr entsprechende Punct einen geometrischen Ort. Unterscheiden wir durch x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des entsprechenden Punctes derjenigen unter den parallelen Ebenen, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, so ergibt sich, indem wir t', u', v' gleich ∞ setzen:

Wenn wir x', y', z', τ' als veränderlich betrachten, stellt die Gleichung:

$$\Pi = 0$$

eine Fläche zweiter Ordnung dar. In dem Falle, dass die Complex-Gleichung (2) an die Stelle der allgemeinen Reciprocitäts-Gleichung tritt, wird die Function Π identisch gleich Null.

Ich verweise, was die allgemeine Theorie der Reciprocität betrifft, auf mein „System der analytischen Geometrie des Raumes, 1846“ p. 10—14. — Die besondere Art von Reciprocität ist zuerst von Herrn Möbius im 10. Bande des Crelle'schen Journals hervorgehoben und später von L. J. Magnus in seiner „Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie des Raumes, 1837“, p. 139—145 behandelt worden.

$$x_0 = -\frac{Cu' - Bv'}{Dt' + Eu' + Fv'},$$
$$y_0 = -\frac{-Ct' + Av'}{Dt' + Eu' + Fv'}, \tag{12}$$
$$z_0 = -\frac{Bt' - Au'}{Dt' + Eu' + Fv'},$$

und hiernach:

$$x - x_0 = -\frac{D}{Dt' + Eu' + Fv'},$$
$$y - y_0 = -\frac{E}{Dt' + Eu' + Fv'}, \tag{13}$$
$$z - z_0 = -\frac{F}{Dt' + Eu' + Fv'}.$$

Wir ziehen hieraus:

$$(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = D : E : F, \tag{14}$$

wonach der fragliche geometrische Ort die, durch die Doppel-Gleichung:

$$\frac{x - x^0}{D} = \frac{y - y_0}{E} = \frac{z - z_0}{F} \tag{15}$$

dargestellte, gerade Linie ist. Die Richtung dieser geraden Linie ist von der Richtung der parallelen Ebenen unabhängig. Wir nennen sie einen Durchmesser des Linien-Complexes ersten Grades, und sagen, die parallelen Ebenen seien dem Durchmesser zugeordnet, und gegenseitig, jeder der parallelen Ebenen sei der Durchmesser zugeordnet.

Alle Durchmesser eines Linien-Complexes ersten Grades sind einander parallel. Durch jeden Punct des Raumes geht ein solcher Durchmesser.

31. Unter den Durchmessern des Complexes gibt es einen einzigen, welcher auf den ihm zugeordneten Ebenen senkrecht steht, und den wir die Axe des Complexes nennen wollen. Soll die doppelte Gleichung (15) diese Axe darstellen, so kommt, um auszudrücken, dass sie auf den parallelen Ebenen (t', u', v') senkrecht steht:

$$t' : u' : v' = D : E : F,$$

wonach die Gleichungen (12) die folgenden Werthe für x_0, y_0, z_0 geben:

$$x_0 = \frac{BF - CE}{D^2 + E^2 + F^2},$$
$$y_0 = \frac{CD - AF}{D^2 + E^2 + F^2}, \tag{16}$$
$$z_0 = \frac{AE - BD}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

diese Coordinatenwerthe werden insbesondere gleich Null, und die Axe geht durch den Anfangspunct, wenn:

$$A : B : C = D : E : F. \qquad (17)$$

Die auf der Axe senkrechten Ebenen wollen wir Hauptschnitte des Complexes nennen. Der durch den Anfangspunct gehende Hauptschnitt hat zur Gleichung:

$$Dx + Ey + Fz = 0. \qquad (18)$$

Wenn F verschwindet, sind die Durchmesser des Complexes, unter welchen sich auch die Axe desselben befindet, der Ebene XY parallel. Wenn F und C gleichzeitig verschwinden, werden x_0 und y_0 gleich Null. Dann schneidet die Axe des Complexes die Coordinaten-Axe OZ; für den Durchschnittspunct behält z_0 den obigen Werth. Für die Axe OZ sind die Coordinaten $(x - x')$, $(y - y')$, $(yz' - y'z)$, $(x'z - xz')$ gleich Null. Diese Axe ist also eine Linie des Complexes, wenn F und C verschwinden, und zwar eine solche, die von der Axe desselben geschnitten wird. Durch dieselbe geht der Hauptschnitt:

$$Dx + Ey = 0.$$

32. In gleicher Weise wollen wir die Gleichung (9) behandeln, welche diejenige Ebene darstellt, die alle Linien des Complexes enthält, welche durch einen gegebenen Punct (x', y', z') gehen, die, mit anderen Worten, diesem Puncte entspricht. Nennen wir die Coordinaten dieser Ebene t, u, v, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} t &= -\frac{A + Fy' - Ez'}{Ax' + By' + Cz'}, \\ u &= -\frac{B - Fx' + Dz'}{Ax' + By' + Cz'}, \\ v &= -\frac{C + Ex' - Dy'}{Ax' + By' + Cz'}. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Wenn wir annehmen, dass der Punct (x', y', z') auf einer festen, durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie fortrückt, so bleibt das Verhältniss der Coordinaten des Punctes $x' : y' : z'$ constant. Dem auf der festen Linie unendlich weit gerückten Puncte entspricht eine bestimmte Ebene, für welche, wenn wir zur Unterscheidung die Coordinaten derselben durch t_0, u_0, v^0 bezeichnen:

$$t_0 = -\frac{Fy' - Ez'}{Ax' + By' + Cz'},$$

$$u_0 = -\frac{-Fx' + Dz'}{Ax' + By' + Cz'}, \tag{20}$$

$$v_0 = -\frac{Ex' - Dy'}{Ax' + By' + Cz'}.$$

Es folgt hieraus:

$$t - t_0 = -\frac{A}{Ax' + By' + Cz'},$$

$$u - u_0 = -\frac{B}{Ax' + By' + Cz'}, \tag{21}$$

$$v - v_0 = -\frac{C}{Ax' + By' + Cz'},$$

wonach:

$$(t - t_0) : (u - u_0) : (v - v_0) = A : B : C.$$

Wenn wir t, u, v als veränderlich betrachten, so stellt die Doppel-Gleichung:

$$\frac{t - t_0}{A} = \frac{u - u_0}{B} = \frac{v - v_0}{C} \tag{22}$$

eine gerade Linie dar, die umhüllt wird von denjenigen Ebenen, welche den Puncten einer festen, durch den Anfangspunct gehenden Linie entsprechen. Da der Anfangspunct der Coordinaten bei der willkürlichen Annahme desselben in keiner besonderen Beziehung zum Complexe steht, ist in dem Vorstehenden der allgemeine Satz über conjugirte Polaren bewiesen (siehe Nr. 28).

Die Gleichungen (19) zeigen, dass, wenn der Punct (x', y', z') in der durch die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{23}$$

dargestellten Ebene liegt, die Coordinaten t', u', v' der entsprechenden Ebene unendlich gross werden, die Ebene selbst also durch den Anfangspunct geht. Daraus folgt, dass die Ebene (23) diejenige ist, welche dem Anfangspuncte entspricht, und dass sie folglich der geometrische Ort für diejenigen Linien ist, welche solchen, die durch den Anfangspunct gehen, conjugirt sind. Linien, die in der Ebene liegen und zugleich durch den Anfangspunct gehen, sind ihre eigenen conjugirten und gehören also dem Complexe an.

Betrachten wir unter den durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien insbesondere den durch diesen Punct gehenden Durchmesser des Complexes, so ist, in Folge der Doppel-Gleichung (15) für jeden Punct (x', y', z') desselben:

$$x' : y' : z' = D : E : F. \tag{24}$$

Dann folgt aus den Gleichungen (20):

$$t_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0,$$

und die Doppel-Gleichung (21), indem sie sich auf die folgende:

$$\frac{t}{A} = \frac{u}{B} = \frac{v}{C}$$

reducirt, gibt für die dem Durchmesser conjugirte Polare die in der Ebene (23) unendlich weit entfernt liegende Linie.

Bei der willkürlichen Annahme des Anfangspunctes des Coordinaten-Systems ist hiermit ausgesprochen, dass die einem beliebigen Durchmesser des Complexes zugeordnete Linie in der einem Puncte desselben entsprechenden Ebene unendlich weit liegt. Eine gerade Linie aber, welche in einer gegebenen Ebene unendlich weit gerückt ist, lässt, indem sie ihre Richtung verloren hat, keine nähere Bestimmung mehr zu und bleibt dieselbe, wenn die Ebene, welche sie enthält, parallel mit sich selbst verschobon wird. Eine unendlich weit entfernte gerade Linie ist immer einer gegebenen Ebene parallel, und nimmt, wenn diese Ebene um einen ihrer Puncte sich dreht, in unendlicher Entfernung alle möglichen Lagen an. In jeder solchen Lage entspricht ihr ein Durchmesser des Complexes. Alle unendlich weit entfernten Linien des Raumes bilden eine unendlich weit entfernt liegende Ebene, deren entsprechender Punct, weil er in ihr liegt, selbst nach gegebener Richtung unendlich weit entfernt ist. Eine Folge davon ist, dass die in diesem Puncte convergirenden Durchmesser unter einander parallel sind.

Ausgezeichnet unter denjenigen geraden Linien, welche durch den Anfangspunct gehen, ist endlich diejenige, welche auf der dem Anfangspunct entsprechenden Ebene:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{25}$$

senkrecht steht, und also senkrecht steht auf jeder in dieser Ebene liegenden geraden Linie, d. h. auf jeder geraden Linie, die einer durch den Anfangspunct gehenden zugeordnet ist, insbesondere auf der ihr selbst zugeordneten. Die fragliche Linie ist dadurch charakterisirt, dass für jeden ihrer Puncte:

$$x' : y' : z' = A : B : C, \tag{26}$$

wonach t_0, u_0, v_0 die folgenden Werthe erhalten:

$$\begin{aligned} t_0 &= -\frac{BF - CE}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ u_0 &= -\frac{CD - AF}{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$v_0 = -\frac{AE - BD}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Wenn wir diese Werthe in die Doppel-Gleichung (21) einsetzen, so stellt diese Gleichung in der Ebene (23) diejenige gerade Linie dar, welche der durch den Anfangspunct gehenden (26) zugeordnet ist.

Wenn durch den Anfangspunct der Coordinaten die Axe des Complexes geht, so ist sie es, die auf der ihr zugeordneten Linie senkrecht steht. Dann aber ist, nach (15):

$$x' : y' : z' = D : E : F,$$

mithin:

$$A : B : C = D : E : F$$

in Uebereinstimmung mit (17).

33. Aus den Gleichungen (10) ergeben sich:

$$\begin{aligned} Cu - Bv + D &= 0, \\ -Ct + Av + E &= 0, \\ Bt - Au + F &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

für die Gleichungen der drei Puncte, welche den Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY entsprechen, während:

$$Dt + Eu + Fv = 0 \tag{29}$$

denjenigen Punct darstellt, welcher der unendlich weit entfernten Ebene entspricht und selbst nach gegebener Richtung unendlich weit liegt.

Aus den Gleichungen (9) ergeben sich:

$$\begin{aligned} Fy - Ez + A &= 0, \\ -Fx + Dz + B &= 0, \\ Ex - Dy + C &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

für die Gleichungen der drei Ebenen, welche den Puncten entsprechen, die nach den Richtungen der drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ unendlich weit liegen, während, was bereits bemerkt (23):

$$Ax + By + Cz = 0$$

die dem Anfangspunct entsprechende Ebene darstellt.

34. Aus den drei Gleichungen (9) und den drei Gleichungen (10) erhalten wir übereinstimmend, wenn (x, y, z) ein Punct, (t, u, v) eine Ebene ist, die in Beziehung auf den Complex sich gegenseitig entsprechen, die Bedingungs-Gleichung:

$$(Ax + By + Cz)(Dt + Eu + Fv) + (AD + BE + CF) = 0. \tag{31}$$

Die vorstehende Gleichung schliesst als einen speciellen Fall ein, dass:

$$AD + BE + CF = 0. \tag{32}$$

Diesem speciellen Falle entspricht eine Particularisation des Complexes ersten Grades.

35. Die beiden allgemeinen Gleichungen:

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + D(yz'-y'z) + E(x'z-xz') + F(xy'-x'y) = 0,$$
$$D(t-t') + E(u-u') + F(v-v') + A(uv'-u'v) + B(t'v-tv') + C(tu'-t'u) = 0,$$

welche in der doppelten Coordinaten-Bestimmung die Complexe ersten Grades darstellen, vereinfachen sich, wenn wir eine der drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen mit der Axe des Complexes zusammenfallen lassen, wonach die beiden anderen in einem Hauptschnitte desselben liegen. Wählen wir für die mit der Axe des Complexes zusammenfallende Coordinaten-Axe, nach einander, OZ, OY, OX, so nehmen durch das bezügliche Verschwinden von:

A, B und D, E,
A, C und D, F,
B, C und E, F

die vorstehenden beiden Gleichungen folgende Formen an:

$$\begin{array}{ll} (xy'-x'y) + k(z-z') = 0, & (v-v') + k(tu'-t'u) = 0, \\ (x'z-xz') + k(y-y') = 0, \quad (33) & (u-u') + k(t'v-tv') = 0, \quad (34) \\ (xy'-x'y) + k(x-x') = 0, & (t-t') + k(uv'-u'v) = 0. \end{array}$$

Unter dieser Form enthalten sie nur noch eine einzige Constante (k), und diese ist *dieselbe* in allen Gleichungen. Dieses ist von Vorne herein ersichtlich. Denn einmal ändert sich dieser Werth nicht, wenn wir von einer der beiden Gleichungen in derselben Zeile zu der andern übergehen. Es folgt dies aus der doppelten Bestimmung der geraden Linie vermittelst Punct- und Plan-Coordinaten, wonach z. B.

$$\frac{xy'-x'y}{z-z'} = \frac{v-v'}{tu'-t'u}.$$

Aber auch beim Uebergange von einer der drei unter einander stehenden Gleichungen des Complexes zu einer anderen bleibt der Werth der Constanten k unverändert. Die Ausdrücke:

$$\frac{xy'-x'y}{z-z'}, \quad \frac{x'z-xz'}{y-y'}, \quad \frac{yz'-y'z}{x-x'},$$

z. B. haben, wenn sie auf eine beliebige Linie des Complexes bezogen werden, eine absolute geometrische Bedeutung, vermittelt durch das jedesmalige Coordinaten-System, aber unabhängig von demselben. Beim Uebergange von dem einen Coordinaten-Systeme zum andern gehen die vorstehenden drei Ausdrücke durch die entsprechende Coordinaten-Vertauschung in einander über; aber ihre geometrische Bedeutung, was dieselbe immer sein mag, ändert sich nicht und folglich ändert sich auch k nicht.

Wir wollen die Grösse k, welche die Länge einer Linie darstellt, den Parameter des Complexes nennen. Der Complex ist, wenn wir von seiner Lage im Raume absehen, durch seinen Parameter vollkommen bestimmt.

36. Die allgemeine Gleichung eines Linien-Complexes des ersten Grades enthält in jeder der beiden Coordinaten-Bestimmungen fünf von einander unabhängige Constanten. Die Gleichungen (33) und (34) haben nur noch eine einzige Constante behalten. Die Anzahl der Constanten hat sich also um vier reducirt. Aber da wir zur Bestimmung eines neuen Coordinaten-Systems über sechs Constanten verfügen können, so ist das den letzten Gleichungen zu Grunde liegende Coordinaten-System nur unvollkommen bestimmt. Wir können noch über zwei Constanten der Lage verfügen, ohne dass diese Gleichungen irgendwie sich ändern. Wir werden dies in der folgenden Nummer bestätigt finden.

37. Die erste der drei Gleichungen (33)

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0,$$

die wir willkürlich auswählen, ändert sich nicht, wenn der Anfangspunct der Coordinaten auf OZ, der Axe des Complexes, beliebig fortrückt. Dieselbe Gleichung bleibt auch dann ungeändert, wenn sich das Coordinaten-System beliebig um OZ dreht. Denn einerseits bleibt dann z und z' unverändert und andererseits behält auch $xy' - x'y$ seinen Werth. Dieser Ausdruck stellt nämlich die Projection auf XY der doppelten Fläche desjenigen Dreiecks dar, welches den Anfangspunct der Coordinaten und die beiden Puncte (x, y, z) und (x', y', z'), durch welche die Linien des Complexes bestimmt werden, zu seinen drei Winkelpuncten hat, und diese Projection ändert sich nicht, wenn der Complex um seine Axe OZ gedreht wird. Somit bleiben die Gleichungen (33), und folglich auch die Gleichungen (34) ungeändert dieselben, wie auch der Anfangspunct auf der Axe des Complexes fortrücken und das Coordinaten-System sich um diese Axe drehen mag. Oder, mit andern Worten:

Ein Linien-Complex ersten Grades bleibt unverändert, sowohl wenn derselbe parallel mit seiner Axe verschoben, als auch wenn er um dieselbe gedreht wird.

Alle Linien des Complexes in der ursprünglichen Lage kommen nach der Verschiebung und Drehung mit anderen Linien desselben zur Deckung.

38. Wir können durch Aenderung des Coordinaten-Systems die allgemeinen Complex-Gleichungen (2), (4) schrittweise in die sechs Gleichungen (33), (34) umformen. Da die einzige Constante, welche in diesen Gleichungen vorkommt, denselben Werth (k) hat, so handelt es sich bei diesen Umformungen nur um die Bestimmung von k, und es ist genügend, in einem einzigen Falle die Transformation durchzuführen. Wenn wir statt der Gleichungen (2), (4) der Kürze wegen die Gleichungen:

$$Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \tag{7}$$

$$Dp + Eq + F - A\varkappa + B\pi + C\omega = 0 \tag{8}$$

zu Grunde legen, nehmen die Gleichungen (33) und (34) die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \eta + k &= 0, \\ \varrho + ks &= 0, \\ -\sigma + kr &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (35) \qquad \left.\begin{aligned} \tau + \frac{1}{\varkappa} &= 0, \\ \pi + \frac{q}{\varkappa} &= 0, \\ -\varkappa + \frac{p}{\varkappa} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Wir beschränken uns darauf, aus der Gleichung (7) die erste der Gleichungen (35) abzuleiten.

Wenn wir das ursprüngliche Coordinaten-System, auf welches die Gleichung (7) bezogen ist, parallel mit sich selbst verschieben, und die Coordinaten des neuen Anfangspunctes x^0, y^0, z^0 sind, so geht unter Anwendung der Verwandlungsformeln (37) der 12. Nummer diese Gleichung über in die folgende:

$$(A + Fy^0 - Ez^0)\, r' + (B - Fx^0 + Dz^0)\, s' + (C + Ex^0 - Dy^0)$$
$$- D\sigma' + E\varrho' + F\eta' = 0. \tag{37}$$

Wenn insbesondere:

$$\frac{x^0}{D} = \frac{y^0}{E} = \frac{z^0}{F},$$

so wird durch die Verschiebung des Coordinaten-Systems die Form der ursprünglichen Gleichung nicht geändert. Der Complex bleibt also derselbe, wenn er verschoben wird parallel mit der Richtung derjenigen geraden Linie, welche durch die letzte Gleichung dargestellt wird, wenn wir in ihr x^0, y^0, z^0 als veränderlich betrachten — d. h. parallel mit der Durchmesser-Richtung (vergl. (15)).

Wir erhalten für die Cosinus der Winkel, welche diese Durchmesser-Richtung mit den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ bildet:

$$\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}, \qquad \frac{E}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}, \qquad \frac{F}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}.$$

Wir wollen das ursprüngliche Coordinaten-System um OZ durch einen Winkel α in dem Nr. 13. festgestellten Sinne drehen. Dann verwandelt sich die allgemeine Gleichung (7) nach den Verwandlungsformeln (40) der 13. Nummer in die folgende:

$$\begin{aligned}(A\cos\alpha + B\sin\alpha)\,r' + (-A\sin\alpha + B\cos\alpha)\,s' + C \\ -(D\cos\alpha + E\sin\alpha)\,\sigma' + (-D\sin\alpha + E\cos\alpha)\,\varrho' + F\eta' = 0.\end{aligned} \tag{38}$$

Wir wollen α so bestimmen, dass:

$$-D\sin\alpha + E\cos\alpha = 0, \tag{39}$$

wonach

$$\cos^2\alpha = \frac{D^2}{D^2+E^2}. \tag{40}$$

Dann können wir, unter Fortlassung der Accente, die Gleichung des Complexes in folgender Weise schreiben:

$$A'r + B's + C' - D's + F'\eta = 0, \tag{41}$$

eine Gleichung, die, weil ϱ fehlt, den bezüglichen Complex als einen solchen charakterisirt, dessen Durchmesser der Ebene XZ parallel sind. Während C' und F' die früheren Werthe C und F behalten, kommt:

$$\begin{aligned}A' &= (AD + BE)\frac{\cos\alpha}{D}, \\ B' &= (-AE + BE)\frac{\cos\alpha}{D}, \\ D' &= (D^2 + E^2)\frac{\cos\alpha}{D},\end{aligned} \tag{42}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned}A'D' &= AD + BE, \\ D'^2 &= D^2 + E^2.\end{aligned} \tag{43}$$

Nach vollbrachter erster Drehung des Coordinatensystems wollen wir dasselbe um OY durch einen Winkel γ drehen, der, wie in der 13. Nr. von OZ nach OX gerechnet werden mag. Dann geben die Verwandlungsformeln (43) der 13. Nummer für die Gleichung des Complexes:

$$\begin{aligned}(A'\cos\gamma - C'\sin\gamma)\,r' + B's' + (A'\sin\gamma + C'\cos\gamma) \\ -(D'\cos\gamma - F'\sin\gamma)\,\sigma' + (-D'\sin\gamma + F'\cos\gamma)\,\eta' = 0.\end{aligned} \tag{44}$$

Damit die neue Axe OZ mit dem durch den Anfangspunct laufenden Durchmesser des Complexes zusammenfalle, muss aus der Gleichung (44) σ' ausfallen. Dem entsprechend setzen wir:

$$D' \cos\gamma - F' \sin\gamma = 0, \tag{45}$$

wonach

$$\cos^2\gamma = \frac{F'^2}{D'^2 + F'^2}, \tag{46}$$

Dann können wir, der Kürze wegen, die Complex-Gleichung (44) folgendermassen schreiben:

$$A'' r + B'' s + C'' + F'' \eta = 0. \tag{47}$$

Während B'' den früheren Werth B' behält, kommt:

$$\begin{aligned} A'' &= (A' F' - C' D') \frac{\cos\gamma}{F'}, \\ C'' &= (A' D' + C' F') \frac{\cos\gamma}{F'}, \\ -F'' &= (D'^2 + F'^2) \frac{\cos\gamma}{F'}, \end{aligned} \tag{48}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{C''}{F''} &= \frac{A' D' + C' F'}{D'^2 + F'^2} \\ &= \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Verschieben wir endlich die Coordinaten-Axen parallel mit sich selbst, wie in der 12. Nummer, so wird die Gleichung (47):

$$(A'' + F'' y^0) r' + (B'' - F'' x^0) s' + C'' + F'' \eta' = 0, \tag{50}$$

und reducirt sich, wenn wir

$$y^0 = -\frac{A''}{F''}, \qquad x^0 = \frac{B''}{F''} \tag{51}$$

nehmen, auf

$$\eta + k = 0, \tag{52}$$

indem wir der Kürze wegen:

$$k = \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2} \tag{53}$$

setzen. Dann ist der Complex auf seine Axe als Coordinaten-Axe OZ bezogen, während die beiden anderen, auf einander und auf OZ senkrechten Coordinaten-Axen OX und OY nach übrigens beliebiger Richtung in einem beliebigen Puncte von OZ sich schneiden.

39. Wir erhalten unmittelbar die Deutung der Gleichungsform:

$$\eta + k = 0, \qquad (xy' - x'y) + k(z - z') = 0.$$

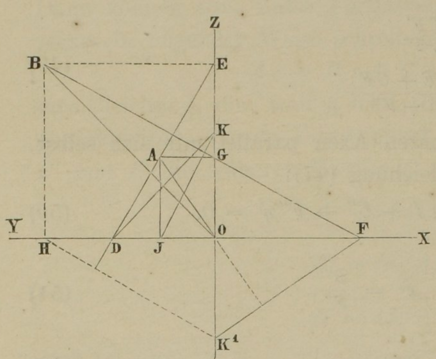
Denken wir uns eine Kraft von beliebiger Intensität, welche nach der Richtung irgend einer Linie des Complexes wirkt, so können wir den Ausdruck

$(xy' - x'y)$ als das doppelte Moment dieser Kraft in Beziehung auf die Axe des Complexes und $(z - z')$ als die Proportion der Kraft auf diese Axe betrachten. Also:

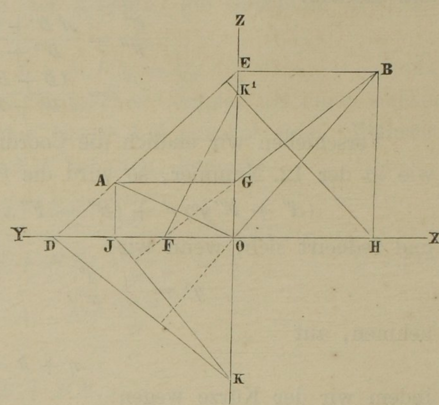
Wenn nach den Linien eines linearen Complexes beliebige Kräfte wirken, so ist das Verhältniss der Projection dieser Kräfte auf die Axe des Complexes zu dem Momente dieser Kraft in Beziehung auf dieselbe Axe constant und dem Parameter des Complexes gleich*).

Wenn wir insbesondere für die beiden Puncte (x, y, z) und (x', y', z'), durch welche die Linien des Complexes bestimmt werden, die beiden Puncte A und B nehmen, in welchen die Coordinaten-Ebenen von ihr geschnitten werden, so verschwinden die Werthe von x und y'. Dann kommt:

$$x'y = K(z - z'), \tag{54}$$



Figur 2.



Figur 3.

also mit Beziehung auf die Figur (Fig. 2, 3):**)

$$k = \frac{OH \cdot OJ}{EG}, \tag{55}$$

was eine unmittelbare Folge aus dem vorstehenden Satze ist, wie es auch

*) Dieser Satz wird, bei der späteren Ausführung des mechanischen Theils, in seinem natürlichen Zusammenhange mit anderen auftreten.

**) Es bietet für unsere Zwecke diejenige Projectionsweise einen besonderen Vortheil, in welcher die auf einander senkrechten drei Coordinaten-Axen OZ, OY, OX in derselben Ebene so dargestellt werden, dass etwa OZ und OX ihre natürliche Lage behalten, die positive Erstreckung von OY aber mit der negativen Erstreckung von OX zusammenfällt.

unmittelbar aus der Constantenbestimmung der geraden Linie folgt (vergleiche die 11. Nummer). Wir erhalten für jede beliebige Linie des Complexes:

$$-\eta = OJ \cdot \frac{OH}{EG} = -OJ \operatorname{cotang} BFX = OJ \operatorname{tang} OJK = OK = k. \quad (56)$$

$$-\eta = OH \cdot \frac{OJ}{EG} = OH \operatorname{cotang} ADY = -OH \operatorname{tang} OHK' = -OK' = k. \quad (57)$$

Es ist hierbei JK senkrecht auf GF und HK' senkrecht auf ED gezogen. In dem Falle der ersten Figur ist k positiv, in dem Falle der zweiten Figur k negativ.

Wir haben nach der eben angezogenen Nummer (11.), wenn wir uns der Axen-Coordinaten einer geraden Linie statt ihrer Strahlen-Coordinaten bedienen, und demnach die Gleichungen:

$$\omega = \frac{1}{k} = 0, \qquad (v - v') + k(tu' - t'u) = 0$$

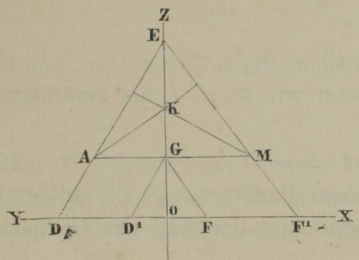
zu Grunde legen:

$$-\frac{1}{\omega} = \frac{OF \cdot OJ}{OG} = OF \cdot \operatorname{tang} AOZ = -OF \cdot \operatorname{tang} OFK' = -OK' = k, \quad (58)$$

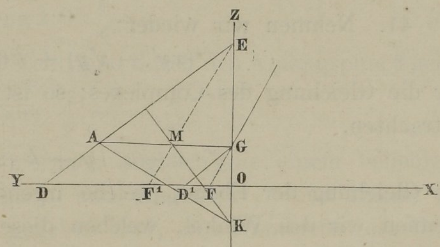
$$-\frac{1}{\omega} = -\frac{OD \cdot OH}{OE} = -OD \cdot \operatorname{tang} BOZ = OD \cdot \operatorname{tang} ODK = OK = k. \quad (59)$$

Es ist hierbei FK' senkrecht auf OA und DK senkrecht auf OB gezogen.

Auch die folgende Construction verdient noch angeführt zu werden (Figur 4, 5).



Figur 4.



Figur 5.

Wir können durch DE und FG, die Projectionen einer gegebenen geraden Linie des Complexes, in einziger Weise ein System zweier unter sich paralleler Ebenen legen: EDF' und $GD'F$, welche auf den Coordinaten-Axen OZ, OY, OX bezüglich in den Puncten E und G, D und D', F' und F einschneiden. Dann erhalten wir:

$$EG = \frac{\eta}{rs}, \qquad DD' = -\frac{\eta}{r}, \qquad F'F = -\frac{\eta}{s},$$

und hieraus:

$$\eta = \frac{DD' \cdot F'F}{EG}. \tag{60}$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, legen wir durch G eine mit XY parallele Ebene, welche DE in A und $F'E$ in M schneidet. Dann ist:

$$-\frac{DD'.F'F}{EG} = \frac{AG.GM}{EG} = GK = k, \tag{61}$$

wenn K in dem Dreiecke AME derjenige Punct ist, in welchem die von den drei Winkelpuncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel sich schneiden. In der ersten der beiden Figuren ist k positiv, in der zweiten negativ.

40. Weil, wenn die Axe des Complexes gegeben ist und als eine der drei Coordinaten-Axen genommen wird, die Gleichung desselben nur eine einzige Constante enthält, so ist auch, wenn zugleich mit der Axe eine einzige gerade Linie des Complexes gegeben ist, dieser Complex vollkommen bestimmt. So wie in den letzten Entwickelungen die Constante k bestimmt worden ist, sobald eine Linie des Complexes gegeben war, so können auch umgekehrt, wenn k gegeben ist, alle Linien des Complexes construirt werden. Wir können die Linie, welche wir bestimmen wollen, von vorneherein dreien linearen Bedingungen unterwerfen, und begegnen so einer Reihe von Aufgaben, die ich hier nicht weiter berühre.

41. Nehmen wir wieder:

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0 \tag{33}$$

für die Gleichung des Complexes; so ist, wenn wir x, y, z als veränderlich betrachten,

$$y' \cdot x - x' \cdot y + k \cdot z - k \cdot z' = 0 \tag{62}$$

die Gleichung der Ebene, welche irgend einem Puncte (x', y', z') entspricht. Nennen wir den Winkel, welchen diese Ebene mit der Axe des Complexes bildet, λ, so ist:

$$\sin^2 \lambda = \frac{k^2}{y'^2 + x'^2 + K^2}, \tag{63}$$

folglich:

$$y'^2 + x'^2 = \frac{k^2}{\operatorname{tang}^2 \lambda}. \tag{64}$$

Die Deutung der vorstehenden Gleichungen gibt die folgenden geometrischen Beziehungen.

Wenn irgend ein Punct P gegeben ist, so geht die demselben zugeordnete Ebene durch diejenige gerade Linie, welche durch den Punct senkrecht zur Axe des Complexes gezogen werden kann. Die zugeordneten Ebenen aller Puncte, welche gleichen Abstand von der Axe des Complexes haben, bilden mit dieser Axe gleiche Winkel. Während der Punct, um die Axe sich drehend, einen Kreis beschreibt, umhüllt die zugeordnete Ebene einen Rotationskegel, welcher denjenigen Punct zum Mittelpuncte hat, in welchem die Ebene des Kreises die Axe schneidet. Wenn die Puncte des Kreises, parallel mit der Axe fortrückend, Durchmesser beschreiben, so verschiebt sich der Kegel parallel mit sich selbst, so dass sein Mittelpunct immer auf der Axe bleibt. Solche Durchmesser, welche gleichen Abstand von der Axe des Complexes haben, bilden mit ihren zugeordneten Ebenen gleiche Winkel.

42. Wenn wir die von einem gegebenen Puncte P senkrecht nach der Axe gezogene gerade Linie als Axe OX nehmen, verschwinden die Coordinaten-Werthe z' und y'. Dann wird die Gleichung der zugeordneten Ebene:

$$x'y = kz. \tag{65}$$

Für die Puncte derjenigen geraden Linie, in welcher diese die Ebene YZ schneidet, ist:

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tang} \lambda = \frac{k}{x'}, \tag{66}$$

für die Linie, welche senkrecht darauf steht, und durch den Anfangspunct geht:

$$\frac{y}{z} = -\frac{x'}{k} \text{ oder } \frac{z}{y} = -\frac{k}{x'}. \tag{67}$$

Wenn k gegeben ist, können wir hiernach sogleich die einem beliebigen Puncte P zugeordnete Ebene bestimmen, und umgekehrt, wenn irgend ein Punct und seine zugeordnete Ebene gegeben sind, den Parameter des Complexes, k.

Es sei in der oben gewählten Projectionsweise in dem auf OX angenommenen Puncte P ein Perpendikel PK auf diese Axe errichtet, und gleich k genommen. Dann ist diejenige Linie OL, welche senkrecht auf OK durch O gezogen ist, die Durchschnittslinie der dem Puncte P entsprechenden Ebene mit der Coordinaten-Ebene YZ. Damit ist die Ebene selbst gefunden. Ebenso ergibt sich, wenn die Ebene LOX und k gegeben sind, unmittelbar der dieser Ebene zugeordnete Punct P.

Wenn der Punct P sich von der Axe entfernt, nimmt tang λ im Verhältnisse der Entfernung ab.

Das Vorstehende erleichtert die Anschauung eines Complexes. Alle Linien, welche durch den beliebigen Punct P gehen und die Linie OL schneiden, gehören dem Complexe an, und thun es dann noch, wenn der Punct P und die Linie OL parallel mit der Axe verschoben werden, auch dann noch, wenn der Punct mit OL um die Axe sich dreht. Dem Kreise, welchen der Punct bei dieser Umdrehung beschreibt, entspricht ein Umdrehungs-Kegel, dessen Axe durch den Mittelpunct des Kreises geht und auf der Ebene desselben senkrecht steht: so, dass jede Linie des Complexes, welche durch einen Punct des Kreises geht, diesen Kegel berührt. Bei der Umkehrung dieses Satzes ist zu berücksichtigen, dass in Gemässheit der Gleichungen (63) (64) derselbe Kegel demselben Kreise in zwei verschiedenen Complexen entspricht, deren Parameter gleiche absolute Werthe, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Von den beiden Tangentialebenen, welche von einem Puncte des Kreises aus an den Kegel sich legen lassen, ist, wenn das Zeichen des Parameters k gegeben ist, nur diejenige zu nehmen, deren Durchschnittslinie mit der YZ-Ebene mit der Axe des Complexes einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente (66) gleich $+\frac{k}{x'}$ ist. Dass der dem Kreise entsprechende Kegel, wenn der Kreis parallel mit sich selbst nach der Axe OZ fortrückend einen Rotationscylinder beschreibt, in gleicher Weise parallel mit sich selbst fortrückt, wurde schon in der vorigen Nummer gesagt.

43. Die Linien des Raumes ordnen sich mit Bezug auf einen gegebenen Complex paarweise zusammen, so dass jede Linie ihre zugeordnete hat und die Beziehung irgend zweier zugeordneter Linien zu einander eine gegenseitige ist, welche durch den Complex in linearer Weise vermittelt wird. Wir wollen bei den Erörterungen hierüber wiederum die einfachste Gleichung des Complexes:

$$(xy'-x'y)+k(z-z')=0,$$

wobei die Axe des Complexes als Axe OZ genommen ist, zu Grunde legen.

Es seien (x', y', z') und (x'', y'', z'') irgend zwei Puncte im Raume, die gerade Linie, welche sie verbindet, eine von zwei conjugirten Polaren. Die Gleichungen dieser geraden Linie sind:

$$\begin{aligned}(z'-z'')x &= (x'-x'')z-(x'z''-x''z'),\\ (z'-z'')y &= (y'-y'')z-(y'z''-y''z'),\end{aligned} \qquad (68)$$

und ihre fünf Strahlen-Coordinaten, die wir durch r_0, s_0, ϱ_0, σ_0, η_0 unterscheiden wollen:

$$r_0 = \frac{x'-x''}{z'-z''}, \qquad s_0 = \frac{y'-y''}{z'-z''},$$
$$\varrho_0 = -\frac{x'z''-x''z'}{z'-z''}, \qquad \sigma_0 = -\frac{y'z''-y''z'}{z'-z''}, \tag{69}$$
$$\eta_0 = \frac{x'y''-x''y'}{z'-z''}.$$

Die zweiten der beiden zugeordneten Polaren können wir als den Durchschnitt derjenigen beiden Ebenen construiren, welche den beiden Puncten (x', y', z') und (x'', y'', z''), die auf der ersten liegen, entsprechen und die die folgenden sind:

$$\begin{aligned} y'x - x'y + kz - kz' &= 0, \\ y''x - x''y + kz - kz'' &= 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach successiver Elimination von y und x:

$$\begin{aligned} (x'y''-x''y')x + k[-(x'-x'')z + (x'z''-x''z')] &= 0, \\ (x'y''-x''y')y + k[-(y'-y'')z + (y'z''-y''z')] &= 0, \end{aligned} \tag{71}$$

und hiernach für die vier ersten der fünf Coordinaten der zweiten Linie, die wir zur Unterscheidung mit r^0, s^0, ϱ^0, σ^0, η^0, bezeichnen wollen:

$$r^0 = k \cdot \frac{x'-x''}{x'y''-x''y'}, \qquad s^0 = k \cdot \frac{y'-y''}{x'y''-x''y'}, \tag{72}$$
$$\varrho^0 = -k \cdot \frac{x'z''-x''z'}{x'y''-x''y'}, \qquad \sigma^0 = -k \cdot \frac{y'z''-y''z'}{x'y''-x''y'}.$$

Aus der Zusammenstellung der vorstehenden vier Gleichungen mit den Gleichungen (69) ergibt sich eine Reihe von Relationen zwischen den fünf Coordinaten der beiden conjugirten Polaren:

$$\frac{\varrho_0}{r_0} = \frac{\varrho^0}{r^0}, \qquad \frac{\sigma_0}{s_0} = \frac{\sigma^0}{s^0}, \tag{73}$$
$$\frac{r_0}{s_0} = \frac{r^0}{s^0}, \qquad \frac{\varrho_0}{\sigma_0} = \frac{\varrho^0}{\sigma^0},$$

ferner:

$$\frac{r_0}{\eta_0} = \frac{r^0}{k}, \qquad \frac{s_0}{\eta_0} = \frac{s^0}{k}, \tag{74}$$
$$\frac{\varrho_0}{\eta_0} = \frac{\varrho^0}{k}, \qquad \frac{\sigma_0}{\eta_0} = \frac{\sigma^0}{k},$$

und hieraus, indem wir berücksichtigen, dass

$$\eta^0 = r^0\sigma^0 - s^0\varrho^0,$$

folgt:

$$\eta_0 \eta^0 = k^2. \tag{75}$$

Wir können die sämmtlichen Relationen in die folgenden Gleichungen zusammenfassen:

$$\frac{r_0}{r^0} = \frac{s_0}{s^0} = \frac{\varrho_0}{\varrho^0} = \frac{\sigma_0}{\sigma^0} = \frac{\eta_0}{k} = \frac{k}{\eta^0}. \tag{76}$$

In diesen Gleichungen ist zugleich die reciproke Beziehung der beiden zugeordneten Linien zu einander ausgesprochen. Um von der zweiten der beiden conjugirten Polaren zu der ersten zurückzugehen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{r^0}{\eta^0} &= \frac{r_0}{k}, & \frac{s^0}{\eta^0} &= \frac{s_0}{k}, \\ \frac{\varrho^0}{\eta^0} &= \frac{\varrho_0}{k}, & \frac{\sigma^0}{\eta^0} &= \frac{\sigma_0}{k}. \end{aligned} \tag{77}$$

Wenn wir berücksichtigen, dass irgend zwei auf einander senkrechte Ebenen, welche durch die Axe OZ gehen, zu Coordinaten-Ebenen XZ, YZ genommen werden können, ohne dass die Gleichung des Complexes irgendwie sich ändert, so entnehmen wir aus den beiden ersten Gleichungen (73), dass jede durch die Axe des Complexes gelegte Ebene von je zwei zugeordneten Linien so geschnitten wird, dass die beiden Durchschnittspuncte auf einer geraden Linie liegen, welche auf der Axe senkrecht steht.

Das Quadrat des Abstandes desjenigen Punctes, in welchem die eine der beiden zugeordneten geraden Linien die durch irgend einen Werth von z bestimmte auf der Axe OZ senkrechte Ebene schneidet, ist:

$$(s_0 z + \sigma_0)^2 + (r_0 z + \varrho_0)^2.$$

Der Werth von z, für welchen dieser Abstand ein Minimum wird, ist:

$$z = -\frac{s_0\sigma_0 + r_0\varrho_0}{s_0^2 + \varrho_0^2}. \tag{78}$$

Wenn wir, wodurch die Gleichung des Complexes nicht geändert wird, die Ebene XY durch den kürzesten Abstand legen, so erhalten wir die Bedingungsgleichung:

$$s_0\sigma_0 + r_0\varrho_0 = 0, \tag{79}$$

und der kürzeste Abstand selbst wird:

$$\sigma_0^2 + \varrho_0^2.$$

Die Bedingungsgleichung (79) bringt für die andere conjugirte Polare die entsprechende:

$$s^0\sigma^0 + r^0\varrho^0 = 0 \tag{80}$$

mit sich.

Die kürzesten Abstände irgend zweier zugeordneter Polaren von der Axe des Complexes liegen in derselben auf dieser Axe senkrechten Ebene, und fallen in dieser Ebene in derselben geraden Linie zusammen.

Der letzte Theil dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze. Der directe Beweis liegt darin, dass, wenn wir die Axe OZ mit dem kürzesten Abstande der einen zugeordneten Linie zusammenfallen lassen, σ_0 verschwindet, was mit sich bringt, dass auch σ^0 verschwindet (74). In Folge der Gleichung (79) verschwindet alsdann r_0 und also, nach (74), auch r^0. Da die Gleichung (80) hiernach befriedigt wird, ist der Beweis geführt.

Die kürzesten Abstände selbst sind ϱ_0 und ϱ^0. Es ist:

$$\eta_0 = -s_0\varrho_0 = \frac{k^2}{\eta^0} = -\frac{k^2}{s^0\varrho^0}. \tag{81}$$

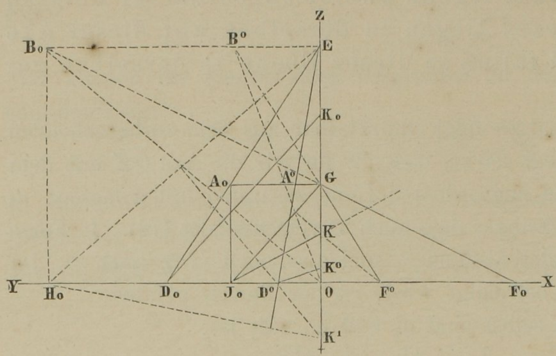
44. Es gibt unendlich viele Complexe, welche eine gegebene gerade Linie zur Axe haben. Jeder derselben ist durch eine seiner Linien vollkommen bestimmt. Jede von zwei conjugirten Linien bestimmt also einen Complex, der die Axe des gegebenen auch zu der seinigen hat, auf welchem sie selbst liegt. Der Parameter des gegebenen Complexes ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Parametern der beiden neuen Complexe. Alle Linien eines desselben haben solche Linien zu conjugirten, die auf dem anderen liegen. Wir können die beiden Complexe zwei Polar-Complexe in Bezug auf den gegebenen nennen.

Das Vorstehende liefert in der von uns gebrauchten Darstellungsweise eine Reihe einfacher Constructionen. Wenn der Complex

$$\eta + k = 0$$

gegeben ist, können wir für jede gegebene gerade Linie die zugeordnete construiren, und, wenn die Axe des Complexes und ein System von zwei conjugirten Polaren gegeben ist, welches die Bedingungen erfüllt, die es nach der vorigen Nummer bei gegebener Complex-Axe zu befriedigen hat, den Complex vollständig bestimmen.

Es seien D_0E und F_0G die Projectionen einer gegebenen geraden Linie auf YZ und XZ (Fig. 6). Dann wissen wir, wenn OZ die Axe des Complexes ist, dass die entsprechenden Projectionen der conjugirten geraden Linie ebenfalls durch E und G gehen, und es bleibt, zur Bestimmung dieser geraden Linie, nur noch übrig, die beiden Puncte D^0 und F^0 zu suchen, in welchen ihre beiden Projectionen OY und OX schneiden. Wir wollen noch in analoger



Figur 6.

Weise, wie früher, die Puncte, in welchen die gegebene gerade Linie die Coordinaten-Ebenen YZ und XZ trifft, durch A_0 und B_0 und deren Projectionen auf OY, bezüglich OX durch J_0 und H_0 bezeichnen. Es sei endlich der Complex-Parameter $k = OK = -OK'$.

Man fälle in der Figur von K' ein Perpendikel auf H_0E, von K auf J_0G. Das erste Perpendikel schneidet OY in D^0, das zweite OX in F^0.

Man ziehe durch K und K' zwei gerade Linien nach J_0 und H_0 und fälle auf diese beiden Linien bezüglich von G und E zwei Perpendikel. Diese beiden Perpendikel schneiden OX und OY in F^0 und D^0.

Die beiden vorstehenden Constructionen knüpfen sich unmittelbar an die Gleichungen (74).

Es ist einerseits in Gemässheit der Construction [§ 1. (34)]:

$$\varrho^0 = k\frac{\varrho_0}{\eta_0} = \frac{-k}{\operatorname{tang} A_0OZ} = -OK\cdot\operatorname{tang} A_0OJ_0 = OK\operatorname{tang} OKF^0 = OF^0, \quad (82)$$

$$\sigma^0 = k\frac{\sigma_0}{\eta_0} = \frac{k}{\operatorname{tang} B_0OZ} = -OK'\cdot\operatorname{tang} B_0OH_0 = OK'\operatorname{tang} OK'D^0 = OD^0; \quad (83)$$

und andererseits [§ 1. (33)]:

$$\operatorname{tang} F^0GO = -r^0 = -k\frac{r_0}{\eta_0} = \frac{OK}{OJ_0} = \frac{OF^0}{OG}, \quad (84)$$

$$\operatorname{tang} D^0EO = -s^0 = -k\frac{s_0}{\eta_0} = \frac{OK'}{OH_0} = \frac{OD^0}{OE}. \quad (85)$$

Aus den vorstehenden Constructionen können wir andere sogleich ableiten, welche statt der Projectionen der zu bestimmenden geraden Linie unmittelbar die Puncte geben, in welchen sie die Coordinaten-Ebenen schneidet.

Ebenso erhalten wir, wenn die beiden zugeordneten Polaren gegeben sind, unmittelbar den Complex-Parameter $k = OK = -OK'$. Es sind K und K' die Kreuzungspuncte der Perpendikel, welche in den Dreiecken J_0GF^0

und $H_0 E D^0$ von den Winkelpuncten auf die gegenüber liegenden Seiten gefällt werden können.

Die Parameter der beiden Polarcomplexe, die wir durch k_0 und k^0 unterscheiden wollen, ergeben sich unmittelbar nach der früheren Nummer. Man fälle durch D_0 und D^0 Perpendikel auf OB_0 und OB^0, welche OZ in K_0 und K^0 schneiden. Dann ist (Nr. 39):

$$k_0 = OK_0; \qquad k^0 = OK^0, \tag{86}$$

wobei:

$$OK_0 \cdot OK^0 = \overline{OK}^2. \tag{87}$$

45. Wenn der Parameter des Complexes k verschwindet, so particularisirt sich der Complex. Die Gleichung desselben:

$$xy' - x'y = 0 \tag{88}$$

zeigt, dass alle Linien des Complexes seine Axe schneiden. Die allgemeine geometrische Definition eines Complexes ersten Grades, dass durch jeden Punct des Raumes unendlich viele Linien desselben gehen, die alle in derselben Ebene liegen, und dass, entsprechend, jede den Raum durchziehende Ebene unendlich viele Linien desselben enthält, welche in demselben Puncte sich schneiden, behält, auch nach der Particularisation, ihre Geltung. Nur schneiden sich die Ebenen, welche beliebigen Puncten zugeordnet sind, alle in der Axe des Complexes, so wie die Puncte, welche beliebigen Ebenen zugeordnet sind, alle auf dieser Axe liegen. Alle Durchmesser des Complexes fallen in seiner Axe zusammen. Jeder beliebigen geraden Linie ist die Axe zugeordnet.

Wenn wir den Complex durch die allgemeine Gleichung:

$$Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0$$

darstellen, so erhalten wir, um auszudrücken, dass er in der fraglichen Weise sich particularisirt (vergl. auch Nr. 34), die Gleichung:

$$AD + BE + CF = 0^{*}). \tag{89}$$

*) Wir sehen hier von dem Falle ab, dass D, E und F gleichzeitig verschwinden und somit:

$$k \equiv \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}$$

unendlich gross wird. Der Grund dazu ist der folgende. Ein Complex mit unendlich gossem Parameter, für dessen Gleichung wir die folgende nehmen wollen:

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0,$$

enthält nur diejenigen Linien, welche der Ebene XY parallel sind oder die unendlich weit liegen. Die vorstehende Gleichung wird nämlich nur befriedigt, wenn man entweder hat:

$$z - z' = 0,$$

oder

Zur Bestimmung derjenigen Linien des Complexes, welche durch irgend einen gegebenen Punct (x, y, z) gehen, können wir zwischen der allgemeinen Gleichung des Complexes und den Gleichungen:

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$
$$ry - sx = \eta,$$

welche ausdrücken, dass der gegebene Punct auf der geraden Linie (r, s, ϱ, σ, η) liegt, ϱ, σ und η eliminiren. In der resultirenden Gleichung:

$$(A + Fy - Ez)r + (B - Fx + Dz)s + (C + Ex - Dy) = 0 \qquad (90)$$

bestimmen r und s die Richtung der Ebene, welche dem Puncte (x, y, z) zugeordnet ist. Wenn die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} A + Fy - Ez &= 0, \\ B - Fx + Dz &= 0, \\ C + Ex - Dy &= 0 \end{aligned} \qquad (91)$$

gleichzeitig befriedigt werden, was die Bedingungsgleichung (89) voraussetzt, so wird die Richtung der zugeordneten Ebene unbestimmt. Dann ist der Punct (x, y, z) auf einer geraden Linie angenommen worden, deren drei Projectionen, wenn wir x, y, z als veränderlich betrachten, durch die drei letzten Gleichungen dargestellt werden. Diese gerade Linie ist die Axe des Complexes.

Ohne die beschränkende Bedingungsgleichung (89) stellen die vorstehenden drei Gleichungen einzeln genommen diejenigen Ebenen dar, welche Puncten entsprechen, die nach der Richtung der Coordinaten-Axen OX, OY, OZ unendlich weit liegen.

Auf ähnliche Weise stellen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} D + Cu - Bv &= 0, \\ E - Ct + Av &= 0, \\ F + Bt - Au &= 0 \end{aligned} \qquad (92)$$

$$\frac{xy' - x'y}{z - z'} = \infty.$$

Für einen solchen Complex fällt also der Begriff der Axe als einer vollständig bestimmten geraden Linie fort, indem jede zu OZ parallele Linie auf diesen Namen mit gleichem Rechte Anspruch macht.

Denselben Complex können wir aber auch betrachten als einen Complex der besonderen Art, dessen Parameter gleich Null und dessen Axe in der Ebene XY unendlich weit liegt. Darin liegt die Berechtigung, sobald die Bedingung:

$$AD + BE + CF = 0$$

erfüllt ist, allgemein von einem Complexe besonderer Art, dessen Parameter gleich Null ist, zu sprechen (vergl. Gleichung (91) des Textes).

in den Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY die Puncte dar, welche diesen Ebenen zugeordnet sind. Diese drei Gleichungen bestehen gleichzeitig, wenn die Bedingungsgleichung (89) befriedigt wird. Dann liegen die drei Puncte in gerader Linie und sind diejenigen, in welchen die drei Coordinaten-Ebenen von der Axe des Complexes geschnitten werden.

Die Bedingungsgleichung (89) besteht ungeändert, wenn wir den Complex als einen Axen-Complex betrachten und dem entsprechend durch die Gleichung:

$$Dp + Eq + F - A\varkappa + B\pi + C\omega = 0$$

darstellen. Aber es ist zu bemerken, dass diese Gleichung in dem besonderen Falle, den wir betrachten, dann illusorisch wird, wenn wir, wie wir es in dem Falle von Strahlen-Coordinaten gethan haben, die Axe des Complexes zu einer der drei Coordinaten-Axen nehmen.

Wir können die Bedingungsgleichung (89) dadurch befriedigen, dass wir von den Constanten der allgemeinen Complex-Gleichung drei gleich Null setzen, und erhalten vier wesentlich verschiedene Fälle, wenn wir nach einander für die verschwindenden Constanten:

$$D,\ E,\ F, \qquad A,\ B,\ C, \qquad C,\ D,\ E, \qquad A,\ B,\ F,$$

wählen. Diesen vier Fällen entsprechen die folgenden Gleichungen in Strahlen- und Axen-Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} Ar + Bs + C &= 0, \\ -A\varkappa + B\pi + C\omega &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned} -D\sigma + E\varrho + F\eta &= 0, \\ Dp + Eq + F &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

$$\left.\begin{aligned} Ar + Bs + F\eta &= 0, \\ -A\varkappa + B\pi + F &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

$$\left.\begin{aligned} C - D\sigma + E\varrho &= 0, \\ C\omega + Dp + Eq &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

In dem Falle der Gleichungen (93) liegt die Axe des Complexes, auf der alle Linien sich schneiden, unendlich weit; sie ist, wie alle Linien des Complexes, der durch die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{97}$$

dargestellten Ebene parallel [vergl. die Note zu (89)].

In dem Falle der Gleichungen (94) steht die Axe des Complexes im Anfangspuncte auf der durch die Gleichung:

$$Dx + Ey + Fz = 0 \tag{98}$$

dargestellten Ebene senkrecht.

In dem Falle der Gleichungen (95) ist die Axe des Complexes der Coordinaten-Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, der in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$Bt - Au + Fv = 0 \tag{99}$$

dargestellt wird.

In dem Falle der Gleichungen (96) endlich liegt die fragliche Axe in der Ebene XY und wird in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$C + Ex - Dy = 0 \tag{100}$$

dargestellt.

46. Wir haben im Vorstehenden, indem wir die Axe eines Complexes zu einer der drei Coordinaten-Axen OZ, OY, OX genommen, die Gleichung desselben auf die folgenden einfachen Formen zurückgeführt:

$$\eta + k = 0, \qquad \varrho + ks = 0, \qquad \sigma - kr = 0,$$

in welchen k den Parameter des Complexes bedeutet. Der Anfangspunct kann hierbei auf der Axe des Complexes eine beliebige Lage haben und die beiden übrigen Coordinaten-Axen, unter der Bedingung, dass sie auf einander und auf der Axe des Complexes senkrecht bleiben, beliebig angenommen werden. Wir wollen nunmehr statt der Axe einen beliebigen der ihr parallelen Durchmesser des Complexes zur Axe OZ nehmen. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir die Ebene YZ durch den Durchmesser und die Axe legen. Den Abstand des Durchmessers von der Axe wollen wir durch y^0 bezeichnen. Dann wird, indem wir (Nr. 14)

$$\eta \text{ mit } \eta + y^0 \cdot r$$

vertauschen, derselbe Complex, welcher früher durch die Gleichung:

$$\eta + k = 0$$

dargestellt wurde, nunmehr durch die Gleichung:

$$\eta + y^0 r + k = 0 \tag{101}$$

dargestellt. Wenn wir hiernach, während die Axen OZ und OY unverändert bleiben, die Axe OX in der Ebene XZ so drehen, dass sie, nach der Drehung, mit OZ einen Winkel δ bildet, so geben die Verwandlungsformeln (42) der 13. Nummer, indem wir in denselben $\gamma' = \delta$, $\gamma = 0$ schreiben, für

$$r \quad \text{und} \quad \eta$$

die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{r \sin \delta}{r \cos \delta + 1}, \qquad \frac{\eta \sin \delta}{r \cos \delta + 1}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung des Complexes ein, so kommt:

$$\eta \sin \delta + y^0 r \sin \delta + k(r \cos \delta + 1) = 0. \tag{102}$$

Es bedeutet δ die Neigung der Ebene XY gegen die Axe OZ, also gegen die Durchmesserrichtung des Complexes. Bestimmen wir die Neigung durch die Gleichung:

$$y^0 \sin \delta + k \cos \delta = 0, \tag{103}$$

so vereinfacht sich die Gleichung des Complexes in die folgende:

$$\eta + \frac{k}{\sin \delta} = 0, \tag{104}$$

oder

$$\eta + k' = 0, \tag{105}$$

indem wir

$$\frac{k}{\sin \delta} = k' \tag{106}$$

setzen. Wir haben die Constante k den Parameter des Complexes genannt, wir können sie auch den Parameter der Axe des Complexes nennen und in diesem Sinne überhaupt von dem Parameter eines beliebigen Durchmessers sprechen und k' insbesondere als den Parameter des als Axe OZ genommenen Durchmessers bezeichnen. Unter allen Durchmessern eines Complexes hat die Axe den kleinsten Parameter.

Indem wir den Complex durch die vorstehende Gleichung darstellen, beziehen wir ihn auf einen beliebigen seiner Durchmesser als Axe OZ und nehmen eine beliebige zugeordnete Ebene dieses Durchmessers zur Ebene XY. Die beiden Axen OX und OY in dieser Ebene sind auf einander senkrecht geblieben, und OY ist die Projection des Durchmessers auf die ihm zugeordnete Ebene.

Um also von dem beliebigen Durchmesser zur Axe zurückzugehen, brauchen wir blos diesen Durchmesser nach derjenigen Linie innerhalb der conjugirten Ebene, die auf dem Durchmesser senkrecht steht, zu verschieben, und zwar um ein Stück:

$$-y^0 = k' \cos \delta.$$

Die Gleichung des Complexes, die wir auch unter der Form:

$$(xy' - x'y) + k'(z - z') = 0 \tag{107}$$

schreiben können, bleibt unverändert dieselbe, wenn wir innerhalb der Ebene XY die rechtwinkligen Coordinaten-Axen beliebig drehen. Drehen wir sie aber von einander unabhängig so, dass sie nach der Drehung einen Winkel ε mit einander machen, so haben wir:

$$(xy' - x'y) \text{ und } \eta$$

mit

$$(xy' - x'y) \sin\varepsilon \text{ und } \eta \sin\varepsilon$$

zu vertauschen. Die Form der Complexgleichung bleibt also auch dann noch dieselbe:

$$\eta + k'' = 0, \tag{108}$$

wobei wir:

$$\frac{k'}{\sin\varepsilon} = \frac{k}{\sin\varepsilon \sin\delta} = k'' \tag{109}$$

setzen. Das ist die Gleichung des Complexes, wenn wir einen beliebigen Durchmesser, der mit seiner zugeordneten Ebene einen Winkel δ bildet, als Axe OZ nehmen und in der zugeordneten Ebene zwei beliebige Axen OX und OY wählen, die den Winkel ε einschliessen.

Wir erhalten die entsprechenden Gleichungsformen:

$$\varrho + \frac{ks}{\sin\delta \sin\varepsilon} = 0, \qquad \sigma - \frac{kr}{\sin\delta \sin\varepsilon} = 0, \tag{110}$$

wenn wir statt OZ nach einander OX und OY mit der Axe des Complexes zusammenfallen lassen.

47. Wir haben bisher in der Discussion der Complexe noch unerörtert gelassen, welchen Einfluss das Zeichen des Parameters auf die Natur derselben hat. Dem doppelten Zeichen dieses Werthes entsprechend erhalten wir zwei wesentlich verschiedene Arten von Complexen ersten Grades.

Wenn wir irgend eine gerade Linie, die wir unter den Linien eines Complexes auswählen, parallel mit der Axe des Complexes beliebig verschieben und um diese Axe beliebig drehen, so fällt sie in allen ihren neuen Lagen mit andern Linien des Complexes zusammen. Sie berührt hierbei fortwährend einen Rotationscylinder, dessen Axe die Axe des Complexes ist, und dessen Kreisschnitte die kürzeste Entfernung der geraden Linie von der Axe des Complexes zum Radius haben. Die den Cylinder berührende gerade Linie kann sich in Uebereinstimmung mit dem Gesagten um den Cylinder so bewegen, dass sie eine Curve umhüllt. Diese Curve ist dann eine auf dem Cylinder liegende Schraubenlinie. Wenn wir die Schraubenlinie um die Höhe eines Schraubenganges auf dem Cylinder verschieben, geben die Tangenten der Schraubenlinie in den verschiedenen Lagen dieser letzteren sämmtliche Complexlinien, welche den Cylinder berühren.

Es sei

$$\eta + k \equiv (r\sigma - s\varrho) + k = 0$$

die Gleichung des Complexes,

$$y^2 + x^2 = R^2 \qquad (111)$$

die Gleichung eines Rotationscylinders, der die Axe des Complexes zu der seinigen, und dessen kreisförmige Basis R zum Radius hat. Dann ist eine gerade Linie, deren drei Coordinaten:

$$r = 0, \qquad \varrho = R, \qquad \sigma = 0 \qquad (112)$$

sind, eine Tangente des Cylinders. Um auszudrücken, dass sie dem Complex angehört, erhalten wir:

$$Rs = k. \qquad (113)$$

Die gerade Linie liegt in einer der Coordinaten-Ebene YZ parallelen Ebene. Wenn ihre Projection auf YZ mit OZ einen Winkel λ bildet, der eine positive trigonometrische Tangente hat, so ist sie die Tangente einer dem Cylinder aufgeschriebenen, rechtsgewundenen Schraubenlinie. Dann ist, in Folge der letzten Gleichung:

$$Rs = R \operatorname{tang} \lambda = k, \qquad (114)$$

der Parameter des Complexes, k, positiv. Wenn umgekehrt tang λ negativ ist, ist die gerade Linie Tangente einer demselben Cylinder aufgeschriebenen linksgewundenen Schraubenlinie, und dann ist der Parameter des Complexes, k, negativ. Aus der letzten Gleichung folgt aber, wenn wir in ihr für R beliebige positive Werthe setzen, dass alle Linien eines Complexes Tangenten rechtsgewundener Schraubenlinien sind, wenn eine Linie desselben eine rechtsgewundene Schraubenlinie berührt, so wie, dass alle Linien eines Complexes Tangenten linksgewundener Schraubenlinien sind, wenn eine Linie desselben eine linksgewundene Schraubenlinie berührt. Wir haben also zwei wesentlich verschiedene Arten der Complexe ersten Grades, die wir als rechtsgewundene und linksgewundene Complexe unterscheiden wollen.

Wir können einen Complex ersten Grades auffassen als die Gesammtheit der Tangenten von Schraubenlinien, welche Rotationscylindern aufgeschrieben sind, deren Axen mit der Axe des Complexes zusammenfallen und deren Kreisschnitte Radien haben, welche von 0 bis ∞ wachsen. Für denselben Complex sind alle Schraubenlinien gleich gewunden.

Die Höhe der Schraubengänge, h, ist für jeden Cylinder durch die Gleichung:

$$h = \frac{2\pi R}{\text{tang}\,\lambda} \qquad (115)$$

bestimmt. Eliminiren wir λ zwischen dieser Gleichung und der vorhergehenden, so kommt:

$$h \cdot k = 2\pi R^2, \qquad (116)$$

das heisst: für jeden Cylinder ist das Product der Höhe des Schraubenganges in den Parameter des Complexes der doppelten Fläche seiner Kreisschnitte gleich.

48. Wenn wir einen Complex durch die allgemeine Gleichung:

$$Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F = 0$$

darstellen, so haben wir für den Parameter desselben:

$$k = \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

Der Complex ist also ein rechtsgewundener, wenn:

$$AD + BE + CF > 0, \qquad (117)$$

er ist ein linksgewundener, wenn:

$$AD + BE + CF < 0. \qquad (118)$$

Dem Uebergangsfalle

$$AD + BE + CF = 0 \qquad (119)$$

entspricht, dass die Axe des Complexes von allen Linien desselben geschnitten wird (vergl. Nr. 45.).

In zwei conjugirten Complexen sind die Werthe der Constanten k gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen. Die Schraubenlinien beider Complexe sind entgegengesetzt gewunden. Wir können von zwei conjugirten Complexen, um der Anschauung zu Hülfe zu kommen, jeden als das Spiegelbild des anderen betrachten, wobei wir uns die Ebene des Spiegels senkrecht auf der gemeinsamen Axe der Complexe denken.

In jedem Puncte des Raumes schneiden sich zwei den beiden conjugirten Complexen angehörige, demselben Cylinder aufgeschriebene, entgegengesetzt gewundene Schraubenlinien. Die Tangenten der beiden Schraubenlinien in diesem Puncte sind durch denselben gehende Linien der beiden Complexe. Der Winkel, den sie mit einander bilden, ist $2(\pi - \lambda)$. Es ist aber:

$$\text{tang}\,(\pi - \lambda) = \frac{R}{k}, \qquad (120)$$

mithin die Tangente des Winkels, unter welchem die Linien der beiden Complexe sich schneiden:

$$\operatorname{tang} 2(\pi - \lambda) = \frac{2Rk}{k^2 - R^2} \tag{121}$$

Dieser Durchschnittswinkel nimmt mit dem Abstande des Punctes von der Axe des Complexes zu. Er geht, wenn

$$k = R,$$

durch einen rechten Winkel hindurch, und wird, wenn R dann ferner noch wächst, immer grösser, für $R = \infty$ der Gränze π sich annähernd.

Durch jeden gegebenen Punct geht nur eine einzige Schraubenlinie eines Complexes. Die Tangente dieser Schraubenlinie in dem gegebenen Puncte ist eine Linie des Complexes und liegt demnach in der diesem Puncte entsprechenden Ebene. Durch eine zweite, durch den gegebenen Punct gehende, dem Complex angehörige gerade Linie ist diese Ebene vollkommen bestimmt. Eine solche finden wir in der consecutiven Tangente derselben Schraubenlinie. Die Ebene, welche die beiden Tangenten enthält, ist die Osculations-Ebene der Schraubenlinie in dem gegebenen Puncte.

Die Osculations-Ebene einer Complex-Schraubenlinie in einem ihrer Puncte ist die diesem Puncte entsprechende Ebene.

Die Bestätigung dieses Satzes finden wir darin, dass beide Ebenen einerseits durch die Tangente der Schraubenlinie in dem gegebenen Puncte, andererseits durch dasjenige Perpendikel, welches von diesem Puncte aus auf die Axe gefällt werden kann, gehen.

Wenn ein Punct auf einer von zwei zugeordneten Polaren fortrückt, so entspricht demselben in jeder Lage eine Schraubenlinie und eine Osculations-Ebene derselben, die fortwährend durch die andere Polare geht. Ist die gerade Linie die Seite eines Cylinders, dem Schraubenlinien des Complexes aufgeschrieben sind, mit andern Worten, ein Durchmesser des Complexes, so werden die entsprechenden Osculations-Ebenen unter sich parallel und sind dem Durchmesser zugeordnete Ebenen, in welchen die dem Durchmesser zugeordnete Polare unendlich weit liegt.*)

49. Ich schliesse diese Untersuchungen über Complexe ersten Grades mit einigen allgemeinen Bemerkungen.

So wie wir aus geraden Linien Polygone bilden können, deren Winkel-

*) Wir haben die Constanten in der allgemeinen Gleichung eines Complexes und demnach auch k immer reell genommen. Wenn wir aber mehrere Complexe zusammenstellen, verlangt die Allgemeinheit der Untersuchung, dass wir auch Complexe mit imaginären Constanten berücksichtigen.

puncte in einer gegebenen Ebene liegen, und körperliche Ecken, deren Ebenen durch einen gegebenen Punct gehen, so können wir auch aus Linien eines Complexes ersten Grades gleichzeitig räumliche Polygone und Polyeder bilden, welche sich entsprechen. Die Seiten des räumlichen Polygons sind Kanten des Polyeders. In den Winkelpuncten des Polygons schneiden sich zwei auf einander folgende Seiten desselben, die Ebene, welche durch zwei solche Seiten geht, ist die in dem Complexe dem Winkelpuncte entsprechende Ebene und eine Fläche des Polyeders. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen Polygon und Polyeder sind die bereits in der Note zur 29. Nummer besprochenen.

Wir wollen ein räumliches Polygon, dessen Seiten Linien des Complexes sind, ein Complex-Polygon, das entsprechende Polyeder ein Complex-Polyeder nennen.

Um ein Complex-Polygon zu beschreiben, nehmen wir eine Linie des Complexes und auf ihr einen ersten Winkelpunct des Polygons an. Wie in der Ebene durch einen Punct unendlich viele Linien der Ebene gehen, so gehen auch im Complexe durch einen Punct unendlich viele Linien des Complexes. Auf einer durch den ersten Winkelpunct des Polygons gehenden Complex-Linie nehmen wir den zweiten Winkelpunct, auf einer durch diesen gehendenden Complexlinie den dritten an und so fort. Um das Polygon zu schliessen, legen wir durch den zuletzt bestimmten Punct die diesem Puncte in dem Complexe entsprechende Ebene. Dieselbe schneidet die erste Complex-Linie in einem Puncte. Die Linie, welche beide Puncte verbindet, ist eine Linie des Complexes und schliesst das Polygon. Ein Complex-Polyeder können wir aus dem entsprechenden Complex-Polygon ableiten, oder auch, in analoger Weise wie dieses, direct construiren. Zu diesem Ende betrachten wir eine gegebene Complex-Linie als Kante des Polyeders und legen durch diese Kante die erste Fläche desselben, durch eine beliebige Complex-Linie in dieser Ebene legen wir die zweite Fläche, durch eine beliebige Complex-Linie in der letzteren die dritte, und so fort. In der zuletzt bestimmten Polyederfläche bestimmen wir den, im Complexe, derselben entsprechenden Punct. Diejenige Ebene, welche durch diesen Punct und die erste Complex-Linie geht, schliesst das Polyeder.

Die Seiten eines Complex-Polygons sind gleich orientirt — das heisst, sie sind Tangenten gleichgewundener Schraubenlinien und das hat eine characteristische Aufeinanderfolge der Eckpuncte desselben zur Folge. Die

Flächen eines Complex-Polyeders, durch zwei orientirte Kanten desselben gehend, sind in gleichem Sinne gedreht. Polygone und Polyeder können wir, je nachdem sie rechts- oder linksgewundenen Complexen angehören, für sich selbst als rechts- oder linksgewundene bezeichnen. Das Spiegelbild — wir bedienen uns der früheren Anschauungsweise und nehmen wiederum die spiegelnde Fläche auf der Complex-Axe senkrecht — eines Complex-Polygons oder Complex-Polyeders gehört dem conjugirten Complexe an und ist entgegengesetzt gewunden.

50. Durch eine in der Ebene continuirlich sich bewegende gerade Linie wird eine ebene Curve umhüllt, durch eine gerade Linie, welche um einen ihrer Puncte sich dreht, eine Kegelfläche beschrieben. Durch eine continuirlich sich bewegende gerade Linie, die in allen ihren Lagen einem gegebenen Complexe angehört, wird eine räumliche Curve umhüllt, während von derselben gleichzeitig eine Abwickelungsfläche beschrieben wird. Jene bezeichnen wir als eine Curve, diese als eine Abwicklungsfläche des Complexes ersten Grades.

Wir können jeder gegebenen Fläche unendlich viele Curven in einem gegebenen Complexe aufschreiben. Durch jeden gegebenen Punct der gegebenen Fläche geht eine solche Complex-Curve. Die Tangente der Complex-Curve in diesem Puncte ist diejenige gerade Linie, in welcher die in dem Complexe dem gegebenen Puncte entsprechende Ebene und die Tangential-Ebene der Fläche in diesem Puncte sich schneiden.*)

Es gibt, um in einem Worte Alles zusammenzufassen, wie es eine Geometrie der Ebene gibt, auch eine Geometrie der Complexe ersten Grades.

---

*) Um die allgemeinen Betrachtungen des Textes durch ein einfaches Beispiel zu veranschaulichen, wollen wir als Oberfläche eine Kugel nehmen, deren Mittelpunct in die Axe des Complexes fällt, und deren Radius R ein beliebiger ist. Die dieser Kugel aufgeschriebenen Complex-Curven bilden ein System von Loxodromen, welche die Meridiane der Kugel unter einem Winkel λ schneiden, der durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{k}{R}$$

gegeben ist.

§ 2.

Die Congruenzen zweier linearer Complexe.

51. Die zusammenfallenden Linien zweier Linien-Complexe des ersten Grades bilden eine Linien-Congruenz. Wir können die Linien einer Congruenz als Strahlen und als Axen betrachten und, dem entsprechend, die Congruenz in zwiefacher Weise darstellen, einmal durch das System zweier Gleichungen in Strahlen-Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned}\Omega &\equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho + F'\eta = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

das andere Mal durch das System zweier Gleichungen in Axen-Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned}\Phi &\equiv Dp + Eq + F - Ak + B\pi + C\omega = 0, \\ \Phi' &\equiv D'p + E'q + F' - A'k + B'\pi + C'\omega = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

52. In jedem der beiden Complexe, durch welche die Congruenz bestimmt wird, gehen durch einen gegebenen Punct unendlich viele Linien, die in der dem Puncte entsprechenden Ebene liegen. Die Durchschnittslinie der beiden dem gegebenen Puncte entsprechenden Ebenen ist die einzige Linie, welche durch diesen Punct geht und beiden Complexen zugleich, also der Congruenz angehört. Durch jeden Punct des Raumes geht eine einzige gerade Linie, von der wir sagen, dass sie, in der Congruenz, dem Puncte entspreche.

In jedem der beiden Complexe liegen innerhalb einer gegebenen Ebene unendlich viele Linien, die in dem der Ebene entsprechenden Puncte sich schneiden. Diejenige gerade Linie, welche in der gegebenen Ebene die beiden entsprechenden Puncte verbindet, ist die einzige, welche in dieser Ebene liegt und beiden Complexen zugleich, also der Congruenz angehört. In jeder den Raum durchziehenden Ebene liegt eine einzige gerade Linie, von der wir sagen, dass sie, in der Congruenz, der Ebene entspreche.

Die beiden vorstehenden Relationen, von welchen eine die nothwendige Folge der anderen ist, können wir als die geometrische Definition einer Congruenz linearer Complexe ansehen.

53. Bei der Bestimmung einer Congruenz können wir die beiden gegebenen Complexe:

$$\Omega = 0, \qquad \Omega' = 0,$$

durch irgend zwei andere ersetzen, welche, bei beliebiger Annahme des unbestimmten Coefficienten μ, durch die folgende Gleichung:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0 \tag{3}$$

dargestellt werden, und dürfen dabei auch Φ und Φ' an die Stelle von Ω und Ω' setzen. Wir sagen, dass alle Complexe, welche durch die vorstehende Gleichung dargestellt werden, und von welchen je zwei die Congruenz bestimmen, eine zweigliedrige Gruppe linearer Complexe bilden.

54. Wir erhalten nach der 31. Nummer für die durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Hauptschnitte der Complexe (3) die Gleichung:

$$Dx + Ey + Fz + \mu(D'x + E'y + F'z) = 0, \tag{4}$$

und diese Gleichung wird für beliebige Werthe von μ befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\begin{aligned} Dx + Ey + Fz &= 0, \\ D'x + E'x + F'z &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Da der Anfangspunct der Coordinaten von vornherein willkürlich angenommen ist, so ist hiermit ausgesprochen, dass in allen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe, welchen die Congruenz angehört, die durch irgend einen gegebenen Punct gehenden Hauptschnitte in derselben geraden Linie sich schneiden. Daraus ergibt sich, weil die Durchmesser eines Complexes auf den Hauptschnitten desselben senkrecht stehen, der folgende Satz:

Die Durchmesser aller Complexe einer zweigliedrigen Gruppe sind derselben Ebene parallel.

55. Zur Bestimmung der Richtungen der Durchmesser erhalten wir die folgende Doppelgleichung:

$$\frac{x}{D + \mu D'} = \frac{y}{E + \mu E'} = \frac{z}{F + \mu F'}, \tag{6}$$

und, wenn wir die Richtungs-Constanten r und s einführen:

$$r = \frac{D + \mu D'}{F + \mu F'}, \qquad s = \frac{E + \mu E'}{F + \mu F'}. \tag{7}$$

Eliminiren wir zwischen diesen Gleichungen μ, so finden wir:

$$(E'F - EF')r - (D'F - DF')s + (D'E - DE') = 0. \tag{8}$$

Durch diese Gleichung ist die Richtung der Ebene bestimmt, welcher die Durchmesser aller Complexe parallel sind. Indem wir für r und s einsetzen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$, erhalten wir die Gleichung:

$$(E'F - EF')x - (D'F - DF')y + (D'E - DE')z = 0, \tag{9}$$

welche in gewöhnlichen Punct-Coordinaten die durch den Anfangspunct gehende Ebene von der bestimmten Richtung darstellt, und hiernach zur Bestimmung der auf dieser Ebene senkrechten Richtung die Doppelgleichung:

$$\frac{x}{E'F-EF'} = -\frac{y}{D'F-DF'} = \frac{z}{D'E-DE'}. \tag{10}$$

Wenn wir der Axe OZ diese Richtung geben, so verschwinden F und F' und in den Complex-Gleichungen (1) wird:

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Dann sind die Durchmesser sämmtlicher Complexe der Gruppe (3) der Ebene XY parallel.

56. Wenn eine der folgenden drei Bedingungs-Gleichungen:

$$D'E - DE' = 0, \qquad D'F - DF' = 0, \qquad E'F - EF' = 0 \tag{12}$$

besteht, so liegt die gerade Linie, in der die durch den Anfangspunct gehenden Hauptschnitte aller Complexe der Gruppe sich schneiden, bezüglich in einer der drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ. Die Durchmesser sämmtlicher Complexe sind dann einer Ebene parallel, welche bezüglich durch OZ, OY, OX geht. Werden die drei Bedingungsgleichungen (12) gleichzeitig befriedigt, so löst sich der Widerspruch, dass eine Ebene gleichzeitig den drei Coordinaten-Axen parallel wird, dadurch, dass jede Bestimmung über diese Ebene fortfällt. Dann befindet sich unter den Complexen der Gruppe (3) einer, entsprechend:

$$\mu = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} = -\frac{F}{F'},$$

für dessen Gleichung wir die folgende nehmen können:

$$(A'D - AD')r + (B'D - BD')s + (C'D - CD') = 0. \tag{13}$$

Alle Linien dieses Complexes sind der durch die Gleichung:

$$(A'D - AD')x + (B'D - BD')y + (C'D - CD')z = 0 \tag{14}$$

dargestellten Ebene parallel. Die Congruenz ist in diesem Falle dadurch particularisirt, dass ihre Linien, weil sie sämmtlich auch diesem Complexe angehören, der eben bestimmten Ebene parallel sind. Dabei werden die Axen sämmtlicher Complexe der zweigliedrigen Gruppe einander parallel, wie aus der Doppelgleichung (10) zu ersehen ist. Wir wollen solch eine Congruenz als eine parabolische bezeichnen. Von den folgenden Betrachtungen schliessen wir sie aus und unterwerfen sie später (Nr. 75) einer besonderen Discussion.

Dieser Fall tritt insbesondere auch dann ein, wenn F und F' verschwinden, und überdies:

$$D'E - DE' = 0. \tag{15}$$

57. Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (x^0, y^0) verlegen, so wird das constante Glied in der Gleichung der Complexgruppe (3):

$$(C + Ex^0 - Dy^0) + \mu(C' + E'x^0 - D'y^0).$$

Dieses Glied fällt also aus, wenn der neue Anfangspunct in der Ebene XY auf der durch die Gleichung:

$$(C + Ex - Dy) + \mu(C' + E'x - D'y) = 0 \tag{16}$$

dargestellten geraden Linie angenommen wird. Nehmen wir für diesen Punct den Durchschnitt der beiden geraden Linien:

$$\left.\begin{aligned} C + Ex - Dy &= 0, \\ C' + E'x - D'y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so verschwindet aus der Gleichung aller Complexe der Gruppe das constante Glied. Dann kommt:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Wir haben überhaupt für die allgemeine Gleichung derjenigen Ebenen, welche in den verschiedenen Complexen der Gruppe (3) dem Anfangspuncte entsprechen (Nr. 32.):

$$Ax + By + Cz + \mu(A'x + B'y + C'z) = 0, \tag{19}$$

und diese Gleichung wird, unabhängig von dem jedesmaligen Werthe von μ, befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz &= 0, \\ A'x + B'y + C'z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Alle dem Anfangspuncte entsprechenden Ebenen schneiden sich also auf der durch die beiden Gleichungen dargestellten geraden Linie, und da der Anfangspunct von vorneherein willkürlich angenommen ist, gelangen wir zu dem folgenden Satze:

In den Complexen einer zweigliedrigen Gruppe entsprechen einem gegebenen Puncte Ebenen, welche in derselben Linie sich schneiden.

Dieser Satz ist unmittelbar durch die Zusammenstellung der 52. und 53. Nummer gegeben.

Wenn C und C' verschwinden, schneiden sich die Ebenen, welche in den verschiedenen Complexen der zweigliedrigen Gruppe dem Anfangspuncte entsprechen, auf der Axe OZ.

58. Wenn gleichzeitig F und F', C und C' verschwinden, wird OZ eine gemeinschaftliche Linie aller Complexe und also eine Linie der Congruenz, welche von den Axen aller Complexe geschnitten wird (vergl. Nr. 31.).

In jeder Congruenz gibt es, im Allgemeinen, eine einzige und vollkommen bestimmte gerade Linie, welche von den Axen sämmtlicher Complexe der zweigliedrigen Gruppe, durch welche die Congruenz bestimmt ist, geschnitten wird.

Diese gerade Linie, welche zur Congruenz eine ausschliessliche Beziehung hat, wollen wir die Axe der Congruenz nennen. Indem wir die Functions-Bestimmung der Gleichungen (18) zu Grunde legen, nehmen wir die Axe der Congruenz zur Axe OZ.

Wenn die Bedingungs-Gleichung

$$D'E - DE' = 0$$

besteht, kann die Congruenz im Allgemeinen nicht mehr durch das System der beiden Gleichungen (18) dargestellt werden. Einmal können F und F' nicht ausfallen. Denn die durch den Anfangspunct gehenden Hauptschnitte aller Complexe der zweigliedrigen Gruppe schneiden sich, wenn die obige Bedingungs-Gleichung befriedigt wird, auf einer in der Coordinaten-Ebene liegenden geraden Linie, deren Gleichung die folgende ist:

$$y + \frac{Dx}{E} = y + \frac{D'x}{E'} = 0.$$

Die Durchmesser und insbesondere die Axen aller Complexe der Gruppe sind nach der 54. Nummer einer Ebene parallel, welche auf dieser Linie senkrecht steht. Hiernach kann die Ebene XY den Durchmessern, im Allgemeinen, nicht parallel sein, und daher die Unmöglichkeit des Verschwindens von F und F'. Erst wenn

$$\frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'},$$

das heisst, in dem Falle der parabolischen Congruenz, tritt diese Möglichkeit dadurch wieder ein, dass die Gleichungen (5) identisch werden und, dem entsprechend, alle durch den Anfangspunct gehenden Hauptschnitte in derselben Ebene zusammenfallen. Alle Complex-Axen stehen dann senkrecht auf dieser Ebene und sind demnach, in Uebereinstimmung mit der 56. Nummer, unter einander parallel. Es braucht also nur, damit F und F' ausfallen, die Ebene XY so genommen zu werden, dass sie selbst auf der fraglichen Ebene senkrecht steht, oder was dasselbe heisst, die Axe OZ muss in dieser Ebene liegen, kann aber in derselben jede beliebige Richtung haben.

Aber auch C und C' können, wenn die obige Bedingungs-Gleichung besteht, im Allgemeinen nicht gleichzeitig ausfallen. Dann wird nämlich innerhalb XY die Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten, wodurch dieses Ausfallen bedingt wird, illusorisch und zwar dadurch, dass die beiden geraden Linien (17), in deren Durchschnitt der neue Anfangspunct liegt, parallel werden. (Es kommen hierbei die Werthe von F und F' nicht in Betracht.) Nur wenn gleichzeitig

$$\frac{C}{C'} = \frac{D}{D} = \frac{E}{E'},$$

und in Folge davon die beiden geraden Linien (17) in eine einzige zusammenfallen, können C und C' wiederum durch Verlegung des Anfangspunctes fortgeschafft werden, und zwar können wir zu diesem Ende jeden beliebigen Punct der geraden Linie

$$1 + \frac{Ex}{C} - \frac{Dy}{C} \equiv 1 + \frac{E'x}{C'} - \frac{D'y}{C'} = 0$$

zum neuen Anfangspuncte der Coordinaten nehmen. Wir werden dem Falle, dass die beiden geraden Linien (17) in eine einzige zusammenfallen, später (Nr. 75) begegnen und dann sehen, dass dieses Zusammenfallen in einer besonderen Lage der Congruenz gegen das Coordinaten-System seinen Grund hat.

59. Wenn eine einzelne der drei Bedingungen:

$$A'B - AB' = 0, \quad A'C - AC' = 0, \quad B'C - BC' = 0 \tag{21}$$

befriedigt wird, so liegt diejenige gerade Linie, in welcher alle dem Anfangspuncte entsprechende Ebenen sich schneiden, bezüglich in den Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ. Wenn gleichzeitig zwei dieser Gleichungen und, in Folge davon, alle drei befriedigt werden, so gibt es unter den Complexen der Gruppe (3), entsprechend:

$$\mu = -\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'} = -\frac{C}{C'},$$

einen, dessen Linien sich sämmtlich auf seiner Axe schneiden, und diese Axe geht durch den Anfangspunct. Für die Gleichung desselben können wir

$$-(A'D - AD')\sigma + (A'E - AE')\varrho + (A'F - AF')\eta = 0 \tag{22}$$

nehmen. Diesen Bedingungen wird entsprochen, wenn C und C' verschwinden und gleichzeitig:

$$A'D - AD' = 0. \tag{23}$$

9*

Dann liegt die Axe des Complexes, welche durch den Anfangspunct geht, in der Ebene YZ.

Wenn zugleich C und C', F und F' verschwinden und zugleich die Bedingung (23) erfüllt wird, fällt die Axe des Complexes mit der Coordinaten-Axe OY zusammen. Die Discussion dieser Fälle wird ihre Erledigung später (in Nr. 76.) finden.

60. Die Complexe Ω und Ω' sind irgend zwei, welche wir beliebig aus der Complex-Gruppe (3) genommen haben. Unter den unendlich vielen Complexen der Gruppe befinden sich aber im Allgemeinen solche, die von einer Constanten weniger abhängen und deren sämmtliche Linien die Axe schneiden (vergl. Nr. 45.). Bei der Bestimmung dieser Complexe wollen wir die Functions-Bestimmung (18) zu Grunde legen, was, nach dem Vorstehenden, mit Ausnahme des Falles, dass die Bedingungsgleichungen (12) zugleich bestehen, immer gestattet ist. Dann schneiden alle Axen der Complexe, die nunmehr durch die Gleichung:

$$(Ar + Bs - D\sigma + E\varrho) + \mu(A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho) = 0 \qquad (24)$$

dargestellt werden, OZ unter rechtem Winkel.

Wenn der einem beliebigen Werthe von μ entsprechende Complex von der bezeichneten Art ist, erhalten wir nach der 45. Nummer für die Gleichungen der drei Projectionen seiner Axe die folgenden:

$$(A - Ez) + \mu(A' - E'z) = 0, \qquad (25)$$

$$(B + Dz) + \mu(B' + D'z) = 0, \qquad (26)$$

$$(Ex - Dy) + \mu(E'x - D'y) = 0. \qquad (27)$$

In einem solchen Complexe ist die einem Puncte des Raumes entsprechende Ebene diejenige, welche durch den Punct und die Axe des Complexes, in die alle Durchmesser desselben zusammenfallen (Nr. 45), sich legen lässt. Die Gleichung der dem Anfangspuncte entsprechenden Ebene ist bei unserer Annahme der Coordinaten-Axen die folgende:

$$(Ax + By) + \mu(A'x + B'y) = 0. \qquad (28)$$

In dieser Ebene liegt also die Axe des Complexes.

Wenn wir durch (x, y, z) irgend einen Punct der Axe eines der zu bestimmenden Complexe, die wir auch dadurch definiren können, dass ihre Parameter gleich Null sind, ausdrücken, so bestehen zwischen diesen Coordinaten gleichzeitig die vorstehenden vier Gleichungen. Eliminiren wir Z zwischen (25) und (26), so erhalten wir:

$$(A + \mu A')(D + \mu D') + (B + \mu B')(E + \mu E') = 0. \qquad (29)$$

Dieselbe Gleichung hätten wir durch Elimination von $\frac{y}{x}$ zwischen (27) und (28) erhalten. Sie drückt aus, dass der Parameter des Complexes verschwindet (Nr. 38.). Wir hätten sie von vorneherein aufstellen können.

61. Die letzte Gleichung wird, wenn wir entwickeln:

$$(A'D' + B'E')\mu^2 + [(A'D + AD') + (B'E + EB')]\mu + (AD + EB) = 0. \quad (30)$$

Bezeichnen wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung durch μ^0 und μ_0, so kommt:

$$\mu^0 + \mu_0 = -\frac{(A'D + AD') + (B'E + BE')}{A'D' + B'E'}, \quad (31)$$

$$(\mu^0 - \mu_0)^2 = \frac{[(A'D - AD') + (B'E - BE')]^2 - 4(A'B - AB')(D'E - DE')}{(A'D' + B'E')^2}. \quad (32)$$

Es gibt also in der Complexgruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

zwei Complexe von der besonderen Art, dass in jedem derselben die Linien auf einer festen Linie, der Axe, sich schneiden. Je nachdem die beiden Werthe von μ^0 und μ_0 reell oder imaginär sind, sind es auch die beiden Complexe und ihre Axen. Wir wollen die Axen der so bestimmten beiden Complexe die beiden Directricen der Congruenz nennen.

Alle Linien einer Congruenz schneiden die Directricen derselben.

62. Nach dem in der vorigen Nummer gewonnenen Resultate können wir nunmehr eine Congruenz dadurch geometrisch definiren, dass sie die Gesammtheit aller Linien ist, welche zwei gegebene feste gerade Linien schneiden. Die gerade Linie, welche in der Congruenz einem gegebenen Puncte entspricht, ist hiernach diejenige, welche durch den gegebenen Punct geht und die beiden Directricen schneidet, die gerade Linie, welche einer gegebenen Ebene entspricht, diejenige, welche in der gegebenen Ebene die Durchschnittspuncte derselben mit den beiden Directricen verbindet.

63. Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (25) und (26) μ eliminiren, so kommt:

$$\frac{A - Ez}{A' - E'z} = \frac{B + Dz}{B' + D'z}, \quad (33)$$

und, wenn wir entwickeln:

$$(D'E - DE')z^2 + [(A'D - AD') + (B'E - BE')]z + (A'B - AB') = 0. \quad (34)$$

Durch die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind die Ebenen bestimmt, in welchen die Directricen der Congruenz liegen, und somit die Puncte, in welchen OZ von den beiden Directricen geschnitten wird.

Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (27) und (28) μ eliminiren, so kommt:

$$\frac{Ex - Dy}{E'x - D'y} = \frac{Ax + By}{A'x + B'y}. \tag{35}$$

Die beiden Werthe, welche diese Gleichung für $\frac{y}{x}$ gibt, sind die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die beiden Directricen der Congruenz in den eben bestimmten Ebenen mit der Richtung von OX machen. Setzen wir:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \vartheta,$$

indem wir diesen Winkel ϑ nennen, so ergibt sich, indem wir entwickeln:

$$(B'D - BD')\operatorname{tang}^2\vartheta + [(A'D - AD') - (B'E - BE')]\operatorname{tang}\vartheta - (A'E - AE') = 0. \tag{36}$$

64. Durch das Zusammenfallen der geraden Linie, welche die beiden Directricen der durch (3) bestimmten Congruenz rechtwinklig schneidet, mit der Coordinaten-Axe OZ haben die Gleichungen der beiden Complexe Ω und Ω', die wir beliebig aus der zweigliedrigen Gruppe ausgewählt, die folgende Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned} Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Wir können noch neue Constante aus dem System der beiden Gleichungen fortschaffen.

Derjenige Punct, welcher auf der Axe OZ in der Mitte zwischen den beiden Directricen liegt, soll der Mittelpunct der Congruenz, der halbe Abstand der beiden Directricen von einander die Constante derselben heissen. Legen wir dann die Ebene XY durch den Mittelpunct der Congruenz, so gibt die Gleichung (34):

$$(A'D - AD') + (B'E - BE') = 0, \tag{38}$$

und hiernach, wenn wir die Constante der Congruenz mit Δ bezeichnen:

$$\Delta = \sqrt{-\frac{A'B - AB'}{D'E - DE'}}. \tag{39}$$

Weil der Fall

$$D'E - DE' = 0$$

von der Discussion einstweilen ausgeschlossen ist, erhält Δ immer einen endlichen Werth.

Die Richtung der beiden Coordinaten-Axen ist bisher unbestimmt geblieben. Bestimmen wir noch nachträglich diese Richtung so, dass sie den

Winkel halbiren, welchen die Richtungen der beiden Directricen mit einander bilden — was auf zwiefache Weise geschehen kann — so gibt die Gleichung (36):

$$(A'D - AD') - (B'E - BE') = 0, \tag{40}$$

und für die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Richtungen der beiden Directricen mit OX bilden:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \pm \sqrt{\frac{A'E - AE}{B'D - BD'}}. \tag{41}$$

Wenn wir den Axen OX und OY die eben bezeichnete Richtung geben und gleichzeitig den Anfangspunct im Mittelpuncte der Congruenz annehmen, bestehen die beiden Bedingungsgleichungen (38) und (40) zugleich und können dann durch die folgenden beiden ersetzt werden:

$$A'D - AD' = 0, \tag{42}$$

$$B'E - BE' = 0. \tag{43}$$

Die beiden Coordinaten-Axen in der so bestimmten Lage wollen wir die beiden Nebenaxen der Congruenz nennen. Sie liegen in der Centralebene der Congruenz und halbiren die Winkel, welche die beiden Projectionen der Directricen auf diese Ebene mit einander bilden.

65. Bei dieser Coordinatenbestimmung ergibt sich:

$$\varDelta = \sqrt{-\frac{A'B'}{D'E'}} = \sqrt{-\frac{AB}{DE}}, \tag{44}$$

$$\operatorname{tang} \vartheta = \pm \sqrt{-\frac{A'E'}{B'D'}} = \pm \sqrt{-\frac{AE}{BD}}. \tag{45}$$

Eine Congruenz ist durch ihre beiden Directricen in linearer Weise bestimmt, und hängt somit von acht von einander unabhängigen Constanten ab. Von diesen finden sich sechs in der Annahme des Coordinaten-Systems wieder, welches dadurch, dass wir die Hauptaxe und die beiden Nebenaxen der Congruenz zu Coordinaten-Axen nehmen, vollkommen bestimmt ist. Die zur weiteren Bestimmung der Congruenz dienenden beiden Complexe (37) hängen noch von sechs unabhängigen Constanten, die in ihren Gleichungen auftreten, ab. Die Anzahl derselben reducirt sich in Gemässheit der beiden Bedingungsgleichungen (42) und (43) auf vier. Unter diesen vier Constanten sind noch zwei überzählige, was seine Erklärung darin findet, dass wir unter den Complexen der zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu \Omega' = 0$$

nicht zwei ausgezeichnete, sondern zwei willkürliche, entsprechend $\mu = 0$

und $\mu = \infty$, Ω und Ω', zur Bestimmung der Congruenz ausgewählt haben. Zwei ausgezeichnete Complexe der Gruppe sind aber diejenigen beiden, welche die beiden Directricen zu Axen haben, das heisst, deren Parameter gleich Null ist. Nehmen wir diese beiden Complexe für Ω und Ω', so ergeben sich die beiden neuen Bedingungs-Gleichungen:

$$AD + BE = 0, \tag{46}$$

$$A'D' + B'E' = 0. \tag{47}$$

Dann bleiben also zur Bestimmung der Congruenz neben den sechs Constanten der Lage noch zwei Constante übrig. Die Anzahl der Constanten ist auf die nothwendige, auf acht, reducirt.

66. Die oben entwickelten Ausdrücke (31) und (32) werden in der neuen Coordinaten-Bestimmung:

$$\mu^0 + \mu_0 = -2 . \frac{AD' + BE'}{A'D' + B'E'}, \tag{48}$$

$$(\mu^0 - \mu_0)^2 = -4 . \frac{(A'B - AB')(D'E - DE')}{(A'D' + B'E')^2}. \tag{49}$$

Die beiden Wurzeln μ^0 und μ_0 sind reell, wenn:

$$(A'B - AB')(D'E - DE') < 0, \tag{50}$$

und imaginär, wenn

$$(A'B - AB')(D'E - DE') > 0. \tag{51}$$

Der vorstehende Ausdruck lässt sich in Gemässheit der Bedingungs-Gleichungen (42) und (43) unter der folgenden Form schreiben:

$$A'B'D'E' \left[\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'}\right]^2 = ABDE \left[\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right]^2.$$

Die Realität der beiden Wurzeln hängt also davon ab, ob die Producte $A'B'D'E'$ und $ABDE$, welche unter einander im Zeichen übereinstimmen, negativ oder positiv sind. Im ersten Falle sind μ^0 und μ_0 reell, und mit ihnen, in Gemässheit von (44) und (45), auch Δ und die beiden Werthe von tang ϑ; im zweiten Falle sind μ^0 und μ_0, Δ und die beiden Werthe von tang ϑ gleichzeitig imaginär.

67. Die beiden Werthe von μ^0 und μ_0 werden einander gleich, wenn eine der beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$A'B - AB' = 0, \qquad D'E - DE' = 0 \tag{52}$$

befriedigt wird. In diesem Falle aber ergibt sich im Allgemeinen unter Berücksichtigung der Gleichungen (42) und (43),

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'}.$$

Dann sind die beiden Complexe Ω und Ω' der zweigliedrigen Gruppe und in Folge davon alle Complexe dieser Gruppe identisch dieselben. Die Bestimmung der Congruenz wird illusorisch.

Dadurch werden scheinbare Widersprüche gelöst.

68. Es gibt aber auch besondere Fälle, wo die Gleichungsformen (18) ihre Bedeutung behalten, obgleich die beiden Werthe μ^0 und μ_0 einander gleich werden. Im Allgemeinen bedingen die beiden Gleichungen (42) und (43) in Verbindung mit einer der beiden Gleichungen (53) die zweite der letztgenannten Gleichungen. Sind aber etwa

$$A \text{ und } A'$$

gleich Null, so findet dies nicht mehr statt; dann haben wir es mit einer wirklichen Congruenz zu thun, die von besonderer Art ist.

In diesem Falle verschwinden nämlich nach (44) und (45) sowohl Δ, als tang ϑ. Es fallen also die beiden Directricen der Congruenz in eine gerade Linie zusammen. In Uebereinstimmung hiermit verschwindet in dem Werthe (49) für $(\mu^0 - \mu_0)^2$ der Zähler, während der Nenner einen endlichen Werth behält.

Wir können in unserem Falle für die Gleichung der zweigliedrigen Gruppe (37), unter Berücksichtigung der Gleichung (43):

$$B'E - BE' = 0,$$

die folgende nehmen:

$$(Bs + E\varrho) - D\sigma + \mu\,[(Bs + E\varrho) - D'\sigma] = 0 \tag{53}$$

und aus derselben als ausgezeichnete Complexe die folgenden beiden auswählen, deren Gleichungen sind:

$$Bs + E\varrho = 0, \qquad \sigma = 0,$$

und diese Gleichungen in homogenen Coordinaten auch in folgender Weise schreiben:

$$B(y - y') + E(x'z - xz') = 0, \qquad yz' - y'z = 0. \tag{54}$$

Der erste der beiden vorstehenden Complexe hat die Coordinaten-Axe OY zu seiner Axe. Sein Parameter ist $\frac{B}{E}$. Der zweite Complex ist von der besonderen Art, dass sein Parameter gleich Null ist. Seine Axe, die sonach von allen seinen Linien geschnitten wird, fällt in die Coordinaten-Axe OX. In Uebereinstimmung mit (44) und (45) wird also OX Directrix der Congruenz.

Während eine Congruenz im Allgemeinen durch ihre beiden Directricen vollkommen bestimmt ist, muss, in dem speciellen Falle, dass die beiden Directricen in eine gerade Linie zusammenfallen, ausser dieser geraden Linie noch ein neuer Complex der die Congruenz bestimmenden zweigliedrigen Gruppe gegeben sein.*)

In dem Complexe, dessen Gleichung die folgende ist:

$$B(y - y') + E(x'z - xz') = 0,$$

entspricht irgend einem Puncte der Coordinaten-Axe OX die Ebene:

$$By + Ex'z = 0,$$

wobei x' den Abstand des Punctes von dem Anfangspuncte bezeichnet. Für irgend einen anderen Complex der zweigliedrigen Gruppe (53) finden wir dieselbe Ebene, weil für alle auf OX liegende Puncte y' und z' verschwinden. Diese Ebene geht durch OX. Sonach schliessen wir:

Fallen in einer Congruenz die beiden Directricen in eine gerade Linie zusammen, so ist diese Linie selbst eine gemeinschaftliche Linie aller Complexe, das heisst, eine Linie der Congruenz.

Wir erhalten also eine Congruenz der fraglichen Art, wenn wir in einem Complexe alle diejenigen Linien nehmen, die eine feste Linie desselben schneiden. Wenn ein Punct auf einer Linie eines Complexes fortrückt, so dreht sich die ihm entsprechende Ebene um dieselbe (Nr. 28). Es gehen also durch jeden Punct derjenigen geraden Linie, in welche die beiden Directricen zusammenfallen, unendlich viele Linien der Congruenz, die sämmtlich einer Ebene angehören, die ihrerseits durch diese gerade Linie geht. Rückt der Punct auf einer geraden Linie fort, so dreht sich die Ebene um dieselbe. Die Beziehung zwischen Punct und Ebene ist eine vollkommen gegenseitige.

Indem wir weiter particularisiren, sei

$$A, A', B \text{ und } B'$$

gleich Null. Dann verschwindet nach (44) Δ, während tang ϑ nach (45) unter der Form $0/0$ auftritt und, weil zwischen den verschwindenden Coef-

---

*) Der Grund davon liegt darin. dass eine gerade Linie vier Constanten repräsentirt, während eine Congruenz, die, wie die vorliegende, durch eine Bedingung particularisirt ist, von sieben abhängt. Die drei noch übrigen Constanten finden wir in dem zweiten gegebenen Complex, der darum nur von drei willkürlichen Constanten abhängt, weil er an die zwei Bedingungen geknüpft ist, dass seine Axe die gerade Linie, in welche die beiden Directricen der Congruenz zusammenfallen, schneidet, und zwar senkrecht schneidet.

ficienten keine Relation besteht, unbestimmt wird. Damit in Uebereinstimmung nehmen in dem Ausdrucke (49) für $(\mu^0 - \mu_0)^2$ Zähler und Nenner zugleich den Werth Null an.

Eine jede Linie, welche in der Coordinaten-Ebene XY durch den Anfangspunct geht, ist eine Directrix der Congruenz.

Für die Gleichung der die Congruenz bestimmenden zweigliedrigen Gruppe nehmen wir die folgende, in der nur von einander abhängige Coefficienten vorkommen:

$$- D\sigma + E\varrho + \mu(- D'\sigma + E'\varrho) = 0. \tag{55}$$

Insbesondere können wir aus dieser Gruppe die folgenden beiden Complexe auswählen:

$$\varrho = 0, \qquad \sigma = 0,$$

die, in homogenen Coordinaten ausgedrückt, die nachstehenden Gleichungen haben:

$$x'z - xz' = 0, \qquad yz' - y'z = 0. \tag{56}$$

Danach umfasst die Congruenz einmal alle Linien, die in der Coordinaten-Ebene XY liegen, sodann alle Linien, die durch den Anfangspunct gehen.

Eine jede Linie der Congruenz schneidet sämmtliche Directricen derselben. Die Directricen sind selbst Linien der Congruenz.

Durch einen gegebenen Punct geht im Allgemeinen eine einzige Linie der fraglichen Congruenz: die Verbindungslinie desselben mit dem Anfangspuncte. Liegt insbesondere der gegebene Punct in XY, so gehen durch denselben unendlich viele Linien der Congruenz, welche sämmtlich der genannten Coordinaten-Ebene angehören. Rückt der in der Ebene XY angenommene Punct insbesondere in den Anfangspunct, so gehört jede durch denselben gehende gerade Linie der Congruenz an.

Andererseits liegt, im Allgemeinen, in jeder gegebenen Ebene eine Linie der Congruenz: die Durchschnittslinie derselben mit der Coordinaten-Ebene XY. Geht insbesondere die gegebene Ebene durch den Anfangspunct, so liegen in derselben unendlich viele Linien der Congruenz, welche sämmtlich durch den genannten Punct laufen. Fällt die durch den Anfangspunct gelegte Ebene insbesondere mit der Coordinaten-Ebene XY zusammen, so gehört jede in derselben liegende gerade Linie der Congruenz an.

69. Wir haben im Vorstehenden die Hauptaxe einer Congruenz und

die beiden Nebenaxen derselben zu Coordinaten-Axen genommen und hiernach die Congruenz durch die folgenden beiden Complex-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

unter der Voraussetzung, dass:

$$A'D - AD' = 0, \tag{42}$$

$$B'E - BE' = 0, \tag{43}$$

dargestellt und zur geometrischen Bestimmung der Congruenz erhalten:

$$\Delta^2 = -\frac{AB}{DE}, \tag{44}$$

$$\operatorname{tang}^2 \vartheta = -\frac{AE}{BD}. \tag{45}$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen unentschieden, ob diejenige Directrix der Congruenz, welcher $+ \operatorname{tang} \vartheta$ entspricht, die Hauptaxe derselben in einem Puncte schneidet, für welchen $z = +\Delta$ oder $z = -\Delta$ ist, wonach die andere Directrix, welcher $- \operatorname{tang} \vartheta$ entspricht, die Axe bezüglich in dem Puncte schneidet, dessen z das entgegengesetzte Zeichen hat. Hiermit in Uebereinstimmung, gelangen wir zu denselben Gleichungen (44) und (45), wenn wir in den Gleichungen (37) gleichzeitig das Vorzeichen von A und B und von A' und B', oder, was dasselbe heisst, gleichzeitig das Vorzeichen und D und E und von D' und E' ändern. Indem wir die dieser Vertauschung entsprechenden Complexe durch die Symbole Ω_1 und Ω'_1 bezeichnen, treten die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv Ar + Bs + D\sigma - E\varrho = 0, \\ \Omega'_1 &\equiv A'r + B's + D'\sigma - E'\varrho = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

an die Stelle der früheren. Die beiden Congruenzen, welche durch die beiden Gleichungen-Paare (37) und (57) dargestellt werden, haben denselben Mittelpunct und dieselbe Centralebene, senkrecht auf dieser dieselbe Hauptaxe und in derselben dieselben beiden Nebenaxen. Auch der Abstand der beiden Directricen von einander und die Winkel, welche ihre Richtungen mit einander bilden, sind in beiden Congruenzen gleich. Die Beziehung der beiden Congruenzen zu einander ist eine gegenseitige: es ist, wenn wir die frühere Anschauung einer Spiegelung wieder zu Hülfe nehmen und als spiegelnde Fläche die Ebene XY (oder statt derselben eine andere Coordinaten-Ebene) betrachten, die eine derselben das Spiegelbild der anderen.

Zwei Congruenzen, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, wollen wir zwei conjugirte Congruenzen nennen.

70. Wir haben im Vorstehenden nachgewiesen, dass eine Congruenz gleichzeitig sämmtlichen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe angehört, und dass unter diesen Complexen sich im Allgemeinen zwei von der besonderen Art befinden, deren Parameter gleich Null sind. Die Axe jedes der beiden Complexe wird von sämmtlichen Linien desselben geschnitten, woraus folgt, dass alle Linien der Congruenz, weil sie auch diesen beiden Complexen angehören müssen, die beiden Axen derselben schneiden. Dem entsprechend haben wir diese Axen als die beiden Directricen einer Congruenz definirt. Wir können aber auch die beiden Directricen unter einem anderen Gesichtspuncte auffassen.

71. Eine Congruenz ist dadurch bestimmt, dass ihre Linien gleichzeitig zweien beliebig aus einer zweigliedrigen Complex-Gruppe genommenen Complexen angehören. Die Complexe werden durch die Gleichung:

$$\Omega + \mu \Omega' = 0$$

dargestellt, wenn wir in dieselbe für μ nach einander zwei beliebige Werthe setzen. Dadurch reducirt sich aber die Anzahl der unabhängigen Constanten jeder dieser Gleichungen um eine Einheit. Die Anzahl der Constanten, von welchen die Congruenz abhängt, beträgt hiernach:

$$2\,(5 - 1) = 8,$$

die Summe der Constanten zweier Complexe, deren Constanten sich von fünf auf vier reducirt haben. Wenn eine der Congruenz angehörige Linie gegeben ist, so erhalten wir eine lineare Bedingungsgleichung zwischen den vier Constanten jedes der beiden Complexe, durch welche die Congruenz gegeben ist. Vier gegebene gerade Linien der Congruenz sind zur Bestimmung der beiden Complexe und mithin der Congruenz nothwendig und hinreichend. Durch vier gegebene gerade Linien der Congruenz sind zwei der Congruenz nicht angehörige gerade Linien, welche die vier gegebenen schneiden, bestimmt. Diese Linien hängen von acht Constanten ab; sie bestimmen gegenseitig die vier gegebenen Linien und alle Linien der Congruenz.

Je vier Linien eines Complexes bestimmen eine Congruenz, die dem Complexe angehört. Ist die Congruenz durch vier ihrer Linien gegeben, so ist durch jede fünfte Linie ein Complex bestimmt, welchem die Congruenz angehört. Die beiden Linien, welche die vier gegebenen Linien schneiden, sind einerseits die beiden Directricen der Congruenz, andererseits

seits zwei zugeordnete Polaren jedes Complexes, dem die Congruenz angehört.

Je zwei zugeordnete Polaren eines gegebenen Complexes sind die beiden Directricen einer dem Complex angehörigen Congruenz.

Die beiden Directricen einer gegebenen Congruenz sind zwei zugeordnete Polaren jedes Complexes, dem die Congruenz angehört.

Fallen die beiden Directricen in eine gerade Linie zusammen, so ist diese gemeinschaftliche Linie aller Complexe, also selbst eine Linie der Congruenz (vergl. Nr. 68.).

72. Im Allgemeinen geht durch einen gegebenen Punct nur eine einzige Linie einer gegebenen Congruenz, so wie in jeder Ebene nur eine einzige Linie derselben liegt. Wir können die beiden Directricen als den Ort solcher Puncte betrachten, durch welche unendlich viele Linien der Congruenz gehen, so wie andererseits als den von solchen Ebenen umhüllten Ort, in welchem unendlich viele Linien der Congruenz liegen. Wenn nämlich ein Punct auf einer von zwei zugeordneten Polaren eines Complexes der zweigliedrigen Gruppe angenommen wird, so ist diejenige Ebene, welche durch den Punct und die andere Polare geht, die in dem Complexe dem Puncte entsprechende Ebene. Wenn also die beiden zugeordneten Polaren allen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe gleichzeitig angehören, entspricht jedem Puncte einer der beiden gemeinschaftlichen Polaren in allen Complexen der Gruppe dieselbe Ebene, welche dadurch bestimmt ist, dass sie durch die andere Polare geht. Die Beziehung der beiden Polaren zu den Complexen der Gruppe ist eine durchaus gegenseitige. Wir können auch, umgekehrt, von einer Ebene, welche durch eine der beiden Polaren gelegt ist, ausgehen; dann ist, in allen Complexen der zweigliedrigen Gruppe, der dieser Ebene entsprechende Punct derselbe und zwar der Durchschnitt dieser Ebene mit der anderen Polaren. Während also in einer Congruenz einem gegebenen Puncte im Allgemeinen eine gerade Linie entspricht, entspricht demselben, wenn er insbesondere auf einer der beiden Directricen angenommen wird, eine Ebene, die durch die andere Directrix geht, sowie jeder Ebene, der im Allgemeinen eine einzige gerade Linie entspricht, dann, wenn sie durch eine der beiden Directricen geht, ein Punct entspricht, welcher auf der anderen Directrix liegt.

73. Die vorstehende Definition der Directricen können wir sonach in folgender Weise umschreiben. Sie sind der geometrische Ort solcher Puncte, denen in den verschiedenen Complexen der bezüglichen zweigliedrigen Gruppe dieselbe Ebene entspricht, oder auch als den von solchen Ebenen umhüllten Ort, denen in den verschiedenen Complexen derselbe Punct entspricht. Hieran knüpft sich unmittelbar eine neue analytische Bestimmung der beiden Directricen einer Congruenz, sei es, dass wir von Strahlen-Coordinaten, sei es, dass wir von Axen-Coordinaten Gebrauch machen.

Wir wollen, wie früher (3):

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

für die Gleichung der Complexgruppe nehmen, indem wir in allgemeinster Weise

$$\Omega \equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta,$$
$$\Omega' \equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho + F'\eta$$

setzen. Dann ist die Gleichung derjenigen Ebene, welche in irgend einem durch eine beliebige Annahme des unbestimmten Coefficienten bezeichneten Complexe der Gruppe einem gegebenen Puncte x', y', z' entspricht, die folgende (Nr. 27):

$$\begin{aligned}(A+Fy'-Ez')x+(B-Fx'+Dz')y+(C+Ex'-Dy')z-(Ax'+By'+Cz')\\ +\mu[(A'+F'y'-E'z')x+(B'-F'x'+D'z')y+(C'+E'x'-D'y')z-(A'x'+B'y'+C'z')]\\ =0. \qquad (58)\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird immer, welches auch der Werth von μ sein mag, befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$(A+Fy'-Ez')x+(B-Fx'+Dz')y+(C+Ex'-Dy')z-(Ax'+By'+Cz')=0, \quad (59)$$

$$\begin{aligned}(A'+F'y'-E'z')x+(B'-F'x'+D'z')y+(C'+E'x'-D'y')z-(A'x'+B'y'+C'z')\\ =0. \qquad (60)\end{aligned}$$

Die beiden, durch diese Gleichung dargestellten Ebenen entsprechen in den Complexen Ω und Ω' dem gegebenen Puncte; sie haben mit den, in allen verschiedenen Complexen der Gruppe, demselben Puncte entsprechenden Ebenen eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie. Wenn insbesondere die beiden Ebenen (59) und (60) zusammenfallen, so fallen mit ihnen alle entsprechenden Ebenen (58) zusammen. Damit dies stattfinde, müssen die beiden letzten Gleichungen identisch werden, was unmittelbar die folgenden sechs Relationen liefert:

$$\frac{A+Fy'-Ez'}{A'+F'y'-E'z'} = \frac{B-Fx'+Dz'}{B'-F'x'+D'z'} = \frac{C+Ex'-Dy'}{C'+E'x'-D'y'} = \frac{Ax'+By'+Cz'}{A'x'+B'y'+C'z'}. \quad (61)$$

Die Puncte (x', y', z'), welche durch (61) bestimmt sind, liegen auf den beiden Directricen der Congruenz. Wir wollen ihre Coordinaten als veränderlich betrachten und dem entsprechend fortan die denselben beigefügten Accente fortlassen.

74. Um die Gleichungen (61) geometrisch zu deuten, wollen wir diejenigen Ebenen, welche in den beiden Complexen Ω und Ω' bezüglich den Axen OX, OY, OZ zugeordnet sind, das heisst mit anderen Worten, Puncten entsprechen, welche auf diesen Axen unendlich weit liegen, durch P und P', Q und Q', R und R' und diejenigen Ebenen, welche in den beiden Complexen dem Anfangspuncte entsprechen, durch S und S' bezeichnen. Dann sind die Gleichungen dieser Ebenen:

$$\left.\begin{array}{ll} A + Fy - Ez \equiv p = 0, & A' + F'y - E'z \equiv p' = 0, \\ B - Fx + Dz \equiv q = 0, & B' - F'x + D'z \equiv q' = 0, \\ C + Ex - Dy \equiv r = 0, & C' + E'x - D'y \equiv r' = 0, \\ Ax + By + Cz \equiv s = 0, & A'x + B'y + C'z \equiv s' = 0. \end{array}\right\} \tag{62}$$

Zwischen den linearen Functionen p, q, r, s und p', q', r', s' bestehen die folgenden beiden identischen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} px + qy + rz \equiv s, \\ p'x + q'y + r'z \equiv s'. \end{array}\right\} \tag{63}$$

Gegenseitig ist durch diese beiden identischen Gleichungen die besondere Form der acht linearen Functionen bestimmt.

Die geraden Linien PP', QQ', RR', SS' sind solche vier gerade Linien, welche in der Congruenz denjenigen vier Puncten entsprechen, welche, in Beziehung auf das gewählte Coordinaten-System, eine ausgezeichnete Lage haben, nämlich den drei Puncten, welche nach der Richtung der drei Coordinaten-Axen unendlich weit liegen, und dem Anfangspuncte. Die vier Linien gehören der Congruenz an. Die beiden Directricen der Congruenz sind sonach dadurch vollkommen bestimmt, dass sie diese vier geraden Linien schneiden. Je nachdem diejenige Linienfläche, welche irgend drei der vier geraden Linien PP', QQ', RR', SS' zu Linien einer ihrer Erzeugungen hat, von der vierten dieser Linien geschnitten wird oder nicht, sind die beiden Directricen reell oder imaginär.

Die viertheilige Gleichung (61) wird nach Einführung der acht Symbole:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'} \cdot \tag{64}$$

Sie ergibt sich in Folge der beiden identischen Gleichungen (62) unmittelbar aus der dreitheiligen Gleichung:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}. \tag{65}$$

Diese Gleichung ist also zur Bestimmung der beiden Directricen hinreichend. Sie löst sich in die folgenden drei Gleichungen auf:

$$\left.\begin{aligned} pq' &= p'q, \\ pr' &= p'r, \\ qr' &= q'r, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

welche drei Linienflächen zweiter Ordnung darstellen, die durch die beiden Directricen gehen. In Folge der viertheiligen Gleichung (64) kommen zu diesen drei Linienflächen noch drei neue, durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} ps' &= p's, \\ qs' &= q's, \\ rs' &= r's \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

dargestellte Linienflächen hinzu, welche ebenfalls die beiden Directricen enthalten. Auf diese Weise sind die beiden Directricen dadurch bestimmt, dass auf ihnen irgend zwei der sechs Hyperboloide (66) und (67) sich schneiden.*)

---

*) Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die viertheilige Gleichung (64) das System zweier reellen oder imaginären geraden Linien darstellt, ganz in derselben Weise, wie die dreitheilige Gleichung:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

eine einzige gerade Linie darstellt. Die vorstehende Gleichung enthält noch fünf unabhängige Constante, worunter eine überzählige, welche darauf kommt, dass (x_0, y_0, z_0) ein willkürlicher Punct der dargestellten geraden Linie ist. Die Gleichung (64) enthält, bei der gemachten Functions-Bestimmung, zehn unabhängige Constante, darunter zwei überzählige, die dadurch bedingt sind, dass die beiden Complexe Ω und Ω' durch irgend zwei andere der zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu \Omega' = 0$$

ersetzt werden können.

Es scheint angemessen, dieses Resultat auch direct abzuleiten.

Die Gleichung (65) wird befriedigt, wenn gleichzeitig den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} p &= \lambda p', \\ q &= \lambda q', \\ r &= \lambda r', \end{aligned}$$

welche, entwickelt, in die folgenden übergehen:

$$\left.\begin{aligned} (A - \lambda A') + (F - \lambda F')y - (E - \lambda E')z &= 0, \\ (B - \lambda B') - (F - \lambda F')x + (D + \lambda D')z &= 0, \\ (C - \lambda C') + (E - \lambda E')x - (D + \lambda D')y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Genüge geschieht. Diejenigen Puncte, welche zugleich in den durch diese Gleichungen dargestellten Ebenen liegen, gehören dem Ort an, der durch die Gleichung (65) dargestellt wird. Aber für einen gegebenen Werth von λ widersprechen sich im Allgemeinen die vorstehenden drei Gleichungen. Dieser Widerspruch wird nur dadurch gehoben, dass x, y, z unendlich gross werden und also der bezüg-

Wenn insbesondere C und F, C' und F' gleich Null werden, so gibt die

---

liche Punct unendlich weit rückt. Dann aber ist es nicht gestattet, aus den vorstehenden drei Gleichungen die vierte:

$$s = \lambda s'$$

abzuleiten.

Wenn insbesondere aber:

$$(A - \lambda A')\,(D - \lambda D') + (B - \lambda B')\,(E - \lambda E') + (C - \lambda C')\,(F - \lambda F') = 0, \tag{69}$$

so ist eine der drei fraglichen Gleichungen eine algebraische Folge der beiden anderen: es schneiden sich die drei bezüglichen Ebenen in einer geraden Linie. Da die letzte Gleichung im Allgemeinen zwei Werthe von λ gibt, so gibt es auch zwei solcher geraden Linien. Die Puncte dieser beiden geraden Linien sind die einzigen im Endlichen liegenden Puncte, deren Coordinaten die Gleichung (65) und damit (64) befriedigen. Durch die Gleichung (64) werden also zwei gerade Linien, die beiden Directricen, dargestellt.

Wir wollen, um noch einige Erläuterungen hinzuzufügen, von dem Satze ausgehen, dass zwei Linienflächen zweiter Ordnung und Classe, welche durch zwei gerade Linien gehen, sich ausserdem noch in zwei anderen geraden Linien schneiden. Dieser Satz behält seine Bedeutung auch dann, wenn eine der beiden gegebenen geraden Linien in einer gegebenen Ebene unendlich weit liegt. Die Flächen sind dann nicht mehr zwei einschalige Hyperboloide, sondern zwei hyperbolische Paraboloide, deren Linien einer Erzeugung der gegebenen Ebene parallel sind. Wenn also die sechs Flächen (66) und (67) zwei feste gerade Linien zu Linien einer ihrer beiden Erzeugungen haben, so haben sie, paarweise zusammengestellt, ausserdem noch zwei andere Linien zu gemeinsamen Linien ihrer anderen Erzeugung. Umgekehrt also muss nachgewiesen werden, dass irgend zwei der sechs Linienflächen durch dieselben beiden geraden Linien gehen.

Die erste der drei Gleichungen (66) nimmt, wenn wir zu den Functionen, welche durch die in ihnen vorkommenden Symbole dargestellt werden, wieder zurückgehen, und der Kürze halber:

$$(E'F - EF')x - (D'F - DF')y + (D'E - DE')z \equiv g,$$

$$(A'B - AB') - (A'F - AF')x + (B'F - BF')y + [(A'D - AD') - (B'E - BE')]z \equiv h_2$$

setzen, die folgende Form an:

$$h_2 + gz = 0, \tag{70}$$

wonach die beiden letzten Gleichungen (65) in die folgenden übergehen:

$$\left.\begin{aligned} h_1 + gz &= 0, \\ h + gz &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Die Functionen g sind dieselben in den drei Gleichungen. Die Ausdrücke h_1 und h ergeben sich unmittelbar, wenn wir in h_2 einmal B und B' mit C und C', E und E' mit F und F', so wie unter Zeichenwechsel y mit z vertauschen und das Zeichen von x ändern; das andere Mal A und A' mit C und C', D und D' mit F und F', so wie unter Zeichenwechsel x mit z vertauschen und das Zeichen von y ändern.

Die ursprüngliche Form der drei Gleichungen (66) zeigt, dass die durch diese Gleichungen dargestellten drei Linienflächen paarweise genommen PP', QQ', RR' zu einer gemeinschaftlichen Erzeugenden haben. Die neue Form dieser Gleichungen zeigt, dass diese drei Flächen hyperbolische Paraboloide sind und eine zweite gemeinschaftliche Erzeugende haben, welche in der durch die Gleichung:

$$(E'F - EF')x - (D'F - DF')y + (D'E - DE')z \equiv h = 0$$

dargestellten Ebene unendlich weit liegt. Dieser Ebene sind die drei Linien PP', QQ', RR' parallel.

Die Gleichungen (67) können wir zunächst in folgender Weise entwickeln:

$$\left.\begin{aligned} (pq' - p'q)y + (pr' - p'r)z &= 0, \\ (qr' - q'r)z + (pq' - p'q)x &= 0, \\ (pr' - p'r)x + (qr' - q'r)y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

und dann, nach dem Vorstehenden, auch folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} h_1 z + h_2 y &= 0, \\ hz + h_2 x &= 0, \\ hy + h_1 x &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Gleichsetzung der vier Ausdrücke (61) die beiden Gleichungen (34) und (36), durch welche wir früher die beiden Directricen bestimmt haben.*)

75. Wir wollen an die Gleichungen (61) nachträglich hier nur die Discussion derjenigen beiden Fälle knüpfen, die sich in Folge der besonderen Coordinaten-Bestimmung der früheren Discussion entzogen haben. In dem einen Falle ist:

$$\frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}, \tag{74}$$

in dem andern:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}. \tag{75}$$

In dem ersten Falle erhalten wir, wenn wir:

$$\mu = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} = -\frac{F}{F'} \tag{76}$$

setzen, einen Complex, für dessen Gleichung wir jede der folgenden drei unter sich identischen Gleichungen:

Sie stellen drei einschalige Hyperboloide dar, welche, in Gemässheit der ursprünglichen Form dieser Gleichungen, sämmtlich SS' zu einer ihrer gemeinschaftichen Erzeugenden haben. Ueberdies haben diese drei Hyperboloide, in Gemässheit der Form der letzten Gleichung, paarweise zusammengestellt eine zweite gemeinschaftliche Erzeugende. Für die durch die erste und zweite, die erste und dritte, die zweite und dritte Gleichung dargestellten beiden Hyperboloide werden diese Erzeugenden bezüglich durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
z &= 0, \qquad (A'B - AB') - (A'F - AF')x - (B'F - BF')y = 0,\\
y &= 0, \qquad (A'C - AC') + (A'E - AE')x + (C'E - CE')z = 0,\\
x &= 0, \qquad (B'C - BC') - (B'D - BD')y - (C'D - CD')x = 0
\end{aligned}$$

dargestellt. Die drei zweiten Erzeugenden liegen also bezüglich in den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ und schneiden, im Allgemeinen, die durch den Anfangspunct gehende erste Erzeugende SS' nicht. Die beiden gemeinschaftlichen Erzeugenden je zweier der drei Hyperboloide gehören also, wie zu erwarten war, derselben Erzeugung beider Flächen an.

Wenn wir zusammenfassen, gelangen wir zu der folgenden Anschauung:

So wie irgend zwei Ebenen durch ihren Durchschnitt eine gerade Linie bestimmen und unendlich viele Ebenen durch diese gerade Linie gehen, so werden durch zwei einschalige Hyperboloide, welche zwei feste gerade Linien zu Linien einer Erzeugung haben, zwei reelle oder imaginäre Linien als die gemeinschaftlichen Linien der anderen Erzeugung derselben bestimmt. Dieselben beiden geraden Linien sind gemeinschaftliche Erzeugende unendlich vieler solcher Hyperboloide. Irgend zwei gerade Linien des Raumes, welche die beiden gegebenen schneiden, lassen sich auf diese Weise geometrisch bestimmen und, dem entsprechend, unter der gemachten Bestimmung der linearen Functionen durch je zwei der sechs Gleichungen (66) und (67), in welche die viertheilige Gleichung:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'}$$

sich auflöst, analytisch darstellen. Nehmen wir insbesondere zur Bestimmung der beiden geraden Linien zwei der drei Gleichungen (66), so treten in der vorstehenden Construction an die Stelle der beiden Hyperboloide zwei hyperbolische Paraboloide, deren Linien einer Erzeugung einer gegebenen Ebene parallel sind, und die eine dieser Linien gemein haben.

In ein ausführliches Detail einzugehen, ist hier nicht der Ort.

*) Vergl.: On a New Geometry of Space. Phil. Trans. 1865. p. 750.

$$\left.\begin{array}{l}(A'D - AD')r + (B'D - BD')s + (C'D - CD') = 0, \\ (A'E - AE')r + (B'E - BE')s + (C'E - CE') = 0, \\ (A'F - AF')r + (B'F - BF')s + (C'F - CF') = 0\end{array}\right\} \quad (77)$$

nehmen können. Dann sind alle Linien der Congruenz einer Ebene parallel, deren Gleichung wir erhalten, wenn wir in eine beliebige der vorstehenden Gleichungen r und s durch $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ ersetzen. In derselben Ebene liegt eine Directrix unendlich weit: die Durchschnittslinie paralleler Ebenen. Wir haben eine Congruenz, deren eine Directrix unendlich weit liegt, eine parabolische genannt. Zur Bestimmung der nicht unendlich weit liegenden Directrix gibt die paarweise Gleichsetzung der drei ersten Ausdrücke (61):

$$\left.\begin{array}{l}(A'B-AB')-(A'F-AF')x-(B'F-BF')y+[(A'D-AD')+(B'E-BE')]z=0, \\ (A'C-AC')+(A'E-AE')x-[(A'D-AD')+(C'F-CF')]y+(C'E-CE')z=0, \\ (B'C-BC')+[(B'E-BE')+(C'F-CF')]x-(B'D-BD')y-(C'D-CD')z=0.\end{array}\right\} (78)$$

Diese drei Gleichungen stellen drei durch die Directrix gehende Ebenen dar. Wenn insbesondere F und F' verschwinden, reduciren sich die fraglichen Bedingungen auf:

$$D'E - DE' = 0.$$

Dann erhalten wir für die Ebene, welcher die eine Directrix parallel ist, die unter sich identischen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(A'D - AD')x + (B'D - BD')y + (C'D - CD')z = 0, \\ (A'E - AE')x + (B'E - BE')y + (C'E - CE')z = 0,\end{array}\right\} \quad (79)$$

und für die Gleichungen der anderen:

$$\left.\begin{array}{l}(A'B - AB') + [(A'D - AD') + (B'E - BE')]z = 0, \\ (A'C - AC') + (A'E - AE')x - (A'D - AD')y + (C'E - CE')z = 0, \\ (B'C - BC') + (B'E - BE')x - (B'D - BD')y - (C'D - CD')z = 0.\end{array}\right\} \quad (80)$$

Die nicht unendlich weit liegende Directrix ist also der Ebene XY parallel.

Die fraglichen Bedingungen werden insbesondere auch befriedigt, wenn gleichzeitig D und D', E und E' verschwinden. Dann liegt eine Directrix in der früheren Ebene unendlich weit, die nun durch die Gleichung:

$$(A'F - AF')x + (B'F - BF')y + (C'F - CF')z = 0 \quad (81)$$

dargestellt wird. Für die andere Directrix kommt:

$$\left.\begin{array}{l}(A'B - AB') - (A'F - AF')x - (B'F - BF')y = 0, \\ y = \dfrac{A'C - AC'}{C'F - CF'}, \\ x = -\dfrac{B'C - BC'}{C'F - CF'}.\end{array}\right\} \quad (82)$$

Dieselbe ist also der Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, dessen Coordinaten durch die letzten beiden Gleichungen bestimmt werden. Wenn wir diese Coordinaten-Werthe in die erste der letzten drei Gleichungen einsetzen, so wird diese Gleichung in Folge der identischen Gleichung:

$$(A'B-AB')(C'F-CF')+(B'C-BC')(A'F-AF')-(A'C-AC')(B'F-BF')=0$$

befriedigt.

Wenn insbesondere:

$$(A'D-AD')+(B'E-BE')+(C'F-CF')=0, \tag{83}$$

so particularisirt sich die parabolische Congruenz. Alsdann werden die drei Ebenen (78), durch deren Durchschnitt die im Endlichen liegende Directrix der Congruenz bestimmt wurde, unter sich und mit der Ebene parallel, in welcher die zweite Directrix unendlich weit liegt.

Die beiden Directricen der parabolischen Congruenz fallen im Unendlichen in eine gerade Linie zusammen.

Wir gehen hier nicht weiter auf diese besondere Art von Congruenzen ein, da sie dem ersten in der 68. Nummer behandelten Falle vollkommen analog ist.

Die vorstehende Bedingungs-Gleichung (83) wird vermöge (62) insbesondere befriedigt, wenn

$$\left.\begin{aligned} AD+BE+CF&=0,\\ A'D'+B'E'+C'F'&=0. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Alsdann sind sämmtliche Complexe der die Congruenz bestimmenden zweigliedrigen Gruppe von der besonderen Art, dass ihre Parameter verschwinden. In Uebereinstimmung hiermit fallen die drei Ebenen (78) in eine einzige zusammen. Da die Axen aller Complexe, denen eine parabolische Congruenz angehört, unter sich parallel sind, so schliessen wir:

Die Congruenz hat unendlich viele, unter sich parallele Directricen, die in derselben Ebene liegen. In dieser Ebene liegt auch die unendlich weit liegende Directrix.

Dieser Fall entspricht dem zweiten Falle der 68. Nummer. Es ist bloss der gemeinschaftliche Durchschnitt der Directricen unendlich weit gerückt.

76. Wenn die Bedingungs-Gleichungen (63) erfüllt werden, entspricht dem besonderen Werthe des unbestimmten Coefficienten:

$$\mu=-\frac{A}{A'}=-\frac{B}{B'}=-\frac{C}{C'} \tag{85}$$

ein Complex der zweigliedrigen Gruppe, welcher durch eine der drei folgenden unter sich identischen Gleichungen dargestellt wird:

$$\left.\begin{aligned} -(A'D-AD')\sigma+(A'E-AE')\varrho+(A'F-AF')\eta&=0,\\ -(B'D-BD')\sigma+(B'E-BE')\varrho+(B'F-BF')\eta&=0,\\ -(C'D-CD')\sigma+(C'E-CE')\varrho+(C'F-CF')\eta&=0.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Die Axe des Complexes steht auf derjenigen Ebene, welche, wenn wir $-\sigma, \varrho, \eta$ mit x, y, z vertauschen, durch die letzte Gleichung dargestellt wird, im Anfangspuncte senkrecht. Da der Parameter des Complexes gleich Null ist, ist diese Axe eine der beiden Directricen der Congruenz. In Uebereinstimmung hiermit werden die Gleichungen (61) befriedigt, wenn x, y, z gleichzeitig verschwinden. Diese Gleichungen reduciren sich im vorliegenden Falle auf:

$$\frac{A+Fy-Ez}{A'+F'y-E'z}=\frac{B-Fx+Dz}{B'-F'x+D'z}=\frac{C+Ex-Dy}{C'+E'x-D'y}=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}. \tag{87}$$

Sie geben, wenn wir die drei ersten ihrer vier Glieder nach einander dem vierten gleichsetzen:

$$\begin{aligned} (C'F-CF')y-(C'E-CE')z&=0,\\ (C'F-CF')x-(C'D-CD')z&=0,\\ (C'E-CE')x-(C'D-CD')y&=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen, in welchen wir B und A an die Stelle von C schreiben können, lassen sich in folgender Weise zusammenziehen:

$$\frac{x}{C'D-CD'}=\frac{y}{C'E-CE'}=\frac{z}{C'F-CF'}, \tag{88}$$

und stellen die durch den Anfangspunct gehende Directrix dar.

Die Bedingungs-Gleichungen (63) werden insbesondere befriedigt, wenn A und A', B und B' verschwinden. Dann erhalten wir, wenn wir paarweise die drei ersten Ausdrücke (61) einander gleich setzen:

$$\left.\begin{aligned} [(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z]z&=0,\\ [(C'F-CF')+(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z]y&=0,\\ [(C'F-CF')+(E'F-EF')x-(D'F-DF')y+(D'E-DE')z]x&=0.\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Um die vorstehenden drei Gleichungen gleichzeitig zu befriedigen, genügt es,

$$\left.\begin{aligned} z&=0\\ (C'F-CF')+(E'F-EF')x-(D'F-DF')y&=0\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

zu setzen. Die durch diese beiden Gleichungen dargestellte gerade Linie ist die zweite Directrix der Congruenz. Sie liegt in der Coordinaten-Ebene XY.

77. Wenn gleichzeitig
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \qquad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'},$$
so ist die Congruenz eine parabolische, deren nicht unendlich weit liegende Directrix durch den Anfangspunct der Coordinaten geht. Dann wird die Gleichung der durch den Anfangspunct gelegten Ebene, denen die Linien der Congruenz parallel sind, die folgende:
$$Ax + By + Cz = 0.$$
Die durch den Anfangspunct gehende Directrix erhält zu Gleichungen:
$$\frac{x}{D} = \frac{y}{E} = \frac{z}{F},$$
und die auf ihr senkrechte, durch den Anfangspunct gehende Ebene hat die Gleichung:
$$Dx + Ey + Fz = 0.$$

78. Wenn wir particularisiren und
$$A'B - AB' = 0, \qquad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} \tag{91}$$
setzen, sind alle Linien der parabolischen Congruenz einer Ebene parallel, die auf der Coordinaten-Ebene XY senkrecht steht, während ihre Directrix durch den Anfangspunct geht.

Wenn
$$A,\ A',\ B,\ B' = 0, \qquad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}, \tag{92}$$
sind alle Linien der parabolischen Congruenz der Ebene XY parallel.

Wenn
$$D'E - DE' = 0, \qquad F,\ F' = 0, \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \tag{93}$$
liegt die Directrix der parabolischen Congruenz in der Ebene XY.

Wenn
$$D,\ D',\ E,\ E' = 0, \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \tag{94}$$
fällt die Directrix der parabolischen Congruenz in die Coordinaten-Axe OZ.

Wenn
$$A,\ A',\ B,\ B',\ D,\ D',\ E,\ E' = 0, \tag{95}$$
sind die Linien der parabolischen Congruenz der Coordinaten-Ebene XY parallel und ihre Directrix fällt mit der Coordinaten-Axe OZ zusammen. Bei diesen Voraussetzungen wird die Gleichung der zweigliedrigen Complex-Gruppe:
$$(C + F\eta) + \mu(C' + F'\eta) = 0, \tag{96}$$

und alle Complexe der Gruppe werden, bei willkürlicher Annahme von k, durch die Gleichung:

$$\eta + k = 0 \tag{97}$$

dargestellt.*)

Wenn

$$\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'}, \tag{98}$$

so gibt

$$\mu = -\frac{C}{C'} = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} \tag{99}$$

die folgende Gleichung eines Complexes der zweigliedrigen Gruppe:

$$(A'C - AC')r + (B'C - BC')s - (C'F - CF')\eta = 0.$$

Dieser Complex ist von der besondern Art, dass alle seine Linien die Axe desselben schneiden, und diese Axe, eine Directrix der Congruenz, ist hier der Coordinaten-Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, dessen Gleichung in Linien-Coordinaten dieser Ebene die folgende ist:

$$(B'C - BC')t - (A'C - AC')u - (C'F - CF')w = 0.$$

(Vergl. Nr. 45. (95).)

Wenn insbesondere

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}, \tag{100}$$

so fällt eine Directrix der Congruenz mit der Axe OZ zusammen.

Um noch ein letztes Beispiel zu geben, wollen wir:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{F}{F'}, \qquad \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} \tag{101}$$

setzen. Wenn wir dann nach einander

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'} = -\frac{F}{F'}, \\ \mu &= -\frac{C}{C'} = -\frac{D}{D'} = -\frac{E}{E'} \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

nehmen, erhalten wir für die Gleichungen zweier Complexe der Gruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

---

*) Setzen wir für η den Ausdruck $\frac{xy' - x'y}{z - z'}$, so geht die Gleichung des Textes in die folgende über:

$$\frac{x'y - xy'}{z - z'} = k$$

und gibt, wenn k unbestimmt wird, gleichzeitig

$$x'y - xy' = 0, \qquad z - z' = 0.$$

die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}(A'C-AC') - (A'D-AD')\sigma + (A'E-AE')\varrho = 0,\\ (A'C-AC')r + (B'C-BC')s - (C'F-CF')\eta = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Diese beiden Gleichungen reduciren sich auf:

$$\left.\begin{aligned}C - D\sigma + E\varrho = 0,\\ Ar + Bs + F\eta = 0\end{aligned}\right\} \qquad (104)$$

und stellen zwei Complexe der besonderen Art dar, deren Parameter verschwinden. Die Axen der Complexe sind die beiden Directricen der Congruenz. Eine derselben liegt in der Ebene XY und wird in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$C + Ex - Dy = 0 \qquad (105)$$

dargestellt. Die andere ist der Axe OZ parallel und schneidet die Ebene XY in einem Puncte, der, in dieser Ebene, durch die Gleichung:

$$Bt - Au + F = 0 \qquad (106)$$

dargestellt wird (Nr. 33.).

79. Zur analytischen Darstellung einer zweigliedrigen Complex-Gruppe und der dadurch bestimmten Congruenz haben wir uns bisher rechtwinkliger Coordinaten-Axen bedient, und dabei den Mittelpunct der Congruenz zum Anfangspuncte der Coordinaten und zur Axe OZ diejenige Linie genommen, welche die beiden Directricen rechtwinklig schneidet. Indem wir alsdann die beiden Axen OX und OY mit den beiden Nebenaxen der Congruenz zusammenfallen liessen, haben wir auf dem einfachsten Wege die allgemeine Bestimmung derselben in der 69. Nummer erhalten.

Wir können aber auch jede beliebige gerade Linie der Congruenz als Axe OZ und den Punct, in welchem sie die Central-Ebene schneidet, zum Anfangspunct nehmen. Wenn wir dann die beiden Nebenaxen in dieser Ebene parallel mit sich selbst so verschieben, dass sie in dem neuen Anfangspuncte sich schneiden, so halbiren sie, nach wie vor, die Winkel, welche die beiden Directricen, projicirt nach OZ auf die Central-Ebene, mit einander bilden. Es ist klar, dass in der neuen Coordinaten-Bestimmung die Gleichung der Complex-Gruppe die frühere Form behält. Ist der Neigungswinkel der Axe OZ gegen die Ebene XY γ, so tritt an die Stelle von Δ nunmehr $\frac{\Delta}{\sin\gamma}$, das heisst, der Abstand der Durchschnittspuncte der Axe OZ mit den beiden Directricen vom Anfangspuncte der Coordinaten.

Wir können endlich auch, ohne die Form der obigen Gleichung zu ändern, die beiden Axen OX und OY in der Central-Ebene beliebig so annehmen, dass sie mit den Projectionen beider Directricen vier Harmonicalen bilden. Die Axe OZ können wir als einen Hauptdurchmesser, die Axen OX und OY als zwei conjugirte Nebendurchmesser der Congruenz bezeichnen. Die conjugirten Nebendurchmesser bleiben auch dann reell, wenn die beiden Directricen imaginär werden.

Wir haben früher zwei conjugirte Congruenzen dadurch definirt, dass in denselben Axen und Nebenaxen dieselben sind, nur die durch den Scheitel der Axe gehenden Directricen ihre Richtungen gegenseitig vertauschen. Wir können an die Stelle der Axe der Congruenz in dieser Definition einen beliebigen Durchmesser setzen. Dann hat eine Congruenz unendlich viele conjugirte: jedem Durchmesser derselben entspricht eine solche.

80. Das Vorstehende enthält die vollständige Discussion der durch zweigliedrige Complex-Gruppen bestimmten Congruenzen. Wir wollen in dem Folgenden an diese Discussion neue Betrachtungen anknüpfen, welche bestimmt sind, von der Natur solcher Congruenzen ein anschauliches Bild zu geben.

Im Anschluss an die 69. Nummer stelle unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0 \tag{107}$$

einen derjenigen beiden Complexe besonderer Art dar, welche eine der beiden Directricen der Congruenz zu Axen haben. Dann erhalten wir zur Bestimmung der Constanten dieser Gleichung neben den beiden Gleichungen (44) und (45) die folgende:

$$AD + BE = 0. \tag{108}$$

Aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen ergibt sich:

$$\frac{A^2}{D^2} = \Delta^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta, \tag{109}$$

aus (44) und (108):

$$\frac{B^2}{D^2} = \Delta^2. \tag{110}$$

Dividiren wir die beiden letzten Gleichungen in einander und berücksichtigen (108), so ergibt sich

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{E^2}{D^2} = \operatorname{tang}^2 \vartheta. \tag{111}$$

Setzen wir $D = 1$, wonach erst A, B, E absolute Werthe erhalten, und berücksichtigen wir, dass für den Fall reeller Directricen das Product:

$$ABC = \Delta^2 \operatorname{tang}^2 \vartheta$$

nach der 66. Nummer einen positiven Werth erhalten muss, so ergeben sich die folgenden vier möglichen Constanten-Bestimmungen:

$$A = -\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = +\Delta, \qquad E = -\operatorname{tang} \vartheta, \tag{112}$$
$$A = -\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = -\Delta, \qquad E = +\operatorname{tang} \vartheta, \tag{113}$$
$$A = +\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = +\Delta, \qquad E = +\operatorname{tang} \vartheta, \tag{114}$$
$$A = +\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \qquad B = -\Delta, \qquad E = -\operatorname{tang} \vartheta. \tag{115}$$

Die beiden ersten Combinationen, und ebenso die beiden letzten, lassen sich aus einander dadurch ableiten, dass man gleichzeitig die Vorzeichen von Δ und $\operatorname{tang} \vartheta$ ändert. Die beiden ersten Combinationen bestimmen also die fraglichen Complexe der einen, die beiden letzten der anderen von zwei conjugirten Congruenzen. Wir können also, indem wir:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &\equiv \sigma - \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r - \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho + \Delta s = 0, \\ \Xi' &\equiv \sigma - \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r + \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho - \Delta s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

setzen, durch

$$\Xi + \mu \Xi' = 0 \tag{117}$$

die Complex-Gruppe der einen Congruenz, indem wir:

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 &= \sigma + \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r + \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho + \Delta s = 0, \\ \Xi_1' &= \sigma + \Delta \operatorname{tang} \vartheta \cdot r - \operatorname{tang} \vartheta \cdot \varrho - \Delta s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

setzen, durch

$$\Xi_1 + \mu \Xi_1' = 0 \tag{119}$$

die Complex-Gruppe der conjugirten Congruenz darstellen.

81. Es möchte vielleicht nicht unpassend sein, auch noch auf directem Wege die vorstehenden Gleichungen abzuleiten. Unter Beibehaltung der bisherigen Coordinaten-Bestimmung seien die Gleichungen der beiden, als gegeben betrachteten Directricen einer Congruenz:

$$\left.\begin{aligned} y &= \operatorname{tang} \vartheta \cdot x, \qquad & z &= \Delta, \\ y &= -\operatorname{tang} \vartheta \cdot x, \qquad & z &= -\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Es handelt sich darum, die beiden Complexe besonderer Art zu bestimmen, deren Axen mit den beiden Directricen zusammenfallen. Verschieben wir die beiden Complexe mit ihren Axen so, dass diese letztern in die mit der Central-Ebene der Congruenz zusammenfallende Coordinaten-Ebene XY rücken, so erhalten wir die Gleichungen der beiden Complexe in der neuen Lage unmittelbar, wenn wir in den Gleichungen der gegebenen Directricen x und y mit ϱ und σ vertauschen. Auf diese Weise kommt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho, \\ \sigma &= -\operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Wenn wir die Complexe wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückführen, haben wir in der Gleichung des ersten ϱ und σ mit

$$\varrho + \Delta\cdot r \quad \text{und} \quad \sigma + \Delta\cdot s,$$

in der Gleichung des zweiten mit

$$\varrho - \Delta\cdot r \quad \text{und} \quad \sigma - \Delta\cdot s$$

zu vertauschen (Nr. 12.). Nach dieser Vertauschung ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \sigma - \Delta\operatorname{tang}\vartheta\cdot r - \operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho + \Delta\cdot s = 0, \\ \sigma - \Delta\operatorname{tang}\vartheta\cdot r + \operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho - \Delta\cdot s = 0. \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Diese Gleichungen sind dieselben, die wir eben für die erste der beiden conjugirten Congruenzen gefunden haben; die Gleichungen der zweiten erhalten wir durch Aenderung des Vorzeichens von $\operatorname{tang}\vartheta$ (116), (118).

82. Zur Bestimmung der Congruenz können wir an die Stelle der beiden Complexe Ω und Ω' die beiden Complexe Ξ und Ξ' nehmen, und demnach dieselbe Complex-Gruppe, die wir früher durch die Gleichung:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0 \tag{3}$$

dargestellt haben, nunmehr durch die Gleichung:

$$\Xi + \mu\Xi' = 0 \tag{117}$$

darstellen. Diese Gleichung wird, wenn wir entwickeln und der Kürze wegen

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} = \lambda \tag{122}$$

setzen:

$$\sigma - \Delta\operatorname{tang}\vartheta\cdot r - \lambda(\operatorname{tang}\vartheta\cdot\varrho - \Delta\cdot s) = 0. \tag{123}$$

Sie stellt, wenn wir für λ nach einander alle möglichen Werthe einsetzen, die sämmtlichen Complexe der zweigliedrigen Gruppe dar, durch welche die Congruenz bestimmt ist.

Zu diesen Complexen gehören insbesondere zwei, den Werthen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entsprechend, welche, wenn wir der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\operatorname{tang}\vartheta &= k^0, \\ \frac{\Delta}{\operatorname{tang}\vartheta} &= k_0 \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

setzen, durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega^0 &= +\sigma - k^0\cdot r = 0, \\ \Omega_0 &= +\varrho + k_0\cdot s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

dargestellt werden. Die Parameter der beiden Complexe sind k^0 und k_0. Die

Axen derselben fallen mit den beiden Nebenaxen der Congruenz zusammen. Ihr Durchschnitt ist der Mittelpunct der Congruenz. Wir wollen sie, ihrer ausgezeichneten Beziehung zur Congruenz wegen, besonders hervorheben und die beiden Central-Complexe derselben nennen.

Wenn die conjugirte Congruenz an die Stelle der gegebenen tritt, bleiben die Axen der beiden Central-Complexe, die mit den gemeinschaftlichen Nebenaxen der beiden Congruenzen zusammenfallen, dieselben. Auch die absoluten Werthe ihrer beiden Parameter ändern sich nicht, nur ändert sich, in Folge der Zeichenänderung von tang ϑ, gleichzeitig das Vorzeichen beider Parameter.

Die Gleichung der Complexgruppe nimmt hiernach, wenn wir überdies noch der Kürze wegen:

$$\lambda \operatorname{tang} \vartheta = \lambda_0$$

setzen, die folgende einfache Form an:

$$\Omega^0 + \lambda_0 \Omega_0 \equiv (\sigma - k^0 r) + \lambda_0(\varrho + k_0 s) = 0. \tag{126}$$

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} k^0 k_0 &= -\Delta^2, \\ \frac{k^0}{k_0} &= -\operatorname{tang}^2 \vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

und hiernach:

$$\left.\begin{aligned} k^0 - k_0 &= \frac{\Delta}{\sin\vartheta \, \cos\vartheta} = \frac{2\Delta}{\sin 2\vartheta}, \\ k^0 + k_0 &= \frac{-2\Delta}{\operatorname{tang} 2\vartheta}, \\ \frac{k^0 - k_0}{k^0 + k_0} &= -\cos 2\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Hier erhalten wir, zur Bestimmung der Congruenz, ausser den sechs Constanten der Lage die beiden Parameter ihrer Central-Complexe.

83. Wenn wir von den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's - D'\sigma + E'\varrho = 0, \end{aligned} \tag{129}$$

durch welche wir früher die Congruenz bestimmt haben, und zwischen deren Coefficienten, wenn die Nebenaxen der Congruenz zu Coordinaten-Axen OX und OY genommen werden, die Relationen:

$$A'D - AD' = 0,$$
$$B'E - BE' = 0$$

bestehen, ausgehen, so können wir leicht daraus die Gleichung der beiden Central-Complexe ableiten. Zu diesem Ende brauchen wir bloss die beiden

Gleichungen von einander abzuziehen, nachdem wir zuvor einmal die erste derselben mit B', die zweite mit B, das andere Mal die erste derselben mit A', die zweite mit A multiplicirt haben. Auf diese Weise kommt, wenn wir die vorstehenden Bedingungs-Gleichungen berücksichtigen:

$$(B'D - BD')\sigma + (A'B - AB')r = 0,$$
$$(A'E - AE')\varrho + (A'B - AB')s = 0,$$

wonach:

$$\left.\begin{aligned} k^0 &= -\frac{A'B - AB'}{B'D - BD'}, \\ k_0 &= \frac{A'B - AB'}{A'E - AE'}. \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

84. Um unter den Complexen der zweigliedrigen Gruppe einen einzelnen zu bestimmen, den wir durch die Gleichung:

$$Ar + Bs - D\sigma + E\varrho = 0$$

darstellen wollen, müssen wir den Parameter desselben, k, das z desjenigen Punctes, in welchem seine Axe die Axe OZ einschneidet, und den Winkel ω kennen, den die Richtung dieser Axe mit der Richtung der Axe OX bildet. Wir können, bei der Bestimmung dieser Constanten, in gleich einfacher Weise einmal von den beiden Central-Complexen, das andere Mal von den beiden Directricen der Congruenz, als bekannt, ausgehen. Indem wir, dem entsprechend, die letzte Gleichung einmal der Gleichung (126), das andere Mal der Gleichung (123) identisch setzen, ergeben sich die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\ k^0 = -\Delta \operatorname{tang} \vartheta, \\ B &= \lambda_0 k_0 = \lambda \Delta, \\ D &= -1, \\ E &= \lambda_0 = -\lambda \operatorname{tang} \vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Die allgemeinen Gleichungen des vorigen Paragraphen (15), (16) und (53) ergeben für den fraglichen Complex, indem wir C und F gleich Null setzen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \omega &= \frac{E}{D}, \\ z &= \frac{AE - BD}{E^2 + D^2}, \\ k &= \frac{AD + BE}{E^2 + D^2}. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Führen wir k^0, k_0 und λ_0 ein, so kommt:

$$\operatorname{tang} \omega = -\lambda_0, \tag{132}$$

$$z = -\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0{}^2}(k^0 - k_0), \tag{133}$$

$$k = \frac{k^0 + \lambda_0{}^2 k_0}{1+\lambda_0{}^2}, \tag{134}$$

und hieraus, wenn wir λ_0 eliminiren:

$$z = (k^0 - k_0)\sin\omega\cos\omega, \tag{135}$$

$$k = k^0\cos^2\omega + k^0\sin^2\omega, \tag{136}$$

und schliesslich, nach Elimination von ω:

$$z^2 + (k - k^0)(k - k_0) = 0. \tag{137}$$

Wenn wir die Constanten der beiden Directricen einführen, gehen die Gleichungen (135) und (136) in die folgenden über:

$$z = \Delta\cdot\frac{\sin 2\omega}{\sin 2\vartheta}, \tag{138}$$

$$k = -2\Delta\cdot\frac{\sin(\omega+\vartheta)\cdot\sin(\omega-\vartheta)}{\sin 2\vartheta}. \tag{139}$$

Jedem Werthe von ω entspricht ein einziger Werth von z (135), (138) und ein Werth des Complex-Parameters (136), (139). Da aber jedem Werthe von z zwei Richtungen der Complex-Axe und zwei Werthe von k, die reell und imaginär sein können, entsprechen, so gibt es ein Maximum der Entfernung der Complex-Axen von der Central-Ebene. Für dieses Maximum gibt die Gleichung (138) unmittelbar, dem Winkel $\omega = \frac{\pi}{4}$ entsprechend:

$$z = \frac{\Delta}{\sin 2\vartheta} = \tfrac{1}{2}(k^0 - k_0), \tag{140}$$

und gleichzeitig wird nach (136):

$$k = -\frac{\Delta}{\operatorname{tang} 2\vartheta} = \tfrac{1}{2}(k^0 + k_0). \tag{141}$$

85. Die Discussion der vorstehenden analytischen Entwickelungen liefert eine Reihe von geometrischen Resultaten.

Wir haben nach der 64. Nummer der Axe OX eine beliebige derjenigen beiden Richtungen gegeben, welche die von den beiden Directricen einer gegebenen Congruenz gebildeten spitzen und stumpfen Scheitelwinkel halbiren, und die positive Erstreckung dieser Axe beliebig angenommen. Den Winkel rechnen wir von der positiven Erstreckung der Axe OX nach der positiven Erstreckung der Axe OY. Indem wir durch ϑ die Richtung derjenigen der beiden Directricen bezeichnen, die einem positiven Z entspricht, ist hiernach die positive Erstreckung von OY bestimmt. In der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung tritt $(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)$ an die Stelle von ϑ, und demnach (124) vertauschen sich die Werthe von k^0 und k_0 gegenseitig unter Zeichenwechsel. Wir wollen das Coordinatensystem so annehmen, dass OX die spitzen Scheitelwinkel, die in der Central-Ebene der Congruenz von den Projectionen der beiden Directricen gebildet werden, halbirt. Dann ist (128) k^0 positiv, k_0 negativ, und, weil $\operatorname{tang} 2\vartheta > 0$:

$$k^0 + k_0 < 0.$$

Der Parameter des Central-Complexes, dessen Axe in OX fällt, ist k^0 und positiv, der Parameter des Central-Complexes, dessen Axe in OY fällt, ist k_0 und negativ. Absolut genommen ist der Werth des zweiten Parameters grösser als der Werth der ersten.

Wir haben früher bereits neben die gegebene Congruenz eine zweite gestellt, die wir die ihr conjugirte genannt haben (Nr. 69.), und die wir erhalten, wenn die beiden Parameter der Central-Complexe der gegebenen, k^0 und k_0, gleichzeitig ihr Zeichen ändern, oder, was dasselbe heisst, wenn Δ dasselbe bleibt und ϑ sein Zeichen wechselt. Neben die gegebene Congruenz stellt sich noch eine dritte, welche wir die ihr adjungirte nennen wollen, und die man erhält, wenn k^0 und k_0 sich gegenseitig vertauschen und zugleich ihr Zeichen ändern. Dies kommt nach (124) darauf hinaus, $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ an die Stelle von ϑ treten zu lassen. Endlich erhalten wir noch eine vierte Congruenz, welche von der gegebenen unmittelbar abhängt, wenn wir von der gegebenen einmal die conjugirte, dann von dieser die adjungirte nehmen, was darauf hinauskommt, k^0 und k_0 ohne Zeichenwechsel zu vertauschen, oder, was dasselbe heisst, $\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)$ an die Stelle von ϑ zu setzen.

In unserer Annahme ist für die gegebene Congruenz 2ϑ ein spitzer Winkel; für die adjungirte Congruenz ist der entsprechende Winkel $(\pi - 2\vartheta)$ ein stumpfer. Bezeichnen wir zur Unterscheidung die Parameter der beiden Central-Complexe der adjungirten Congruenz durch (k^0) und (k_0), so ist:

$$(k^0) + (k_0) > 0,$$

und da (k^0) positiv, (k_0) negativ ist, hat (k^0) absolut einen grösseren Werth als (k_0).

Die Axe, die Central-Ebene und in ihr die beiden Nebenaxen, so wie der Abstand der beiden Directricen von einander bleiben für sämmtliche vier Congruenzen dieselben.

86. Wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes auf der Axe irgend

eines Complexes der zweigliedrigen Gruppe durch x, y, z bezeichnen, so ist:

$$\cos^2 \omega = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad \sin^2 \omega = \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

wonach die Gleichung (135) in die folgende übergeht:

$$(x^2-y^2)z \pm (k^0-k_0)xy = 0. \tag{142}$$

Diese Gleichung stellt diejenige Linienfläche dar, die von den Axen der Complexe der zweigliedrigen Gruppe, durch welche die Congruenz bestimmt ist, gebildet wird.

Je nachdem wir in der vorstehenden Gleichung das eine oder das andere der beiden Vorzeichen nehmen, bezieht sie sich auf die gegebene oder die dieser conjugirte Congruenz. Soll sie sich auf die gegebene beziehen, so muss, der gemachten Coordinaten-Bestimmung gemäss, nach welcher (k^0-k_0) positiv ist, wenn wir $\frac{y}{x}$ gleich der Tangente des Winkels ϑ, also positiv, nehmen, auch der Werth von z positiv, $= +\varDelta$, werden. Wir müssen also das untere Zeichen wählen und erhalten:

$$(x^2+y^2)z - (k^0-k_0)xy = 0. \tag{143}$$

Die einzige Constante, welche in dieser Gleichung vorkommt, (k^0-k_0), ist die Summe der absoluten Werthe der Parameter der Central-Complexe. Diese Summe ist aber auch (140) das Doppelte des Maximum von z, also gleich der Höhe h der Fläche, die von zwei Ebenen eingeschlossen ist, in deren Mitte die Central-Ebene hindurchgeht. Die Fläche wird von jeder zwischenliegenden Ebene in zwei geraden Linien geschnitten, welche in der Central-Ebene, indem sie mit den beiden Axen der Central-Complexe zusammenfallen, auf einander senkrecht stehen. Wenn sich die schneidende Ebene von der Central-Ebene nach der positiven Seite entfernt, wird der Winkel, welchen sie mit einander bilden, immer kleiner, bis er, in der einen Gränz-Ebene, für $\omega = \frac{\pi}{4}$, verschwindet, und demnach die beiden Linien in eine einzige zusammenfallen. Wenn sich die schneidende Ebene von der Central-Ebene nach der negativen Seite entfernt, wird der Winkel, den die beiden Durchschnittslinien mit einander bilden, ein stumpfer, bis derselbe in der anderen Gränz-Ebene, $\omega = -\frac{\pi}{4}$ entsprechend, gleich π wird und demnach die beiden Durchschnittslinien wieder zusammenfallen. Die Gleichung (135) zeigt, dass die Linien, welche den Winkel der beiden Durchschnittslinien in einer beliebigen, der Central-Ebene parallelen, Ebene halbiren, in denjenigen beiden Ebenen liegen, welche mit den Coordinaten-Ebenen XZ, YZ gleiche Winkel bilden.*)

Da die gegebene Congruenz von zwei Constanten k^0 und k_0, die fragliche Fläche aber nur von einer Constanten, der Differenz jener beiden, abhängt, so steht diese Fläche zu unendlich vielen Congruenzen in der gleichen Beziehung, dass sie der geometrische Ort der bezüglichen Complex-Axen ist. Unter diesen Congruenzen befindet sich auch die der gegebenen adjungirte; denn wir können k^0 und k_0 unter Zeichenwechsel vertauschen, ohne dass die Gleichung der Fläche sich ändert. Diese Fläche steht also in derselben Beziehung zu der gegebenen Congruenz und der ihr adjungirten.

87. Wir wollen die Complexe der zweigliedrigen Gruppe dadurch geometrisch bestimmen, dass wir auf den Axen derselben, welche sämmtlich OZ schneiden, von dieser Axe aus die entsprechenden Parameter unter Berücksichtigung des Vorzeichens, auftragen. Dann erhalten wir eine der in der vorigen Nummer betrachteten Linienfläche aufgeschriebene Curve, durch welche die ganze zweigliedrige Complexgruppe bestimmt wird. Wir wollen diese Curve die characteristische Curve der Congruenz nennen. Es genügt, die Projection dieser Curve auf die Coordinaten-Ebene XY zu kennen: jedem Puncte der Projection entspricht ein einziger reeller Punct der Fläche.

Die Gleichung (136) ist, in Polar-Coordinaten, die Gleichung dieser Projection, wenn wir in ihr k als Leitstrahl und gleichzeitig mit ω als veränderlich betrachten. Diese Gleichung geht, wenn wir:

$$k = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\omega = \frac{x}{k}, \quad \sin\omega = \frac{y}{k}$$

setzen, in die folgende über:

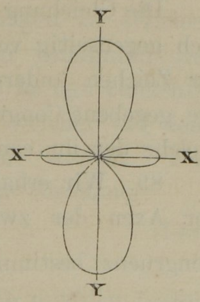
$$(x^2 + y^2)^3 = (k^0 x^2 + k_0 y^2)^2, \tag{144}$$

und stellt dann die projicirte Curve in gewöhnlichen Punct-Coordinaten dar. Diese Gleichung bleibt dieselbe, wenn wir die Zeichen von k^0 und k_0 gleichzeitig ändern. Die durch die Gleichung dargestellte Curve steht also in gleicher Beziehung zu der gegebenen Congruenz und der ihr conjugirten.

---

*) Für die geometrische Anschauung bieten Modelle, die ich von dieser und ähnlichen Flächen habe anfertigen lassen, grosse Erleichterung.

Sie besteht, (Figur 7), aus vier paarweise gleichen Schleifen, die innerhalb der vier von den Projectionen der beiden Directricen gebildeten Scheitelwinkel liegen.



Figur 7.

88. Die Gleichung (137) liefert, wenn wir sie in derselben Weise behandeln, wie in der vorigen Nummer die Gleichung (136), eine neue Fläche, welche durch die eben bestimmte Curve doppelter Krümmung geht. Diese Gleichung formt sich in die folgende um:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + k^0 k_0)^2 = (k^0 + k_0)^2 (x^2 + y^2), \quad (145)$$

und stellt eine Fläche vierter Ordnung dar. Diese Fläche ist eine Umdrehungsfläche, deren Axe OZ ist. Für die Meridian-Curve derselben in der Ebene XZ erhalten wir, indem wir y verschwinden lassen:

$$(x^2 + z^2 + k^0 k_0)^2 = (k^0 + k_0)^2 x^2,$$

und, wenn wir entwickeln:

$$z^2 + (x \pm \frac{k^0 + k_0}{2})^2 = (\frac{k^0 - k_0}{2})^2.$$

Diese Gleichung stellt ein System zweier Kreise dar, deren beiderseitiger Radius:

$$\tfrac{1}{2} (k^0 - k_0) = h \quad (146)$$

ist, und deren Mittelpuncte auf der Axe OX von der Axe OZ nach entgegengesetzter Seite den Abstand:

$$-\tfrac{1}{2} (k^0 + k_0) = c \quad (147)$$

haben. Die beiden Kreise schneiden sich auf OZ in denjenigen beiden Puncten, in welchen diese Axe von den beiden Directricen geschnitten wird.*)

Die neue Fläche wird also durch Umdrehen eines Kreises um die Axe der Congruenz erzeugt. Der Radius desselben ist gleich der halben Höhe der Linienfläche (142). Sein Mittelpunct liegt in der Central-Ebene und dessen Abstand von der Axe OZ ist dem Parameter desjenigen Complexes gleich, dessen Axe in die Begränzungs-Ebene der Linienfläche (142) fällt. Die Rotationsfläche liegt ganz zwischen denselben Ebenen und wird von jeder derselben nach dem Umfange eines Kreises berührt.

---

*) Wir können beiläufig bemerken, dass die Durchschnittspuncte der beiden Directricen mit der Axe der Congruenz die beiden Brennpuncte eines Rotations-Ellipsoids sind, dessen Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Congruenz zusammenfällt, dessen Rotationsaxe in OZ liegt und gleich h ist, während der Radius seines Aequatorialkreises den Werth c hat.

Die Gleichung (145) bleibt ungeändert dieselbe, sowohl wenn k^0 und k_0 sich gegenseitig vertauschen, als auch, wenn beide Constanten gleichzeitig ihr Zeichen ändern. Die Rotationsfläche bezieht sich also gleichzeitig auf die gegebene Congruenz, die ihr conjugirte, die ihr adjungirte und diejenige, welche der ihr conjugirten adjungirt ist.

89. Wir erhalten, wenn wir zusammenfassen, die folgende Bestimmung der Axen der zweigliedrigen Complexgruppe, durch welche die gegebene Congruenz bestimmt wird. Wir haben vorausgesetzt, dass $\vartheta < \frac{\pi}{4}$. Wir wollen von dem Werthe $\omega = 0$ ausgehen, wo die Complexaxe in der Centralebene liegt und der Complex-Parameter sein positives Maximum k^0 erreicht. Wenn ω von 0 bis $+\vartheta$ wächst, entfernt sich die Complexaxe von der Centralebene auf der positiven Seite derselben, während der Complex-Parameter abnimmt. Wenn ω durch ϑ hindurch bis $\frac{\pi}{4}$ wächst, wächst z, der Abstand von der Centralebene, durch Δ hindurchgehend, wo die Complexaxe mit einer Directrix der Congruenz zusammenfällt, bis er sein Maximum $\frac{1}{2}(k^0 - k_0) \equiv h$ erreicht, während der Complex-Parameter, durch Null hindurchgehend, negative Werthe erhält und an der Gränze gleich $\frac{1}{2}(k^0 + k_0) \equiv c$ wird. Fährt die Complexaxe fort, sich um OZ zu drehen, von $\omega = \frac{\pi}{4}$ bis $\omega = \frac{\pi}{2}$, so nähert sich dieselbe wieder der Centralebene, während der negative Werth des Complex-Parameters wächst, bis er in dieser Ebene das Maximum k_0 erreicht. Dauert die Drehung von $\omega = \frac{\pi}{2}$ bis $\omega = \frac{3\pi}{4}$ fort, so entfernt sich die Axe wieder von der Centralebene auf der negativen Seite derselben, bis an der Grenze z sein negatives Maximum $(-h)$ erreicht, während der negative Werth des Complex-Parameters abnimmt und an der Gränze den Werth c erhält. Bei der Drehung von $\omega = \frac{3\pi}{4}$ bis $\omega = \pi - \vartheta$ nähert sich die Axe wieder der Centralebene, bis sie, $z = -\Delta$ entsprechend, mit der zweiten Directrix der Congruenz zusammenfällt, während der negative Complex-Parameter bis zum Verschwinden abnimmt. Vollendet die Axe ihre Drehung um OZ, indem ω von $(\pi - \vartheta)$ bis π wächst, so nähert sie sich wieder der Centralebene, bis sie wieder die Lage annimmt, von der wir ausgegangen sind, während der Complex-Parameter, der sein Zeichen geändert, wächst und in der Centralebene wiederum sein positives Maximum erreicht.

90. Um vollständige Symmetrie in diesen Untersuchungen zu erzielen, müssen wir die gegebene Congruenz gleichzeitig mit den genannten drei anderen betrachten, die unmittelbar von ihr abhängen. Das fordert zunächst, dass wir auf die beiden Linienflächen Rücksicht nehmen, welche, bei dem doppelten Vorzeichen, durch die Gleichung (142) bestimmt werden. Das System dieser beiden Flächen können wir durch die einzige Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 z^2 = (k^0 - k_0)^2 x^2 y^2 \tag{148}$$

darstellen.

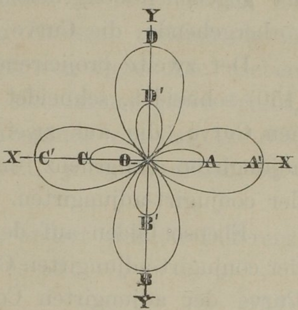
Der vollständige Durchschnitt der Rotationsfläche (145) mit den beiden Linienflächen zerfällt in zwei algebraische Raumcurven, von denen eine auf jeder dieser beiden Flächen liegt. Die Projectionen der beiden räumlichen Durchschnitts-Curven auf die Centralebene decken sich und lösen sich dabei in zwei Curven sechsten Grades auf, von welchen eine durch die frühere Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^3 = (k^0 x^2 + k_0 y^2)^2, \tag{149}$$

die andere durch die folgende:

$$(x^2 + y^2)^3 = (k_0 x^2 + k^0 y^2)^2 \tag{150}$$

dargestellt wird. In der bisherigen Voraussetzung reeller Directricen besteht jede der beiden Curven (Figur 8) aus vier Schleifen, die im Anfangspuncte der Coordinaten einen vierfachen Punct bilden. Wenn man eine der beiden Curven in ihrer Ebene um den Anfangspunct durch einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ dreht, so erhält man die andere.



Figur 8.

Die characteristische Curve der gegebenen Congruenz liegt auf der ersten Linienfläche (142), bildet aber auf derselben keinen vollständigen, in sich abgeschlossenen Zug. Die Projection derselben auf die Centralebene der Congruenz bildet nur die eine Hälfte $AOBOC$ der Curve (149). Sie ist durch zwei Puncte begränzt, die auf OX auf beiden Seiten des Anfangspunctes in gleichem Abstande von demselben liegen.

Die characteristische Curve der adjungirten Congruenz liegt auf derselben Linienfläche, ihre Projection ist die eine Hälfte $A'OB'OC'$ der Curve (150). Sie bricht, analog wie die vorige, in zwei Puncten von OX ab.

Die characteristische Curve der conjugirten Congruenz liegt auf der zweiten Linienfläche (142). Ihre Projection bildet die eine Hälfte $CODOA$ der Curve (149), welche die Projection der characteristischen Curve der gegebenen Congruenz zu der vollständigen Curve (149) ergänzt. Die beiden characteristischen Curven brechen auf OX in denselben beiden Puncten A und D ab.

Die characteristische Curve der conjugirt-adjungirten Congruenz liegt auf der zweiten Linienfläche und ihre Projection bildet die zweite Hälfte $C'OD'OA'$ der Curve (150), welche die Projection der characteristischen Curve der adjungirten Congruenz zu der vollständigen algebraischen Curve ergänzt.

Der projicirende Cylinder, der die Centralebene in der Curve (149) schneidet, schneidet die erste Linienfläche in einer in sich geschlossenen Curve, die aus zwei Theilen besteht, der characteristischen Curve der gegebenen Congruenz und dem Spiegelbilde der characteristischen Curve der conjugirten Congruenz, genommen in Beziehung auf die Centralebene.

Ebenso bilden auf der zweiten Linienfläche die characteristische Curve der conjugirten Congruenz und das Spiegelbild der characteristischen Curve der gegebenen Congruenz eine in sich geschlossene Curve, welche, wie die vorhergehende, die Curve (149) zur Projection hat.

Der zweite projicirende Cylinder, welcher die Centralebene in der Curve (150) schneidet, schneidet die erste Linienfläche in einer in sich geschlossenen Curve, die aus zwei Theilen besteht, der characteristischen Curve der adjungirten Congruenz und dem Spiegelbilde der characteristischen Curve der conjugirt-adjungirten.

Ebenso bilden auf der zweiten Linienfläche die characteristische Curve der conjugirt-adjungirten Congruenz und das Spiegelbild der characteristischen Curve der adjungirten Congruenz eine in sich geschlossene Curve, welche, wie die vorhergehende, die Curve (150) zur Projection hat.

Die so bestimmten vier in sich geschlossenen Curven bilden den vollständigen reellen Theil algebraischer Raumcurven. Jede derselben hat zwei Doppelpuncte, die auf der gemeinschaftlichen Axe der vier Congruenzen in diejenigen beiden Puncte fallen, in welchen diese Axe von den Directricen der Congruenzen geschnitten werden. In diesen beiden Puncten wird jede Raumcurve in vier Zweige getheilt, sodass wir im Ganzen sechszehn solcher Curvenzweige erhalten, welche sämmtlich in den beiden Puncten der Axe auslaufen. Die acht Curvenzweige auf der einen Linienfläche haben mit den acht Curvenzweigen auf der zweiten Linienfläche die acht Schleifen der beiden Curven (149) und (150) zur gemeinschaftlichen Projection. Diejenigen Curvenzweige, welche die grossen Schleifen zur Projection haben, schneiden die Gränzlinien der beiden Linienflächen in Puncten, die gleichen Abstand von der Axe haben; diejenigen Curvenzweige, deren Projectionen die kleineren Ovale sind, schneiden die Axe nicht.

Die vier in sich geschlossenen Curven liegen vollständig auf der durch die Gleichung (145) dargestellten Rotationsfläche.

91. Gehen wir von einer gegebenen Linienfläche (143) aus, so können wir auf ihr die characteristischen Curven unendlich vieler Congruenzen auftragen. Jede dieser Curven ist durch den Durchschnitt mit einer Rotationsfläche bestimmt, welche mit der Linienfläche zwischen denselben Gränzebenen eingeschlossen ist. Diese Gränzebenen berühren die Linienfläche je in einer geraden Linie, die Rotationsfläche je in einem Kreise. Die Richtungen der beiden Berührungslinien, welche die Axe OZ schneiden, stehen auf einander senkrecht; die beiden Berührungskreise haben ihren Mittelpunct auf der Axe und ihre Radien sind einander gleich. Die einzelne Rotationsfläche ist durch diesen Radius vollkommen bestimmt. Dieser Radius ist gleich dem Abstande des Mittelpunctes desjenigen Kreises, welcher durch seine Umdrehung um OZ die Rotationsfläche erzeugt, von dieser Axe. Geben wir dem Mittelpuncte dieses Kreises, dessen Radius sich immer gleich bleibt, in der Centralebene nach einander alle möglichen Abstände von der Axe OZ, so erhalten wir alle möglichen Rotationsflächen und, jeder derselben entsprechend, eine Congruenz.

Wenn wir die frühere Bezeichnung beibehalten, ändert sich die Differenz der Parameter der beiden Central-Complexe nicht, es ist:

$$k^0 - k_0 = 2h, \tag{151}$$

während die Summe dieser Constanten von einer Congruenz zur andern sich so ändert, dass

$$k^0 + k_0 = -2c. \tag{152}$$

Hiernach ist:

$$k^0 = h - c, \qquad k_0 = -(h + c), \tag{153}$$

$$\varDelta^2 = -k^0 k_0 = h^2 - c^2, \tag{154}$$

$$\operatorname{tang}^2 \vartheta = -\frac{k^0}{k_0} = \frac{h - c}{h + c}. \tag{155}$$

Wenn wir also für die Constante c, durch welche die jedesmalige Rotationsfläche bestimmt ist, nach einander alle möglichen positiven Werthe nehmen, so entspricht jedem Werthe dieser Constanten auf der gegebenen Linienfläche eine characteristische Curve. Die den jedesmaligen adjungirten Congruenzen entsprechenden Curven besitzen dieselben absoluten, aber mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen Werthe von c.

92. Wenn $c = 0$, so kommt:

$$k^0 = -k_0 = h = \Delta, \qquad \operatorname{tang}^2 \vartheta = 1. \tag{156}$$

Dann liegen die beiden Directricen in den Ebenen, welche die Linienfläche begränzen und haben den grösstmöglichsten Abstand von der Centralebene. Ihre beiden Richtungen stehen auf einander senkrecht und sind für die beiden adjungirten Congruenzen dieselben. Die Gleichung der Rotationsfläche wird in diesem Falle:

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2. \tag{157}$$

Wenn c wächst, nimmt der absolute Werth des negativen k_0 zu, des positiven k^0 ab. Dann nimmt der Abstand der beiden Directricen von der Centralebene ab und der Winkel, welchen die beiden Richtungen derselben mit einander bilden, entfernen sich immer mehr von rechten Winkeln. Innerhalb der Gränzen $2h$ und 0 können wir den Abstand der beiden Directricen einer Congruenz von einander beliebig annehmen. Der die Rotationsfläche erzeugende Kreis schneidet alsdann die Rotationsaxe in zwei reellen Puncten.

An der Gränze $c = h$ ist:

$$k^0 = 0, \qquad k_0 = -2h, \qquad \Delta = 0, \qquad \operatorname{tang} \vartheta = 0. \tag{158}$$

Der Parameter eines der beiden Central-Complexe ist gleich Null. Die beiden Directricen der Congruenz fallen in der Axe OX zusammen. Der die Rotationsfläche erzeugende Kreis berührt die Rotationsaxe OZ in dem Anfangspuncte der Coordinaten O. Die Gleichung der Rotationsfläche wird:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = h^2 (x^2 + y^2). \tag{159}$$

Die characteristische Curve bestimmt nach wie vor die Parameter und die Axenlagen unendlich vieler Complexe. Dies ist der erste in Nr. 68. behandelte Fall.

Wenn $c > h$, wird k^0 negativ, wie es k_0 ist. Die beiden Directricen der Congruenz, wie ihrer adjungirten, werden imaginär; weder ihre Richtung, noch ihr Durchschnitt mit OZ bleibt reell. Die Rotationsfläche bildet, während der erzeugende Kreis die Axe OZ nicht schneidet, einen vollständigen

Ring, ihre Durchschnittscurve mit der Linienfläche zieht sich um diese Axe, ohne dieselbe zu schneiden.

Wenn der absolute Werth des negativ gewordenen k^0 wächst, nimmt c, die Entfernung des Mittelpunctes des erzeugenden Kreises, immer mehr zu, während das Verhältniss der beiden Parameter der Central-Complexe der Congruenz sich der Einheit nähert. An der Gränze ist:

$$\tang^2 \vartheta = -1. \tag{160}$$

93. Ein ungemein einfaches Verfahren, die characteristischen Curven der sämmtlichen Congruenzen auf die gegebene Linienfläche aufzutragen, können wir der Gleichung:

$$z^2 + (k - k^0)(k - k_0) = 0 \tag{137}$$

entnehmen. Beim Uebergange von einer characteristischen Curve zur anderen wachsen die beiden Constanten k^0 und k_0 um dieselbe Grösse. Hierbei wird, welches auch der Werth von z sein mag, die vorstehende Gleichung immer befriedigt, wenn die Veränderliche k denselben Zuwachs erhält.

Es sei hiernach irgend eine der Linienfläche aufgeschriebene, characteristische Curve gegeben; und für diese können wir insbesondere diejenige nehmen, nach welcher die Linienfläche von einer Kugel geschnitten wird, die die Höhe derselben zu ihrem Durchmesser und den Mittelpunct derselben auch zu dem ihrigen hat. Dann erhalten wir nach einander alle characteristischen Curven, wenn wir alle Durchschnittspuncte der gegebenen Curve mit den Erzeugenden der Linienfläche auf diesen Erzeugenden der Axe um ein constantes Stück sich nähern oder von ihr sich entfernen lassen.

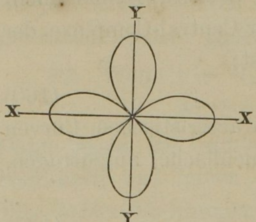
Zu derselben Construction gelangen wir auf geometrischem Wege, wenn wir erwägen, dass eine characteristische Curve der geometrische Ort derjenigen Puncte ist, in welchen die Erzeugenden der Fläche von dem die Rotationsfläche beschreibenden Kreise geschnitten werden, und dass von einer characteristischen Curve zur anderen der Mittelpunct dieses Kreises, dessen Ebene durch OZ geht, der Axe OZ sich nähert oder von ihr sich entfernt.

94. Wenn wir die characteristische Curve zweier conjugirten Congruenzen für den Fall, dass die Rotationsfläche mit einer Kugeloberfläche zusammenfällt, auf die Central-Ebene projiciren, so erhalten wir für die Projection die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^3 = h^2 (x^2 - y^2)^2. \tag{161}$$

Die projicirte Curve hat, wie die allgemeinen Curven (149) oder (150), im

Anfangspuncte einen vierfachen Punct; die vier Schleifen, aus denen sie besteht, sind gleich. Bei unserer Annahme fallen die beiden Curven (149) und (150) in die eine (161) zusammen (Figur 9).



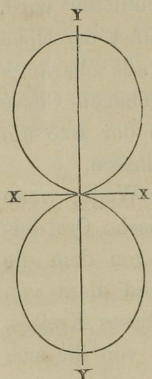
Figur 9.

An dem zweiten Uebergange (Figur 10), wo die beiden Directricen in OX zusammenfallen, gehen die beiden Gleichungen (149) und (150) in die folgenden über:

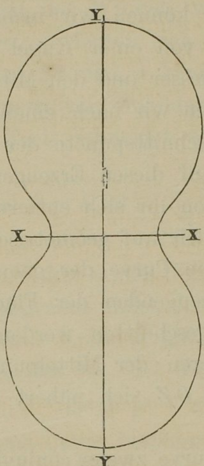
$$(x^2 + y^2)^3 = 4h^2y^4, \tag{162}$$

$$(x^2 + y^2)^3 = 4h^2x^4. \tag{163}$$

Wenn der Werth von ϑ, dem entsprechend, dass c bis $\pm h$ wächst, sich allmählich von $\frac{\pi}{4}$ entfernt, indem er einmal bis zum Verschwinden abnimmt, das andere Mal sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, verschwinden allmählich zwei Schleifen der Curve (161), indem die Puncte, in welchen einmal die Axe OX, das andere Mal die Axe OY von denselben geschnitten wird, dem Puncte O immer näher rücken, während zugleich ihre in O sich schneidenden Tangenten immer mehr sich der bezüglichen Coordinaten-Axe nähern und an der Gränze mit derselben zusammenfallen. Dann besteht die Curve aus zwei gleichen Ovalen, welche eine der beiden Nebenaxen auf entgegengesetzter Seite berühren.



Figur 10.



Figur 11.

Wenn endlich c über h hinauswächst und ϑ imaginär wird, zieht sich dieselbe um den Anfangspunct O herum, in welchem nunmehr 4 isolirte Punkte derselben zusammenfallen (Figur 11).

Die Curven, welche überhaupt durch jede der beiden Gleichungen (149) und (150) bei verschiedener Annahme der Constanten dargestellt werden, ergeben sich, wie die räumlichen Curven, deren Projectionen sie sind, sämmtlich, wenn eine derselben gegeben ist. Wenn wir in der Gleichung:

$$k = k^0 \cos^2\omega + k_0 \sin^2\omega \tag{136}$$

k als Leitstrahl betrachten, so ist diese Gleichung die Gleichung in Polar-Coordinaten derselben Curve, die wir früher durch die Gleichung (149) dargestellt haben. Durch bestimmte Werthe von k^0 und k_0 ist eine dieser Curven gegeben, und wir erhalten alle übrigen, wenn wir diese Constanten um dieselbe Grösse δ wachsen lassen. Dann aber kommt:

$$k + \delta = (k^0 + \delta)\cos^2\omega + (k_0 + \delta)\sin^2\omega, \tag{164}$$

d. h. von einer Curve zur andern wachsen alle Leitstrahlen um δ.

Die Gleichung der Curve (162) wird in Polar-Coordinaten:

$$k = 2h\sin^2\omega, \tag{165}$$

wonach diese Curve auf ausserordentlich einfache Weise mit Hülfe eines Kreises mit dem Durchmesser $2h$ construirt werden kann. Damit ist also die Construction aller Curven (149) und (150) gegeben.

95. Es ist die Discussion der Complexe einer zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0$$

für denjenigen Fall noch rückständig, dass durch diese Gruppe eine parabolische Congruenz bestimmt wird. Zur Bestimmung einer solchen Congruenz ist es hinreichend, ihre einzige Directrix und eine Ebene zu kennen, welcher alle Linien derselben parallel sind. Wir wollen die Directrix als Coordinaten-Axe OX nehmen. Dann befindet sich unter den Complexen der Gruppe einer, dessen Gleichung ist:

$$\sigma = 0. \tag{166}$$

Wir wollen ferner die Coordinaten-Ebene ZX durch OX so legen, dass sie auf der Ebene, der alle Linien der Congruenz parallel sind, senkrecht steht. Dann können wir der Gleichung dieser Ebene die folgende Form geben:

$$x + \lambda z = 0, \tag{167}$$

wobei λ eine gegebene Constante bedeutet. Hiernach erhalten wir:

$$r + \lambda = 0, \tag{168}$$

um einen Complex auszudrücken, der aus Linien besteht, die alle der fraglichen Ebene parallel sind, dem also ebenfalls die Congruenz angehört.

Indem wir die beiden so bestimmten Complexe für Ω und Ω' nehmen, erhalten wir für die Gleichung der Gruppe:

$$\sigma + \mu(r + \lambda) = 0. \tag{169}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass alle Linien der parabolischen Congruenz die Axe OX schneiden und der Ebene (167) parallel sind.

Die Axen der verschiedenen Complexe, welche die parabolische Congruenz bilden, liegen sämmtlich in der Ebene XY und schneiden in dieser Ebene (Nr. 31.) von der Axe OY ein Stück

$$y = -\mu\lambda \tag{170}$$

ab. Der bezügliche Parameter ist:

$$k = -\mu, \tag{171}$$

und hiernach:

$$y = \lambda k \tag{172}$$

die Gleichung der characteristischen Curve der parabolischen Congruenz. Diese Gleichung stellt, wenn wir k von OY aus auf die Complex-Axen, also als x, auftragen, eine gerade Linie in XY dar, welche mit OX denselben Winkel bildet, wie die Ebene (167) mit der Coordinaten-Ebene YZ.

96. Im Anschluss an die geometrischen Betrachtungen der 79. Nummer lassen wir, analog wie es in der 46. Nummer für einen einzelnen Complex geschehen ist, noch einige analytische Entwickelungen folgen, die bezwecken, die Gleichung einer Congruenz auch in schiefwinkligen Coordinaten auf ihren einfachsten Ausdruck zu führen. Es seien:

$$\sigma - k^0 r = 0, \qquad \varrho + k_0 s = 0 \tag{173}$$

die beiden Central-Complexe, durch welche eine Congruenz in rechtwinkligen Coordinaten bestimmt wird. Wir wollen den Anfangspunct in der Central-Ebene in einen beliebigen Punct (x^0, y^0) verlegen. Verschieben wir zu diesem Ende das Coordinaten-System parallel mit sich selbst zuerst in der Richtung von OY um ein Stück y^0, so bleibt die Gleichung des zweiten Complexes, der OY zur Axe hat, unverändert, während die Gleichung des ersten Complexes in die folgende übergeht:

$$\sigma - \frac{k^0}{\sin\delta^0} \cdot r = 0, \tag{174}$$

wobei

$$y^0 \sin\delta^0 - k^0 \cos\delta^0 = 0. \tag{175}$$

Durch diese Verschiebung ist die Axe OX ein Durchmesser der ersten Congruenz geblieben. Dadurch, dass wir die Axe OZ in der Ebene XZ um OY so drehen, dass OX mit OZ in der neuen Lage den Winkel δ^0 bildet, wird YZ die dem Durchmesser OX zugeordnete Ebene und δ^0 ist der Neigungswinkel des Durchmessers gegen seine zugeordnete Ebene. Der Winkel YOZ ist ein rechter geblieben.

Wenn wir hiernach das Axen-System parallel mit OX um eine Strecke x_0 verschieben, so bleibt die Gleichung des ersten Complexes (173) unverändert, während die Gleichung des zweiten Complexes in die folgende übergeht:

$$\varrho + \frac{k_0}{\sin \delta_0} \cdot s = 0, \tag{176}$$

wobei

$$x_0 \sin \delta_0 + k_0 \cos \delta_0 = 0. \tag{177}$$

Der Winkel δ_0 ist hier der Neigungs-Winkel von OY gegen XZ, also des in OY fallenden Durchmessers des Complexes gegen seine zugeordnete Ebene. Der Winkel XOZ ist ein rechter geblieben.

Die Gleichungen der beiden Ebenen, welche in den beiden Complexen OX, dem Durchmesser des ersten, und OY, dem Durchmesser des zweiten Complexes, zugeordnet sind, haben zu Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{cotg} \delta^0 \cdot z, \\ y &= \operatorname{cotg} \delta_0 \cdot z. \end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Nehmen wir endlich für die Axe OZ die Durchschnittslinie der beiden zugeordneten Ebenen, so sind in der analytischen Darstellung die beiden Axen in den OX und OY conjugirten Ebenen YZ und XZ nicht mehr auf einander senkrecht. Bezeichnen wir die Winkel YOZ und XOZ durch ε^0 und ε_0, so ist:

$$\sin \delta^0 \sin \varepsilon^0 = \sin \delta_0 \sin \varepsilon_0 = \sin \delta, \tag{179}$$

indem wir durch δ den Neigungs-Winkel der neuen Axe OZ gegen XY bezeichnen.

Nehmen wir also für OX und OY, indem wir die ursprünglichen Coordinaten-Axen parallel mit sich verschieben, statt der beiden Axen der Central-Complexe irgend zwei Durchmesser derselben und für OZ den Durchschnitt zweier Ebenen, die diesen Durchmessern zugeordnet sind, so werden die Gleichungen dieser Complexe:

$$\sigma - \frac{k^0}{\sin \delta} \cdot r = 0, \qquad \varrho + \frac{k_0}{\sin \delta} \cdot s = 0, \tag{180}$$

und dieselbe Congruenz, die früher durch die Gleichung:

$$(\sigma - k^0 r) + \mu (\varrho + k_0 s) = 0$$

bestimmt wurde, bestimmt sich nun durch die Gleichung von ganz gleicher Form:

$$\left(\sigma - \frac{k^0}{\sin \delta} \cdot r\right) + \mu \left(\varrho + \frac{k_0}{\sin \delta} \cdot s\right) = 0 \tag{181}$$

in dem neuen Coordinaten-Systeme.

97. Eliminiren wir mittelst (175) und (177) aus (178) cotg δ^0 und cotg δ_0, so kommt:

$$\frac{y}{x} = -\frac{k^0 x_0}{k_0 y^0},$$

oder

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{k^0}{k_0}, \tag{182}$$

wenn α und α' die Winkel sind, welche einerseits die Linie, welche den neuen Anfangspunct mit dem alten verbindet, und andererseits die Projection des neuen Hauptdurchmessers der Congruenz mit der Axe OX bilden. Wenn insbesondere $k^0 = k_0$, stehen die beiden Linien für jede Aenderung des Anfangspunctes auf einander senkrecht.

Wir haben:

$$\sin^2\delta = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2\delta^0 + \operatorname{cotg}^2\delta_0},$$

mithin:

$$\frac{1}{\sin^2\delta} = 1 + \operatorname{cotg}^2\delta^0 + \operatorname{cotg}^2\delta_0,$$

und nach Berücksichtigung von (175) und (177):

$$\frac{x_0^2}{k_0^2} + \frac{y^{0\,2}}{k^{0\,2}} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2\delta}, \tag{183}$$

oder:

$$k^{0\,2} x_0^2 + k_0^2 y^{0\,2} = \varDelta^4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}^2\delta}. \tag{184}$$

Es folgt hieraus, dass δ constant ist, wenn der neue Anfangspunct in der Central-Ebene auf einer Ellipse angenommen wird, deren in OX und OY fallende Axen sich wie k_0 zu k^0 verhalten.

Diejenigen Hauptdurchmesser einer Congruenz, welche gleich gegen die Central-Ebene geneigt sind, schneiden diese Ebene in den Puncten einer Ellipse.

98. Durch zwei imaginäre Complexe ist eine imaginäre Congruenz gegeben. Wir wollen, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, die Gleichung:

$$(\sigma - k_1 r\sqrt{-1}) + \mu(\varrho + k_2 s\sqrt{-1}) = 0 \tag{185}$$

für das Symbol einer solchen Congruenz nehmen. Diese Gleichung geht, wenn wir gleichzeitig das Zeichen von k_1 und k_2 ändern, in die folgende über:

$$(\sigma + k_1 r\sqrt{-1}) + \mu(s - k_2 s\sqrt{-1}) = 0. \tag{186}$$

Sie bezieht sich dann noch auf eine zweite immaginäre Congruenz. Die beiden Congruenzen bezeichnen wir, nach Analogie mit dem Früheren, als zwei conjugirte imaginäre Congruenzen. Die Gleichungen der beiden Congruenzen können in die folgende quadratische Gleichung zusammengezogen werden:

$$(\sigma + \mu\varrho)^2 + (k_1 r - \mu k_2 s)^2 = 0. \tag{187}$$

Die beiden Central-Complexe beider Congruenzen sind:

$$\sigma \mp k_1 r \sqrt{-1} = 0, \qquad \varrho \pm k_2 s \sqrt{-1} = 0.$$

Die beiden Congruenzen haben eine reelle gemeinschaftliche Hauptaxe und zwei gemeinschaftliche reelle Nebenaxen. Für beide ist der Abstand der beiden Directricen von einander und der Winkel, den die beiden Directricen bilden, gleich. Wenn wir jenen Abstand $\varDelta$ und diesen Winkel ϑ nennen, so haben wir nach der 82. Nummer:

$$\left.\begin{aligned} k_1 k_2 &= \quad \varDelta^2 \\ \frac{k_1}{k_2} &= -\operatorname{tang}^2 \vartheta \end{aligned}\right\} \tag{188}$$

Wenn k_1 und k im Zeichen übereinstimmen, ist $\varDelta$ reell und tang ϑ imaginär. Dann schneiden die beiden Directricen der einen Congrunenz die beiden Directricen der andern in zwei reellen Puncten der Axe OZ. Die Richtungen der beiden Directricen sind imaginär. Projicirt auf XY werden sie durch die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{k_1} \cdot x \pm \sqrt{-k_2} \cdot y = 0,$$

die in die folgende sich zusammenziehen lassen:

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = 0,$$

dargestellt.

Wenn k_1 und k_2 entgegengesetzte Zeichen haben, wird $\varDelta$ imaginär und tang ϑ bleibt reell. Dann ist die Projection der beiden Directricen auf XY reell, aber die Puncte, in welchen die Axe OZ von denselben geschnitten wird, sind imaginär.

Wenn wir zusammenfassen, sind wir einer vierfachen Unterscheidung von Congruenzen begegnet:

1. Die beiden Directricen sind reell;

2. die beiden Directricen sind imaginär und zwar so, dass sie weder durch einen reellen Punct gehen, noch eine reelle Richtung haben;

3. die beiden Directricen sind imaginär, schneiden aber die Axe der Congruenz in zwei reellen Puncten, durch welche auch die beiden Directricen der conjugirten Congruenz gehen;

4. die beiden Directricen sind imaginär und gehen durch keinen reellen Punct der Axe der Congruenz, haben aber eine reelle Richtung.

In den beiden ersten Fällen sind die Complexe der zweigliedrigen Gruppe, welche die Congruenz bestimmen, reell, in den beiden letzten Fällen imaginär.

§ 3.

Congruenzen dreier linearer Complexe. Linienflächen.

99. Es seien:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' - D'\sigma + E'\varrho + F'\eta = 0, \\ \Omega'' &\equiv A''r + B''s + C'' - D''\sigma + E''\varrho + F''\eta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die allgemeinen Gleichungen dreier gegebener Complexe des ersten Grades. Die geraden Linien, deren Coordinaten diese drei Gleichungen befriedigen, gehören gleichzeitig den drei gegebenen Complexen an. Sie gehören gleichzeitig allen Complexen der dreigliedrigen Gruppe an, welche, indem wir durch μ und μ' zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, durch die folgende Gleichung dargestellt wird:

$$\Omega + \mu\Omega' + \mu'\Omega'' = 0. \qquad (2)$$

Solche Linien bilden nach der 22. Nummer eine Fläche der zweiten Ordnung und Classe, also, wenn wir zunächst nur reelle gerade Linien in's Auge fassen, ein einschaliges Hyperboloid, das auch in ein hyperbolisches Paraboloid ausarten kann. Wir müssen hierbei indess nicht übersehen, dass nur die Linien der einen der beiden Erzeugungen desselben durch die Complex-Gruppe bestimmt werden. Diese Erzeugung wollen wir als die erste Erzeugung der Fläche bezeichnen.

100. Drei aus der dreigliedrigen Gruppe beliebig auszuwählende Complexe Ω, Ω', Ω'' bilden, paarweise genommen, drei Congruenzen $(\Omega\Omega')$, $(\Omega\Omega'')$ und $(\Omega'\Omega'')$. Die Linien der Fläche gehören also auch diesen drei Congruenzen an und schneiden folglich die beiden Directricen jeder der drei Congruenzen. Zur Bestimmung der Fläche sind drei der sechs Directricen hinreichend, wonach wir die gewöhnliche Construction des Hyperboloids erhalten. Aber zugleich begegnen wir neben dieser ersten Erzeugung der Fläche ihrer zweiten Erzeugung. Die Linien der ersten Erzeugung sind diejenigen, welche sämmtlichen Complexen der dreigliedrigen Gruppe angehören, die Linien der zweiten

Erzeugung sind die Directricen aller Congruenzen, die wir erhalten, wenn wir die Complexe der Gruppe paarweise zusammenstellen.

101. Wir können auch, um die Linienfläche zu construiren, zu den Complexen der dreigliedrigen Gruppe zurückgehen, und zu diesem Behufe wiederum die drei Complexe Ω, Ω', Ω'' auswählen. Es sei A^0B^0 irgend eine gegebene gerade Linie und AB, $A'B'$, $A''B''$ seien die drei zugeordneten Polaren dieser Linie in Beziehung auf die drei Complexe. Diejenigen Linien, welche bezüglich A^0B^0 und AB, A^0B^0 und $A'B'$, A^0B^0 und $A''B''$ schneiden, gehören den Complexen Ω, Ω' und Ω'' an. Es gibt im Allgemeinen zwei gerade Linien, welche vier gegebene schneiden. Die beiden geraden Linien also, welche A^0B^0 und gleichzeitig AB, $A'B'$, $A''B''$ schneiden, gehören sämmtlichen drei Complexen, also der Strahlenfläche an. Wir erhalten dieselben beiden Strahlen der Fläche, wenn wir an die Stelle der Complexe Ω, Ω', Ω'' irgend andere Complexe der Gruppe (2) treten lassen. Die Polaren der gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf alle Complexe der Gruppe, bilden eine Congruenz, welche die beiden Strahlen der Fläche zu ihren Directricen hat.

Die beiden Puncte, in welchen die gegebene gerade Linie von den beiden Strahlen der Fläche getroffen wird, können reell und imaginär sein und zusammenfallen. Im letzten Falle wird die Fläche von dieser Linie berührt.

Wir können insbesondere die gerade Linie A^0B^0 so wählen, dass sie eine der beiden Directricen der Congruenz ist, welche den Complexen Ω und Ω' angehört, wonach die Polare $A'B'$ mit AB zusammenfällt. Dann schneidet jeder Strahl der Fläche die beiden Linien A^0B^0 und AB: diese Linien gehören ihrer zweiten Erzeugung an. Zugleich aber schneiden die Strahlen der Fläche auch $A''B''$, so wie die Polaren von A^0B^0, in Beziehung auf alle Complexe der Gruppe.

Wir gelangen, indem wir zusammenfassen, zu folgenden allgemeinen Sätzen:

Ein einschaliges Hyperboloid gehört gleichzeitig dreien von einander unabhängigen Complexen und in Folge davon allen Complexen einer dreigliedrigen Gruppe an. Die allen Complexen gemeinschaftlichen geraden Linien sind die Strahlen seiner ersten Erzeugung, während die Directricen der Congruenzen je zweier dieser Complexe die Linien seiner zweiten Erzeugung bilden.

Die Polaren einer gegebenen geraden Linie in Beziehung auf alle Complexe einer dreigliedrigen Gruppe bilden eine Congruenz, deren beide Directricen diejenigen beiden Strahlen der Fläche sind, welche die gegebene gerade Linie schneiden. Die Polaren einer beliebigen Linie der zweiten Erzeugung der Fläche in Beziehung auf sämmtliche Complexe der Gruppe sind Linien derselben Erzeugung.

102. Die Central-Ebene irgend dreier Congruenzen, denen die Fläche angehört, schneiden sich in einem Puncte, in welchem drei Durchmesser der Congruenzen — diejenigen drei geraden Linien, welche durch diesen Punct gehen und die beiden Directricen der drei Congruenzen schneiden — sich gegenseitig halbiren. Diese Durchmesser sind zugleich drei Durchmesser der Fläche. Ihre Scheitel sind die Durchschnitte derselben mit den Directricen, die Linien der zweiten Erzeugung der Fläche sind.

Die Central-Ebenen aller Congruenzen einer dreigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu\Omega' + \mu'\Omega'' = 0$$

schneiden sich in demselben Puncte: in dem Mittelpuncte der Fläche, welche durch die Gruppe gegeben ist.*)

---

*) Da ein directer Beweis dieses Satzes wünschenswerth erscheinen möchte, so füge ich Folgendes hinzu:

Der Ausdruck:

$$A'B - AB'$$

verwandelt sich, wenn wir an die Stelle der beiden Complexe Ω und Ω' irgend zwei andere der zweigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \lambda\Omega' = 0,$$

etwa die den Werthen λ^0 und λ_0 entsprechenden nehmen, in den folgenden:

$$(A + \lambda_0 A')(B + \lambda^0 B') - (A + \lambda^0 A')(B + \lambda_0 B') \equiv (\lambda_0 - \lambda^0)(A'B - AB').$$

Der vorstehende Ausdruck — und dasselbe gilt gleichmässig für alle Ausdrücke, $A'C - AC'$, $B'C - BC'$, ..., welche in gleicher Weise aus zwei Paaren sich entsprechender Coefficienten der Gleichungen der beiden Complexe Ω und Ω' gebildet sind — ändert also nach der Vertauschung der Complexe seinen Werth nur dadurch, dass ein Factor $(\lambda_0 - \lambda^0)$ hinzutritt, welcher lediglich von der Auswahl der beiden Complexe aus der zweigliedrigen Gruppe abhängt.

Die Central-Ebene der der zweigliedrigen Gruppe entsprechenden Congruenz, für deren Gleichung wir die folgende nehmen wollen:

$$p'' = 0,$$

ist unabhängig von der Auswahl der beiden Complexe, die wir zur Bestimmung der Congruenz anwenden. In Folge davon müssen die Coefficienten ihrer Gleichung homogene Functionen desselben Grades von $(A'B - AB')$ und entsprechend gebildeter Ausdrücke: $(A'C - AC')$, $(B'C - BC')$, ..., sein.

Aehnliches gilt für die beiden Congruenzen:

$$\Omega + \lambda\Omega'' = 0, \qquad \Omega' + \lambda\Omega'' = 0,$$

deren Central-Ebenen die folgenden Gleichungen haben mögen:

$$p' = 0, \qquad p = 0.$$

Zwei beliebige Linien der zweiten Erzeugung der Fläche können wir als Directricen einer Congruenz betrachten, welcher die Linien ihrer ersten Erzeugung angehören, und ebenso zwei beliebige Linien ihrer ersten Erzeugung als Directricen einer Congruenz, der die Linien ihrer zweiten Erzeugung angehören.

Jede Ebene, welche irgend zweien Linien derselben Erzeugung eines Hyperboloids parallel ist und den Abstand derselben halbirt, geht durch den Mittelpunct der Fläche.

Der Ort der Mittelpuncte aller Flächen, die durch zwei sich nicht schneidende Linien gehen, ist eine Ebene. Der Ort der Mittelpuncte aller Flächen, die durch ein räumliches Viereck gehen, ist eine gerade Linie.

Wenn zu den beiden Linien einer Erzeugung noch eine dritte Linie derselben Erzeugung hinzukommt, so ergeben sich durch paarweise Zusammenstellung der drei Linien drei Congruenzen, welche diese Linien-Paare zu Directricen haben. Die Fläche ist durch diese Congruenzen vollkommen bestimmt. Der Durchschnittspunct der drei Central-Ebenen der Congruenzen ist der Mittelpunct der Fläche; die drei geraden Linien, welche durch den Mittelpunct gehen und die beiden Directricen schneiden, sind drei Durchmesser derselben.

103. Eine Ebene, welche eine Fläche zweiten Grades in einer geraden

---

In unserem speciellen Falle sind die Ausdrücke von der fraglichen Form nur in linearer Weise in den drei Gleichungen enthalten.

Nehmen wir irgend eine Congruenz der dreigliedrigen Complex-Gruppe und stellen dieselbe durch:

$$(\Omega + \mu_0 \Omega' + \mu'_0 \Omega'') + \lambda(\Omega + \mu^0 \Omega' + \mu_1{}^0 \Omega'') = 0$$

und ihre Central-Ebene durch:

$$q = 0$$

dar, so ergibt sich nach dem Vorstehenden leicht, indem wir:

$$\pi \equiv \mu'_0\mu^0 - \mu_1{}^0\mu_0, \qquad \pi' \equiv \mu'_0 - \mu_1{}^0, \qquad \pi'' \equiv \mu_0 - \mu^0$$

setzen:

$$q \equiv \pi p + \pi' p' + \pi'' p'',$$

womit der Beweis geführt ist, dass sämmtliche Central-Ebenen in demselben Puncte sich schneiden.

Wir können diesen Satz in folgender Weise ausdrücken:

Die Central-Ebenen der Congruenzen einer dreigliedrigen Complex-Gruppe bilden ihrerseits eine dreigliedrige Gruppe von Ebenen.

Wie die Gleichung der Complex-Gruppe das Symbol einer Strahlenfläche ist, ist die letzte Gleichung das Symbol eines Punctes, des Mittelpunctes der Fläche, in welchem unendlich viele Central-Ebenen sich schneiden.

Ich muss mich hier damit begnügen, dadurch, dass ich den Satz des Textes unter der neuen Form ausspreche, eine entfernte Andeutung davon zu geben, wie derselbe einem allgemeinen, weit reichenden Gesichtspuncte sich unterordnet. Wenn es mir vergönnt sein sollte, die Entwickelungen, die sich hier auf gerade Linien beschränken, später auf Kräfte, Rotationen, Dynamen auszudehnen, würde dieser Satz seine bescheidene Stelle in einem systematischen Ganzen finden.

Linie schneidet, schneidet sie ausserdem noch in einer zweiten. Die beiden Durchschnittslinien gehören den beiden verschiedenen Erzeugungen der Fläche an. Jede solche Ebene ist eine Tangential-Ebene und der Punct, in welchem die beiden Erzeugenden in ihr sich schneiden, der Berührungspunct. Jede Linie, welche durch den Durchschnitt zweier Linien verschiedener Erzeugung geht und in der durch diese Linien gehenden Ebene liegt, ist eine Tangente der Fläche. Eine Ebene, welche durch eine gegebene Erzeugende und den Mittelpunct der Fläche geht, ist eine Tangential-Ebene, in welcher der Berührungspunct nach der Richtung der gegebenen Erzeugenden unendlich weit liegt, indem die zweite Erzeugende der gegebenen parallel wird.

Die Ebenen, welche man in jeder von drei Congruenzen, denen die Linien der ersten Erzeugung einer Fläche angehören, durch jede der beiden Directricen, parallel mit der Central-Ebene legen kann, sind Tangential-Ebenen in den Scheiteln des bezüglichen Durchmessers. Die Central-Ebene ist, in Beziehung auf die Fläche, dem Durchmesser zugeordnet. Die beiden Directricen sind Linien der zweiten Erzeugung in den Tangential-Ebenen; die Linien der ersten Erzeugung in denselben erhält man, wenn man durch den Scheitel des Durchmessers in jeder Tangential-Ebene eine gerade Linie zieht, welche der Directrix in der anderen parallel ist.

104. Nach dem Vorstehenden geht eine Ebene, welche irgend zwei Linien derselben Erzeugung parallel ist und ihren Abstand halbirt, durch den Mittelpunct der Fläche. Lassen wir die beiden Linien zusammenfallen, so geht die fragliche Ebene durch diese Linie selbst und wird dadurch zu einer durch den Mittelpunct gehenden Tangential-Ebene. Der Berührungspunct rückt unendlich weit. Wenn die gerade Linie durch eine continuirliche Bewegung die Fläche erzeugt, umhüllt die fragliche Ebene eine Kegelfläche, welche zugleich von einer geraden Linie beschrieben wird, die durch den Mittelpunct geht und der die Fläche erzeugenden geraden Linie in allen Lagen derselben parallel bleibt. Dieselbe Kegelfläche erhalten wir, wenn die die Fläche beschreibende gerade Linie der anderen Erzeugung angehört. Diese Kegelfläche, die hiernach von jeder Ebene berührt wird, die durch den Mittelpunct und irgend eine Linie einer der beiden Erzeugungen geht, und die jede Linie, welche irgend einer Linie einer der beiden Erzeugungen parallel durch den Mittelpunct gelegt wird, zu einer ihrer Seiten hat, heisst der Asymptoten-Kegel der Fläche. Die Seiten des Asymptoten-Kegels sind nicht die einzigen geraden Linien, welche die Fläche in unend-

licher Entfernung berühren. Jede gerade Linie, welche in einer Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels liegt und derjenigen Seite parallel ist, nach welcher dieser Kegel berührt wird, ist eine Asymptote der Fläche. Durch jeden Punct ausserhalb des Kegels lassen sich zwei solcher Asymptoten legen, die zweien Seiten desselben parallel sind.

105. Die beiden Linien der zweiten Erzeugung einer Fläche, welche durch die beiden Scheitel irgend eines Durchmessers derselben gehen, sind die beiden Directricen einer Congruenz, der die Fläche angehört. Die Central-Ebene der Congruenz ist die dem Durchmesser, in Beziehung auf die Fläche, zugeordnete Diametral-Ebene. Wenn wir die beiden Directricen nach dem Durchmesser auf die Central-Ebene projiciren, erhalten wir die Asymptoten der Durchschnitts-Curve der Fläche mit der Central-Ebene. Je zwei zugeordnete Durchmesser der Durchschnitts-Curve fallen in zwei zugeordnete Nebendurchmesser der Congruenz. Irgend ein Durchmesser der Congruenz und zwei zugeordnete Nebendurchmesser in ihrer Central-Ebene sollen drei zugeordnete Durchmesser der Fläche heissen.

Je nachdem der Durchmesser der Fläche begegnet oder nicht, sind die Directricen der bezüglichen Congruenz reell oder imaginär, dem entsprechend sind auch die beiden Asymptoten der Durchschnitts-Curve in der Central-Ebene reell oder imaginär. Diese Curve ist in dem einen Falle eine Hyperbel, in dem anderen eine Ellipse. Die Durchschnitts-Curven in Ebenen, welche der Central-Ebene parallel sind, sind gleich orientirte Hyperbeln oder Ellipsen. Die Hyperbeln arten in den Ebenen, welche durch die Endpuncte des Durchmessers gehen und Tangential-Ebenen sind, in Systeme von geraden Linien aus. Die Ellipsen behalten immer endliche Dimensionen, weil die entsprechenden Tangential-Ebenen imaginär sind. Wenn wir eine Seite des Asymptoten-Kegels als Durchmesser betrachten, fallen die Directricen der bezüglichen Congruenz zusammen (vergl. Nr. 68.), und die Ebene, welche nach dieser Seite den Asymptoten-Kegel berührt, wird Central-Ebene derselben. Die Durchschnitts-Curve der Fläche mit der Central-Ebene artet in ein System von zwei parallelen Linien aus, deren Durchmesser die Kegelseite ist. Die Durchschnitts-Curven in parallelen Ebenen sind Parabeln, deren Durchmesser der Kegelseite parallel sind.

106. Jedem Durchmesser der Fläche entsprechen zwei verschiedene Congruenzen, deren Directricen in den Endpuncten des Durchmessers sich schneiden und Linien der beiden verschiedenen Erzeugungen der Fläche sind.

Solche zwei Congruenzen haben wir (Nr. 79.) zwei in Beziehung auf den Durchmesser conjugirte genannt. Derjenigen dieser zwei Congruenzen, welche zwei Linien der zweiten Erzeugung zu Directricen hat, gehören die Linien der ersten Erzeugung an; der anderen, die zwei Linien der ersten Erzeugung zu Directricen hat, gehören die Linien der zweiten Erzeugung an.

107. Die zugeordneten Polaren einer gegebenen Linie des Raumes, $A_0 B_0$, in Bezug auf die verschiedenen Complexe der dreigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu \Omega' + \mu' \Omega'' = 0,$$

durch welche eine Linienfläche bestimmt ist, bilden eine Congruenz, deren beide Directricen Linien der ersten Erzeugung der ersten Fläche sind (Nr. 101.). Die gegebene gerade Linie schneidet die beiden Directricen in zwei Puncten. Diese beiden Durchschnittspuncte seien A_0 und B_0; sie sind zugleich die beiden Durchschnittspuncte der gegebenen Linie mit der Fläche. Die beiden Directricen seien $A_0 A^0$ und $B_0 B^0$. Die Ebene, welche durch $A_0 B_0$ und $A_0 A^0$ geht, berührt, weil $A_0 A^0$ eine Linie erster Erzeugung ist, die Fläche; der Berührungspunct, der auf dieser Linie liegt, sei A^0. Ebenso berührt eine Ebene, die durch $A_0 B_0$ und $B_0 B^0$ geht, die Fläche in einem Puncte von $B_0 B^0$; dieser Punct sei B^0. Wir wollen die beiden Berührungspuncte A^0 und B^0, welche auf den beiden Directricen und also auf der Fläche liegen, durch eine gerade Linie $A^0 B^0$ verbinden.

Wenn eine Tangential-Ebene der Fläche durch eine Linie erster Erzeugung derselben, bezüglich durch $A_0 A^0$ oder $B_0 B^0$ gelegt wird, so ist die Linie zweiter Erzeugung, welche durch den Berührungspunct, bezüglich durch A^0 oder B^0 geht, dadurch bestimmt, dass sie irgend eine andere Linie erster Erzeugung, bezüglich $B_0 B^0$ oder $A_0 A^0$, schneidet. In der obigen Construction sind also $A_0 B^0$ und $A^0 B_0$ Linien der zweiten Erzeugung. $A_0 A^0 B^0 B_0$ ist ein der Fläche aufgeschriebenes Viereck, dessen beide Paare gegenüberliegender Seiten der zwiefachen Erzeugung der Fläche angehören. Die beiden Diagonalen des Vierecks sind $A_0 B_0$ und $A^0 B^0$. Die Seiten des Vierecks sind zugleich vier von den sechs Kanten eines Tetraeders; die Flächen desselben, deren jede zwei auf einander folgende Seiten enthält, berühren die Linienfläche in den vier Winkelpuncten des Vierecks. $A_0 B_0$ und $A^0 B^0$ sind die beiden übrigen, einander gegenüberstehenden Kanten des Tetraeders.

108. Aus dem Vorstehenden folgt unmittelbar, dass die Beziehung der beiden Linien $A_0 B_0$ und $A^0 B^0$ zur Fläche eine vollkommen gegenseitige ist. Die beiden Tangential-Ebenen, welche durch jede derselben an die Fläche

sich legen lassen, berühren dieselbe in den beiden Durchschnittspuncten der jedesmaligen anderen; die Tangential-Ebenen in den Durchschnittspuncten jeder derselben mit der Fläche schneiden sich auf der jedesmal anderen. Wir nennen die beiden Linien zwei zugeordnete Polaren in Beziehung auf die Fläche. Zu jeder Linie des Raumes gehört eine zweite als zugeordnete Polare.

Wenn wir eine Congruenz dadurch bestimmen, dass wir irgend zwei Linien einer Fläche als Directricen derselben nehmen, so ordnen sich die der Congruenz angehörigen Linien paarweise so zusammen, dass jeder dieser Linien eine andere entspricht, mit der sie, in Beziehung auf die Fläche, zwei zugeordnete Polaren bildet. Diejenigen dieser Linien, die mit ihren zugeordneten Polaren zusammenfallen, gehören der Fläche an.

Je zwei Linien der einen Erzeugung bilden mit je zwei Linien der anderen ein der Fläche aufgeschriebenes Viereck, so wie die vier Kanten eines ihr umschriebenen Tetraeders; die beiden Diagonalen dieses Vierecks, oder, was dasselbe heisst, zwei gegenüberliegende Kanten des Tetraeders, sind, in Beziehung auf die Fläche, zwei conjugirte Polaren.

109. Drei Linien der einen und drei Linien der anderen Erzeugung einer Linienfläche schneiden einander in neun Puncten, welche der Fläche angehören. Diese Puncte lassen sich in drei Gruppen:

$$P,\ Q,\ R, \qquad P',\ Q',\ R', \qquad P'',\ Q'',\ R'' \tag{3}$$

so vertheilen, dass in den drei Puncten derselben Gruppe die drei Linien der einen Erzeugung die drei Linien der anderen Erzeugung schneiden. Den neun Puncten entsprechen neun Ebenen, welche die Fläche in diesen Puncten berühren:

$$p,\ q,\ r, \qquad p',\ q',\ r', \qquad p'',\ q'',\ r''. \tag{4}$$

Die drei Linien der einen Erzeugung enthalten die Puncte:

$$P,\ Q'',\ R', \qquad R,\ P'',\ Q', \qquad Q,\ R'',\ P',$$

die Linien der anderen Erzeugung die Puncte:

$$P,\ R'',\ Q', \qquad Q,\ P'',\ R', \qquad R,\ Q'',\ P'.$$

Die neun Puncte bestimmen drei der Fläche aufgeschriebene Sechsecke:

$$\left.\begin{array}{l} P'\ Q''\ R'\ P''\ Q'\ R'', \\ P\ Q''\ R\ P''\ Q\ R'', \\ P\ Q'\ R\ P'\ Q\ R'. \end{array}\right\} \tag{5}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir drei sechsflächige Körper, gebildet von den Tangential-Ebenen in den Eckpuncten der drei Sechsecke. Das ganze geometrische Gebilde ist gleichmässig bestimmt, gleichviel, ob wir von den drei Puncten einer der drei Gruppen (3), oder den drei Tangential-Ebenen in solchen drei Puncten, oder endlich von einem der drei Sechsecke (5) ausgehen und, dem entsprechend, drei Puncte der Fläche, oder drei Tangential-Ebenen derselben oder ein der Fläche aufgeschriebenes Sechseck von vorne herein willkürlich annehmen.

Gehen wir von drei Puncten der Fläche P, Q, R aus, so ist durch diese drei Puncte eine Ebene (P, Q, R) und durch die drei Tangential-Ebenen in diesen Puncten ein Punct (p, q, r) bestimmt. Die drei Durchschnittslinien der drei Tangential-Ebenen sind die drei Diagonalen des dritten Sechsecks:

Die drei Diagonalen eines der Linienfläche aufgeschriebenen Sechsecks schneiden sich in demselben Puncte.

Das erste aufgeschriebene Sechseck hat P' und P'', Q' und Q'', R' und R'' zu gegenüberstehenden Winkelpuncten; die Tangential-Ebenen in den drei Paaren gegenüberstehender Winkelpuncte schneiden sich in den drei Linien (P, Q), (P, R), (Q, R), welche die gegebenen Puncte P, Q, R paarweise mit einander verbinden und also in derselben Ebene liegen.

Die Tangential-Ebenen in je zwei gegenüberliegenden Winkelpuncten eines der Linienfläche aufgeschriebenen Sechsecks schneiden sich in drei geraden Linien, welche in derselben Ebene liegen.

110. Ein aufgeschriebenes Sechseck, für welches wir das erste nehmen wollen, bestimmt drei aufgeschriebene Vierecke. Die Seiten jedes Vierecks sind solche vier Seiten des Sechsecks, welche, paarweise genommen, in zwei gegenüberliegenden Winkelpuncten desselben zusammenstossen. Die drei Diagonalen des Sechsecks: (R', R''), (Q', Q''), (P', P''), welche in dem Puncte (p, q, r) sich schneiden, sind drei Diagonalen der drei Vierecke; die drei zweiten Diagonalen dieser Vierecke sind (P, Q), (P, R), (Q, R), welche in der Ebene (P, Q, R) liegen. In Gemässheit der Nummer 104. haben hiernach drei gerade Linien, welche durch denselben Punct gehen, solche drei gerade Linien zu zugeordneten Polaren, die in derselben Ebene liegen. Also:

Die zugeordneten Polaren aller Linien, die in demselben Puncte sich schneiden, liegen in derselben Ebene.

Es entspricht hiernach jedem Puncte des Raumes eine Ebene und jeder Ebene ein Punct. Die Ebene ist in Beziehung auf die Fläche die Polar-Ebene des Punctes, der Punct der Pol der Ebene. Nach dem Vorstehenden umhüllen die Tangential-Ebenen der Fläche in den Puncten einer ebenen Durchschnitts-Curve eine Kegelfläche, die durch diese Curve geht und den Pol der schneidenden Ebene zu ihrem Mittelpuncte hat. Umgekehrt berühren alle Tangential-Ebenen der Fläche, welche durch einen Punct gehen, die Fläche in einer ebenen Curve, deren Ebene die Polar-Ebene des gegebenen Punctes ist.*)

111. Wir lassen noch einige analytische Entwicklungen folgen, die bestimmt sind, die vorstehenden geometrischen Anschauungen, die weiter zu verfolgen hier nicht der Ort ist, zu unterstützen und zu erweitern. Wir wollen eine Strahlenfläche, welche durch die Gleichungen dreier Complexe des ersten Grades, die wir aus einer dreigliedrigen Gruppe

$$\Omega + \mu\Omega' + \mu'\Omega'' = 0$$

willkürlich auswählen können, gegeben ist, durch eine Gleichung in gewöhnlichen Punct-Coordinaten darstellen.

Wir werden zunächst für die drei Complexe der Gruppe drei solche Complexe nehmen, deren sämmtliche Linien die Axe derselben schneiden. Bestimmen wir den Anfangspunct willkürlich und legen die drei Coordinaten-Ebenen durch die drei Axen der Complexe, so erhalten wir für die Gleichungen der drei Complexe die folgenden:

$$\Omega \equiv C - D\sigma + E\varrho = 0, \tag{6}$$
$$\Omega' \equiv B's - D'\sigma + F'\eta = 0, \tag{7}$$
$$\Omega'' \equiv A''r + E''\varrho + F''\eta = 0. \tag{8}$$

Wir haben zwischen den Coordinaten irgend eines Punctes x, y, z, welcher auf irgend einem Strahle liegt, und den vier Coordinaten r, s, ϱ und σ des Strahles die beiden Relationen:

$$x = rz + \varrho, \qquad y = sz + \sigma,$$

woraus zur Bestimmung der fünften Coordinate folgt:

$$ry - sx = \eta.$$

Wenn wir zwischen den vorstehenden sechs Gleichungen die fünf Strahlen-

*) Ich habe die drei zusammengehörigen, der Fläche aufgeschriebenen Sechsecke bereits vor längerer Zeit in dem „System der Geometrie des Raumes“ betrachtet (vergl. Nr. 87.—93.), und durch analytische Symbole den Beweis geführt, dass einerseits die drei Puncte, in welchen die Diagonalen der drei Sechsecke sich schneiden, in einer geraden Linie liegen, und andererseits die drei Ebenen, welche die Durchschnittslinien der Tangential-Ebenen in den gegenüberstehenden Winkelpuncten der drei Sechsecke enthalten, sich auf einer zweiten geraden Linie schneiden, und endlich, dass diese beiden geraden Linien zwei zugeordnete Polaren in Beziehung auf die Fläche sind.

Coordinaten eliminiren, so stellt die resultirende Gleichung in x, y, z die Strahlenfläche in Punct-Coordinaten dar.

Eliminiren wir zuerst η, so erhalten wir statt der beiden letzten Complex-Gleichungen (7) und (8):

$$(B' - F'x)\, s + F'y \cdot r - D'\sigma = 0,$$
$$(A'' + F''y)\, r - F''x \cdot s + E''\varrho = 0,$$

und wenn wir dann ϱ und σ eliminiren, kommt:

$$Ez \cdot r - Dz \cdot s - C - Ex + Dy = 0,$$
$$F'y \cdot r + (B' - F'x + D'z) s - D'y = 0,$$
$$(A'' + F''y - E''z)\, r - F''x \cdot s + E''x = 0.$$

Bestimmen wir die Werthe von s und r aus den beiden letzten der vorstehenden drei Gleichungen und setzen sie in die erste dieser Gleichungen ein, so kommt:

$$Exz\,[E''(B' - F'x + D'z) - D'F''y]$$
$$+ Dyz\,[D'\,(A'' + F''y - E''z) + E''F'x]$$
$$+ (C + Ex - Dy)\,[(A'' + F''y - E''z)\,(B' - F'x + D'z) + F'F''xy] = 0.$$

Aus dieser Gleichung verschwinden die höheren Potenzen von x, y, z und wir erhalten:

$$A''B'C + A''(B'E - CF')x + B'(CF'' - A''D)\,y + C\,(A''D' - B'E'')\,z$$
$$- A''EF' \cdot x^2 - B'DF'' \cdot y^2 - CD'E''z^2$$
$$+ (CD'F'' + B'DE'')yz + (CE''F' + A''D'E)xz + (B'EF'' + A''DF')xy = 0.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch $A''\, B'\, C$ und schreiben für:

$$\frac{E}{C}, \quad -\frac{D}{C}, \quad -\frac{F'}{B'}, \quad \frac{D'}{B'}, \quad \frac{F''}{A''}, \quad -\frac{E''}{A''},$$

bezüglich:

$$t', \quad u'', \quad t'', \quad v', \quad u', \quad v'',$$

so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$1 + (t' + t'')\,x + (u' + u'')\,y + (v' + v'')\,z$$
$$+ t'\,t''\,x^2 + u'\,u''\,y^2 + v'\,v''\,z^2$$
$$+ (u'v' + u''v'')\,yz + (t'v' + t''v'')\,xz + (t'u' + t''u'')\,xy = 0. \qquad (9)$$

Diese Gleichung stellt dieselbe Fläche in Punct-Coordinaten dar, welche ursprünglich durch die drei Complex-Gleichungen (6), (7) und (8) dargestellt wurde. Diese drei Gleichungen werden, wenn wir die sechs neuen Constanten einführen:

$$\left.\begin{aligned} t'\varrho + u''\sigma + 1 &= 0, \\ -v'\sigma - t''\eta + s &= 0, \\ u'\eta - v''\varrho + r &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und folglich ist, wenn μ und μ' zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, die allgemeine Gleichung der dreigliedrigen Complex-Gruppe, durch welche die Strahlenfläche bestimmt wird, die folgende:

$$(t'\varrho + u''\sigma + 1) + \mu\,(v'\sigma + t''\eta - s) + \mu'\,(u'\eta - v''\varrho + r) = 0. \quad (11)$$

112. Setzen wir in der Gleichung (9) nach einander z, y und x gleich Null, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}(t'x + u''y + 1)\cdot(t''x + u'y + 1) &= 0,\\ (v'z + t''x + 1)\cdot(v''z + t'x + 1) &= 0,\\ (u'y + v''z + 1)\cdot(u''y + v'z + 1) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Die Durchschnitts-Curven der Fläche mit den drei Coordinaten-Ebenen arten also in Systeme von zwei geraden Linien aus. Die Fläche wird von den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ berührt; die Linien der zweiten Erzeugung der Fläche in diesen Ebenen sind:

$$\left.\begin{aligned}t'x + u''y + 1 &= 0,\\ v'z + t''x + 1 &= 0,\\ u'y + v''z + 1 &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

die Linien der ersten Erzeugung:

$$\left.\begin{aligned}t''x + u'y + 1 &= 0,\\ v''z + t'x + 1 &= 0,\\ u''y + v'z + 1 &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Berührungs-Puncte in den drei Coordinaten-Ebenen sind die Durchschnitte der Linien erster und zweiter Erzeugung in jeder der drei Ebenen. Die drei Linien zweiter Erzeugung sind die Axen solcher drei Complexe der dreigliedrigen Gruppe, auf denen alle Linien der Complexe sich schneiden, oder mit anderen Worten, drei Directricen dreier Congruenzen der Gruppe. Wenn wir die drei Linien zweiter Erzeugung mit den drei Linien erster Erzeugung vertauschen, so treten an die Stelle der drei Complexe (10) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}t''\varrho + u'\sigma + 1 &= 0,\\ -v''\sigma - t'\eta + s &= 0,\\ u''\eta - v'\varrho + r &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

und zur Bestimmung derselben Strahlenfläche erhalten wir die neue dreigliedrige Complex-Gruppe:

$$(t''\varrho + u'\sigma + 1) + \mu_1\,(v''\sigma + t'\eta - s) + \mu_1'\,(u''\eta - v'\varrho + r) = 0. \quad (15)$$

Jeder Congruenz einer der beiden dreigliedrigen Complex-Gruppen (11) und (15) entspricht in der andern eine conjugirte Congruenz.

113. Wenn insbesondere:

$$t' + t'' = 0, \qquad u' + u'' = 0, \qquad v' + v'' = 0, \tag{16}$$

nimmt die Gleichung der Fläche die folgende einfachere Form an:

$$1 - t'^2 x^2 - u'^2 y^2 - v'^2 z^2 + 2 u' v' \cdot yz + 2 t' v' xz + 2 t' u' xy = 0. \tag{17}$$

Dann sind die beiden Linien verschiedener Erzeugungen in jeder der drei Coordinaten-Ebenen einander parallel und stehen gleich weit vom Anfangspuncte der Coordinaten ab. Dieser ist der Mittelpunct der Fläche. Die drei Coordinaten-Ebenen berühren den Asymptoten-Kegel der Fläche.

114. Wenn die Fläche insbesondere ein hyperbolisches Paraboloid ist, bleiben die drei geraden Linien (12) Linien derselben Erzeugung desselben, sind aber der Bedingung unterworfen, dass sie einer gegebenen Ebene parallel sind. Nehmen wir für die Gleichung dieser Ebene:

$$ax + by + cz = 0, \tag{18}$$

so kommt:

$$\frac{a}{b} = \frac{t'}{u''}, \quad \frac{b}{c} = \frac{u'}{v''}, \quad \frac{c}{a} = \frac{v'}{t''}, \tag{19}$$

woraus sich die folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den sechs Constanten, von welchen die Fläche abhängt, ergibt:

$$t' u' v' = t'' u'' v''. \tag{20}$$

In Folge derselben Bedingungs-Gleichung sind die Linien der zweiten Erzeugung einer zweiten gegebenen Ebene parallel. Nehmen wir:

$$a' x + b' y + c' z = 0 \tag{21}$$

für die Gleichung dieser Ebene, so kommt:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{t''}{u'}, \quad \frac{b'}{c'} = \frac{u''}{v'}, \quad \frac{c'}{a'} = \frac{v''}{t'}. \tag{22}$$

Entwickeln wir die Gleichungen (18) und (21), so kommt:

$$\left.\begin{aligned} t'' v'' x + u' v' y + v' v'' z &= 0, \\ t' v' x + u'' v'' y + v' v'' z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, denen die Linien der ersten und zweiten Erzeugung des Paraboloids parallel sind, bestimmen die Richtung der Durchmesser desselben.

Wir finden für dieselbe unter Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung (20):

$$\frac{t' t'' x}{t' - t''} = \frac{u' u'' y}{u' - u''} = \frac{v' v'' z}{v' - v''}. \tag{24}$$

116. Wir haben bisher gerade Linien vorzugsweise als Strahlen betrachtet, weil diese Vorstellungsart unserer Auffassung näher liegt und Kürze

uns geboten ist. Die Auffassung einer geraden Linie als Axe ist aber eine gleichberechtigte. Die Strahlen-Congruenzen treten dann als Axen-Congruenzen, die Strahlen-Fächen als Axen-Flächen auf. Wir wollen hier dieselbe Fläche, welche wir eben als Strahlen-Fläche betrachtet haben, nunmehr als Axen-Fläche betrachten und durch die früheren Complexe Ω, Ω', Ω'', welche nun nach Einführung der fünf Axen-Coordinaten p, q, π, $\varkappa$, ω durch die folgenden Gleichungen:

$$\Phi \equiv \quad C\omega + Dp + Eq = 0, \tag{25}$$
$$\Phi' \equiv \quad B'\pi + D'p + F' = 0, \tag{26}$$
$$\Phi'' \equiv -A''\varkappa + E''q + F'' = 0 \tag{27}$$

dargestellt werden, bestimmen. Wir erhalten die Gleichung dieser Fläche in Plan-Coordinaten t, u, v, wenn wir zwischen den vorstehenden drei Gleichungen und den Gleichungen:

$$t = pv + \pi,$$
$$u = qv + \varkappa,$$
$$pu - qt = \omega$$

die fünf Axen-Coordinaten eliminiren. Eliminiren wir zunächst zwischen der ersten und sechsten, der zweiten und vierten, der dritten und fünften der vorstehenden sechs Gleichungen bezüglich ω, π und $\varkappa$, so kommt:

$$(Cu + D)p = (Ct - E)q,$$
$$(B't + F') = (B'v - D')p,$$
$$(A''v + E'')q = (A''u - F''),$$

und hieraus, wenn wir diese drei Gleichungen mit einander multipliciren:

$$\frac{(Ct - E)(A''u - F'')(B'v - D')}{(B't + F')(Cu + D)(A''v + E'')} = 1.$$

Dividiren wir Zähler und Nenner des Bruches auf der ersten Seite dieser Gleichung durch $A'' \cdot B' \cdot C$, so kommt, wenn wir wiederum der Kürze wegen die früheren Constanten t' und t'', u' und u'', v' und v'' einführen:

$$\frac{(t - t')(u - u')(v - v')}{(t - t'')(u - u'')(v - v'')} = 1. \tag{28}$$

In dieser Gleichung fällt, wenn sie entwickelt wird, das Product der drei Veränderlichen aus. Sie stellt dieselbe Fläche in Plan-Coordinaten dar, die wir früher durch die Gleichung (9) in Punct-Coordinaten dargestellt haben.

116. Die vorstehende Gleichung wird befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$\left.\begin{array}{ll} t - t' = 0, & u - u'' = 0, \\ u - u' = 0, & v - v'' = 0, \\ v - v' = 0, & t - t'' = 0, \end{array}\right\} \tag{29}$$

und ebenso, wenn gleichzeitig:

$$\left.\begin{array}{ll} t-t'=0, & v-v''=0, \\ u-u'=0, & t-t''=0, \\ v-v'=0, & u-u''=0. \end{array}\right\} \qquad (30)$$

Die Gleichungen (29) und (30), welche sich auf sechs verschiedene reduciren, stellen, einzeln genommen, sechs Puncte dar, von denen zwei auf jeder der drei Coordinaten-Axen liegen. Paarweise zusammengestellt, wie vorstehend geschehen, stellen sie Axen dar, welche in den drei Coordinaten-Ebenen und zugleich auf der Fläche liegen, einmal die drei Linien zweiter Erzeugung der Fläche (12), das andere Mal die drei Linien erster Erzeugung derselben Fläche (13). Die Fläche wird von den drei Coordinaten-Ebenen berührt.

Wir können die Fläche, ihrer doppelten Erzeugung entsprechend, durch jede der folgenden beiden dreigliedrigen Gruppen linearer Axen-Complexe darstellen:

$$(\omega-u''p+t'q)+\lambda(\pi+v'p-t'')+\lambda'(k+v''q-u')=0, \qquad (31)$$

$$(\omega-u'p+t''q)+\lambda_1(\pi+v''p-t')+\lambda_1'(k+v'q-u'')=0, \qquad (32)$$

indem wir durch λ, λ', λ_1, λ'_1 unbestimmte Coefficienten bezeichnen.

117. Wenn wir für die drei Coordinaten-Ebenen irgend drei Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels der Fläche nehmen, so nimmt in Folge der Relationen (16)

$$t'+t''=0, \qquad u'+u''=0, \qquad v'+v''=0$$

die Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten die folgende Form an:

$$\frac{(t-t')(u-u')(v-v')}{(t+t')(u+u')(v+v')}=1. \qquad (33)$$

In dem Falle des hyperbolischen Paraboloids particularisirt sich die allgemeine Gleichung (28) dadurch, dass das constante Glied bei der Entwickelung fortfällt, was wieder zu der früheren Bedingungs-Gleichung (20) führt.

118. Wir haben in den letzten Nummern dieselbe Erzeugung derselben Fläche, einmal durch drei lineare Gleichungen in Strahlen-Coordinaten, das andere Mal durch drei lineare Gleichungen in Axen-Coordinaten dargestellt und aus den drei linearen Gleichungen die Gleichung derselben Fläche einmal in Punct-Coordinaten, das andere Mal in Plan-Coordinaten abgeleitet.

Wir wollen als zweites Beispiel eine Linienfläche durch drei Complexe der besonderen Art bestimmen, indem wir für die Gleichung derselben drei solche nehmen, die aus den früheren hervorgehen, wenn wir die Constanten derselben mit ihren reciproken Werthen und

$$r,\ s,\ \varrho,\ \sigma,\ \eta \text{ mit } p,\ q,\ \pi,\ \varkappa,\ \omega$$

gegenseitig vertauschen.

Auf diesem Wege erhalten wir, indem wir der Kürze wegen die reciproken Werthe von t', t'', u', u'', v', v'' durch x', x'', y', y'', z', z'' bezeichnen, statt der drei Complex-Gleichungen (10) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} x'\pi + y''\varkappa + 1 &= 0, \\ -z'\varkappa - x''\omega + q &= 0, \\ y'\omega - z''\pi + p &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

119. Wenn wir zwischen diesen drei Gleichungen und den drei Gleichungen:

$$t = pv + \pi, \qquad u = qv + \varkappa, \qquad pu - qt = \omega$$

die fünf Axen-Coordinaten $p, q, \pi, \varkappa, \omega$ eliminiren, erhalten wir die folgende Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten:

$$\begin{aligned} 1 + (x' + x'')\,t + (y' + y'')\,u + (z' + z'')\,v \\ + x'x''t^2 + y'y''u^2 + z'z''v^2 \\ + (y'z' + y''z'')\,uv + (x'z' + x''z'')\,tv + (x'y' + x''y'')\,tu = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Diese Gleichung ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der Gleichung (9) t', t'', u', u'', v', v'' durch x', x'', y', y'', z', z'' und x, y, z durch t, u, v ersetzen.

Um dieselben Complexe (34) in Strahlen-Coordinaten auszudrücken, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \eta - y''\cdot r + x'\cdot s &= 0, \\ \varrho + z'\cdot r - x'' &= 0, \\ -\sigma - z''\cdot s + y' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

und wenn wir zwischen diesen drei Gleichungen und den drei folgenden:

$$x = rz + \varrho, \qquad y = sz + \sigma, \qquad ry - sx = \eta,$$

die Strahlen-Coordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ eliminiren, kommt:

$$\frac{(x - x')\,(y - y')\,(z - z')}{(x - x'')\,(y - y'')\,(z - z'')} = 1. \tag{37}$$

Diese Gleichung erhalten wir unmittelbar, wenn wir in der Gleichung (28) t', t'', u', u'', v', v'' mit x', x'', y', y'', z', z'' und t, u, v mit x, y, z vertauschen.

Die beiden Gleichungen (35) und (37) stellen dieselbe Fläche in Plan- und Punct-Coordinaten dar, die in Axen- und Strahlen-Coordinaten durch die Systeme linearer Gleichungen (34) und (36) dargestellt wird.

120. Wenn wir in der Gleichung (35) nach einander v, u und t gleich Null setzen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}(x't + y''u + 1)\,(x''t + y'u + 1) = 0,\\ (z'v + x''t + 1)\,(z''v + x't + 1) = 0,\\ (y'u + z''v + 1)\,(y''u + z'v + 1) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Während also im Allgemeinen die Tangential-Ebenen einer Fläche zweiter Ordnung und Klasse, welche einer gegebenen geraden Linie parallel sind, einen Cylinder umhüllen, artet dieser Cylinder, wenn wir für die gerade Linie nach einander die drei Coordinaten-Axen nehmen, in ein System von zwei parallelen geraden Linien aus. Die Coordinaten-Axen sind also irgend dreien Erzeugenden der Linienfläche, oder, was dasselbe ist, irgend dreien Seiten des Asymptoten-Kegels der Fläche parallel. Denn alle Ebenen, welche durch irgend eine Linie der Fläche gehen, sind Tangential-Ebenen der Fläche. Den drei Linien der ersten Erzeugung, denen die drei Coordinaten-Axen parallel genommen worden sind, sind drei Linien der zweiten Erzeugung parallel. Die beiden Puncten-Paare, in welchen die Ebenen YX, XZ, ZY von den Linien beider Erzeugungen, die bezüglich den Axen OZ, OY, OX parallel sind, getroffen werden, werden durch die Gleichungen (38) dargestellt.

121. In Uebereinstimmung hiermit erhalten wir, um die Gleichung (37) zu befriedigen, einmal die drei Gleichungen-Paare:

$$\left.\begin{aligned}x - x' = 0, \qquad & y - y'' = 0,\\ y - y' = 0, \qquad & z - z'' = 0,\\ z - z' = 0, \qquad & x - x'' = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

welche die drei Linien zweiter Erzeugung, das andere Mal die drei Gleichungen-Paare:

$$\left.\begin{aligned}x - x' = 0, \qquad & z - z'' = 0,\\ y - y' = 0, \qquad & x - x'' = 0,\\ z - z' = 0, \qquad & y - y'' = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

welche die drei Linien erster Erzeugung darstellen, die den drei Coordinaten-Axen, bezüglich OZ, OX, OY und OY, OZ, OX parallel sind.

123. Die drei Complexe besonderer Art, durch welche die Fläche bestimmt ist, die einmal durch die Gleichungen (34), das andere Mal durch die Gleichungen (36) dargestellt werden, haben zu Axen diejenigen Linien zweiter Erzeugung, die durch die Gleichungen-Paare (39) dargestellt werden, und andererseits dadurch bestimmt sind, dass sie den Coordinaten-Axen OX, OY,

OZ parallel sind und die bezüglichen Coordinaten-Ebenen YZ, XZ, XY in Puncten schneiden, welche in diesen Ebenen durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y'u + z''v + 1 &= 0, \\ z'v + x''t + 1 &= 0, \\ x't + y''u + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

dargestellt werden.

Wenn wir drei Seiten des Asymptoten-Kegels selbst zu Coordinaten-Axen nehmen, kommt:

$$x' + x'' = 0, \qquad y' + y'' = 0, \qquad z' + z'' = 0. \tag{42}$$

Dann nimmt die Gleichung der Fläche in Plan-Coordinaten die folgende Form an:

$$1 - x'^2t^2 - y'^2u^2 - z'^2v^2 + 2y'z' \cdot uv + 2x'z' \cdot tv + 2x'y' \cdot tu = 0, \tag{43}$$

die Gleichung derselben Fläche in Punct-Coordinaten die folgende:

$$\frac{(x - x')\,(y - y')\,(z - z')}{(x + x')\,(y + y')\,(z + z')} = 1. \tag{44}$$

124. Wir wollen endlich, zunächst unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, für die Complexe einer dreigliedrigen Gruppe:

$$\Omega + \mu\,\Omega' + \mu'\,\Omega'' = 0,$$

durch welche eine Linienfläche bestimmt ist, die folgenden drei nehmen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv \sigma - k_1 r = 0, \\ \Omega' &\equiv \varrho + k_2 s = 0, \\ \Omega'' &\equiv \eta + k_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Dann fallen die Axen der drei Complexe in die drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ, sind also, wie diese, auf einander senkrecht und schneiden sich im Anfangspuncte der Coordinaten. Die Parameter sind k_1, k_2, k_3. Wenn wir die drei Complexe paarweise zusammenstellen, erhalten wir drei Congruenzen (Ω', Ω''), (Ω, Ω''), (Ω, Ω'), deren Hauptaxen bezüglich in OX, OY, OZ und deren Paare von Nebenaxen bezüglich in OY und OZ, OX und OZ, OX und OY fallen.

Wenn wir, wie früher, vermittelst der drei Gleichungen:

$$x = rz + \varrho, \qquad y = sz + \sigma, \qquad rx - sy = \eta$$

σ, ϱ und η eliminiren, so kommt:

$$\begin{aligned} y - sz - k_1 r &= 0, \\ x - rz + k_2 s &= 0, \\ ry - sx + k_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten der vorstehenden Gleichungen folgt:

$$(k_1 k_2 + z^2)\, r = \quad xz + k_2 y,$$
$$(k_1 k_2 + z^2)\, s = -yz + k_1 x,$$

und wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen und der dritten der vorhergehenden drei Gleichungen r und s eliminiren:

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 + k_1 k_2 k_3 = 0,$$

oder:

$$\frac{x^2}{k_2 k_3} + \frac{y^2}{k_1 k_3} + \frac{z^2}{k_1 k_2} + 1 = 0. \tag{46}$$

Diese Gleichung bleibt ungeändert dieselbe, wenn die Werthe der drei Constanten k_1, k_2, k_3 gleichzeitig ihr Zeichen ändern. Dann treten an die Stelle der drei gegebenen Complexe drei andere, deren drei Durchmesser nach wie vor in die drei Coordinaten-Axen fallen und deren drei Parameter bloss ihr Zeichen geändert haben, das heisst, die drei neuen Complexe sind entgegengesetzt gewunden, als die drei gegebenen. Darin ist die doppelte Erzeugung der Fläche ausgesprochen. Die Linien der einen Erzeugung gehören gleichzeitig den drei ursprünglichen, die der anderen gleichzeitig den drei neuen Complexen an.

125. Wenn die Parameter der drei ursprünglichen Complexe sämmtlich positiv und demnach die Parameter der drei neuen Complexe negativ sind, oder umgekehrt, wenn jene negativ und diese positiv sind, so ist die Fläche imaginär. In allen übrigen Fällen, so lange die Werthe der Parameter reell bleiben, ist die Fläche ein einschaliges Hyperboloid. Dann stimmen die Werthe zweier der drei Parameter der beiden Gruppen von Complexen im Zeichen überein, und der Werth des jedesmaligen dritten Parameters hat das entgegengesetzte Zeichen. Je nachdem der Parameter des ersten, zweiten oder dritten Complexes der Gruppe im Zeichen von den Parametern der beiden übrigen Complexe abweicht, fällt die imaginäre Axe des Hyperboloids bezüglich in die Coordinaten-Axen OX, OY, OZ. In dem ersten Falle erhalten wir:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1, \tag{47}$$

indem wir:

$$\left.\begin{aligned} k_2 k_3 &= \quad a^2, \\ k_1 k_3 &= -b^2, \\ k_1 k_2 &= -c^2 \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

setzen.

Wenn wir den vorstehenden Entwickelungen statt Punct-Coordinaten

Linien-Coordinaten zu Grunde legen und demnach die Linien der Complexe, statt als Strahlen, als Axen betrachten, so erhalten wir für dieselbe Linienfläche, die nunmehr als Axenfläche auftritt, die folgende Gleichung:

$$k_2 k_3 t^2 + k_1 k_3 u^2 + k_1 k_2 v^2 + 1 = 0. \tag{49}$$

126. Jeder gegebenen geraden Linie im Raume sind die Durchmesser eines der unendlich vielen Durchmesser einer dreigliedrigen Gruppe parallel. Wir können daher die drei Coordinaten-Axen als Durchmesser dreier Complexe betrachten, durch welche eine Linienfläche bestimmt ist. In dem Falle rechtwinkliger Coordinaten-Axen stellen die Gleichungen (45) drei Complexe dar, deren drei Axen in die drei Axen der Linienfläche fallen. Die Hauptparameter der drei Complexe sind k_1, k_2, k_3. Wenn wir als Coordinaten-Axen irgend drei zugeordnete Durchmesser derselben Linienfläche nehmen, stellt die Gleichung (45) immer noch drei Complexe der dreigliedrigen Gruppe dar. Nur sind dann k_1, k_2, k_3 nicht mehr die Hauptparameter der drei Complexe, sondern die Parameter derjenigen drei Durchmesser derselben, welche mit den drei Coordinaten-Axen zusammenfallen. Diese drei Parameter wollen wir zur Unterscheidung durch k_1^0, k_2^0, k_3^0 bezeichnen und den drei obigen Constanten ihre Bedeutung als Hauptparameter der drei Complexe lassen. Drei Complexe der dreigliedrigen Gruppe, deren Durchmesser irgend dreien zugeordneten Durchmessern der durch diese Gruppe bestimmten Linienfläche parallel sind, wollen wir, in Beziehung auf die Linienfläche, drei conjugirte Complexe nennen. Es seien ε'', ε', ε die drei Winkel XOY, XOZ, YOZ, welche die drei Coordinaten-Axen, paarweise genommen, mit einander bilden, und δ'', δ', δ, die Neigungs-Winkel von OZ gegen XY, von OY gegen XZ, von OX gegen YZ. Dann sind die drei Ausdrücke:

$$\sin\varepsilon''\sin\delta'', \qquad \sin\varepsilon'\sin\delta', \qquad \sin\varepsilon\sin\delta$$

einander gleich. Bezeichnen wir sie, der Kürze wegen, durch γ, so erhalten wir:

$$k_1^0 = \frac{k_1}{\gamma}, \quad k_2^0 = \frac{k_2}{\gamma}, \quad k_3^0 = \frac{k_3}{\gamma},$$

und hieraus:

$$k_1^0 : k_2^0 : k_3^0 = k_1 : k_2 : k_3. \tag{50}$$

Setzen wir, den Gleichungen (48) entsprechend,

$$\left.\begin{aligned} k_2^0 k_3^0 &= a_0^2, \\ k_1^0 k_3^0 &= -b_0^2, \\ k_1^0 k_2^0 &= -c_0^2, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

so erhalten wir für die Gleichung der Linienfläche in schiefwinkligen Coordinaten:

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{c_0}\right)^2 = -1. \tag{52}$$

Es bedeuten $a_0 \sqrt{-1}$, b_0, c_0 diejenigen Halbdurchmesser der Fläche, welche mit den drei Coordinaten-Axen OX, OY, OZ zusammenfallen. Setzen wir

$$\gamma^2 \cdot a_0^2\, b_0^2\, c_0^2 = \Theta^2, \tag{53}$$

so ist bekanntlich Θ eine Grösse, welche sich nicht ändert, wenn wir statt der drei gegebenen zugeordneten Durchmesser der Fläche irgend drei andere zugeordnete Durchmesser zu Coordinaten-Axen nehmen.

127. Wenn wir gliedweise die beiden letzten Gleichungen (51) mit einander multipliciren und durch die erste dieser Gleichungen dividiren, so kommt:

$$k_1^{0\,2} = \frac{b_0^2\, c_0^2}{a_0^2},$$

und wenn wir k_1 statt k_1^0 einführen:

$$k_1^2 = \gamma^2 \frac{b_0^2\, c_0^2}{a_0^2} = \frac{\Theta^2}{a_0^4}.$$

Hiernach ist:

$$k_1 = \pm \frac{\Theta}{a_0^2}. \tag{54}$$

k_1 ist der Hauptparameter desjenigen Complexes der dreigliedrigen Gruppe, dessen Durchmesser der Axe OX parallel sind und a_0^2 (mit entgegengesetztem Zeichen genommen) das Quadrat desjenigen Halbdurchmessers der Fläche, welcher in diese Axe fällt. Da wir von vorne herein als Coordinaten-Axe jeden beliebigen Durchmesser der Linien-Fläche nehmen können (wobei, je nachdem der neue Durchmesser die Fläche schneidet oder nicht, a_0^2 mit positivem oder negativem Zeichen genommen werden muss), ergibt sich der folgende Satz unmittelbar:

Der Hauptparameter desjenigen Complexes einer dreigliedrigen Gruppe, dessen Durchmesser irgend einem Durchmesser der durch die Gruppe bestimmten Linienfläche parallel sind, ist umgekehrt dem Quadrate der Länge des Durchmessers der Fläche proportional.

128. Einer beliebigen durch den Anfangspunct gelegten Ebene ist gleichzeitig ein Durchmesser der Linien-Fläche, der Hauptdurchmesser einer Congruenz, der diese Fläche angehört, und ein Durchmesser eines Complexes

der dreigliedrigen Gruppe, durch welche die Fläche bestimmt wird, zugeordnet. Dieselben Ebenen, welche dem Durchmesser der Fläche zugeordnet sind, sind der Central-Ebene der Congruenz parallel und in dem Complexe ebenfalls dem mit dem Durchmesser der Fläche zusammenfallenden Durchmesser zugeordnet. Es folgt dies unmittelbar aus den Gleichungen der drei conjugirten Complexe (45), durch welche, auch in der Annahme schiefwinkliger Coordinaten, eine Linienfläche bestimmt wird. Dem Durchmesser eines der drei Complexe, welcher in eine der drei Coordinaten-Axen fällt, ist die Coordinaten-Ebene, welche durch die beiden andern Coordinaten-Axen geht, zugeordnet, und dieselbe Ebene ist einerseits die Central-Ebene derjenigen Congruenz, welche durch die beiden übrigen Complexe bestimmt wird und andererseits die Diametral-Ebene der Fläche, die demjenigen Durchmesser derselben conjugirt ist, welcher mit dem Durchmesser des Complexes zusammenfällt.

Ein Complex einer dreigliedrigen Gruppe ist vollkommen bestimmt, wenn die Richtung seiner Durchmesser gegeben ist. In der vorigen Nummer haben wir, vermittelst der entsprechenden Linien-Fläche, in einfachster Weise seinen Parameter erhalten. Die vorstehenden Erörterungen geben uns für einen seiner Durchmesser die zugeordneten Ebenen. Die Construction seiner Axe ist hiernach auf die 46. Nummer zurückgeführt.

Man trage auf demjenigen Durchmesser der Fläche, welcher die gegebene Durchmesser-Richtung des Complexes hat, vom Mittelpuncte aus den Parameter des Complexes auf und projicire denselben auf die dem Durchmesser zugeordnete Diametral-Ebene der Fläche. Der Parameter ist nach der vorigen Nummer, wenn wir die Länge des Halbdurchmessers der Fläche durch r_0^2 bezeichnen, gleich $\frac{\Theta}{r_0^2}$, die Projection desselben, wenn wir den Winkel, den der Durchmesser der Fläche mit der ihr conjugirten Ebene bildet, δ_0 nennen, gleich

$$\frac{\Theta}{r_0^2} \cos \delta_0 .$$

Wenn wir dann den Durchmesser der Fläche, parallel mit sich selbst, von der projicirenden Ebene um eine Strecke entfernen, die dieser Projection gleich ist, so ist der verschobene Durchmesser der Fläche in der neuen Lage die Axe des Complexes.

Diese Verschiebung kann nach entgegengesetzter Richtung vorgenommen werden. Dem entsprechend erhalten wir die beiden gleichweit vom Mittelpuncte abstehenden, unter sich parallelen Axen zweier verschiedenen Complexe. Diesen beiden Complexen gehören die beiden verschiedenen Erzeugungen der Linienfläche an.

129. Wir erhalten für die Parameter der bezüglich in OX, OY, OZ fallenden Durchmesser der drei conjugirten Complexe:

$$k_1^0 = \pm \frac{b^0 c^0}{a^0}, \qquad k_2^0 = \mp \frac{a_0 c_0}{b_0}, \qquad k_3^0 = \mp \frac{a_0 b_0}{c_0}, \tag{55}$$

und für die Hauptparameter dieser Complexe:

$$k_1 = \pm \frac{\Theta}{a_0^2}, \qquad k_2 = \mp \frac{\Theta}{b_0^2}, \qquad k_3 = \mp \frac{\Theta}{c_0^2}. \tag{56}$$

In Gemässheit der Gleichungen (58) haben k_2^0 und k_3^0 übereinstimmende Zeichen und k_1^0 weicht von ihnen im Zeichen ab, woraus unter Berücksichtigung der Proportionen (50) folgt, dass auch k_3 und k_2 unter sich gleiche, mit k_1 entgegengesetzte Zeichen haben. Wir müssen demnach sowohl in den Gleichungen (55) als auch in den Gleichungen (56) die drei obern und die drei untern Zeichen zusammennehmen.

Wenn wir die drei Gleichungen (55) gliedweise mit einander multipliciren, so kommt:

$$k_1^0\, k_2^0\, k_3^0 = \pm a_0\, b_0\, c_0. \tag{57}$$

D a s P r o d u c t d e r P a r a m e t e r d e r j e n i g e n D u r c h m e s s e r d r e i e r c o n j u g i r t e r C o m p l e x e , w e l c h e m i t d e n d r e i z u g e o r d n e t e n D u r c h m e s s e r n d e r L i n i e n f l ä c h e z u s a m m e n f a l l e n , i s t d e m P r o d u c t e d e r d r e i h a l b e n D u r c h m e s s e r d e r F l ä c h e g l e i c h .

Wenn wir die drei Gleichungen (56) gliedweise mit einander multipliciren, so kommt:

$$k_1\, k_2\, k_3 = \pm \frac{\Theta^3}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} = \pm \gamma^3 .\, a_0\, b_0\, c_0 = \pm \gamma^2 .\, abc,$$

mithin

$$\frac{k_1 k_2 k_3}{abc} = \pm \gamma^2. \tag{58}$$

Aus denselben drei Gleichungen (56) erhalten wir ferner:

$$(a_0^2 - b_0^2 - c_0^2) = \pm \Theta \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)$$

und hieraus:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \pm \frac{a^2 - b^2 - c^2}{abc}. \tag{59}$$

D i e S u m m e d e r r e c i p r o k e n W e r t h e d e r P a r a m e t e r i r g e n d dreier, in Beziehung auf eine gegebene Linienfläche zugeordneter, Complexe ist constant.

130. Wir wollen die Axen der Complexe einer dreigliedrigen Gruppe, durch welche eine Linienfläche bestimmt ist, parallel mit sich selbst verschieben, bis sie durch den Mittelpunct der Fläche gehen und dann, indem wir die Durchmesser der Fläche als Leitstrahlen betrachten, auf jedem derselben vom Mittelpuncte aus den Hauptparameter desjenigen Complexes auftragen, der diesen Durchmesser auch zu dem seinigen hat. Dann erhalten wir eine neue Fläche, welche in Beziehung auf die Linienfläche dieselbe Rolle spielt, als die characteristische Curve einer Linienfläche in Beziehung auf diese. Wir wollen die neue Fläche die characteristische Fläche der Linienfläche nennen.

Wenn wir irgend einen Leitstrahl der characteristischen Fläche durch r und den entsprechenden Leitstrahl der Linienfläche durch r_1 bezeichnen, so ist:

$$r = \pm \frac{\Theta}{r_1^2}.$$

Wir wollen die Linienfläche (47) auf ihre drei Axen als Coordinaten-Axen beziehen. Indem wir dann diejenigen drei Winkel, welche ein beliebiger Leitstrahl r_1 mit den drei Axen bildet, α, β, γ nennen, können wir die Gleichung dieser Fläche in der nachstehenden Weise schreiben:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2} = -\frac{1}{r_1^2},$$

und erhalten die Gleichung der characteristischen Fläche, wenn wir in dieser Gleichung für $\frac{1}{r_1^2}$ seinen Werth $\pm\frac{r}{\Theta}$ einsetzen. Auf diesem Wege ergibt sich:

$$\Theta\left\{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right\} = \pm r,$$

und wenn wir zu den rechtwinkligen Punct-Coordinaten zurückgehen:

$$\Theta\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right\} = \pm r^3. \tag{60}$$

Wenn wir die beiden Seiten der letzten Gleichung quadriren und für r^2 und Θ^2 bezüglich $(x^2 + y^2 + z^2)$ und $a^2 b^2 c^2$ schreiben, so kommt:

$$a^2 b^2 c^2\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right\}^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^3, \tag{61}$$

oder:

$$(b^2 c^2 x^2 - a^2 c^2 y^2 - a^2 b^2 z^2)^2 = a^2 b^2 c^2 (x^2 + y^2 + z^2)^3. \tag{62}$$

131. Die vollständige characteristische Fläche zerfällt in zwei Theile, welche einzeln durch die Gleichung (60) dargestellt werden, wenn wir in dieser Gleichung r nach einander mit entgegengesetztem Vorzeichen nehmen. Es gibt immer zwei dreigliedrige Gruppen von Complexen, welche in einer solchen geometrischen Beziehung zu einander stehen, dass die Complexe der beiden Gruppen sich bloss dadurch von einander unterscheiden, dass ihre Parameter entgegengesetzte Zeichen haben. Solchen zwei Complex-Gruppen entsprechen die beiden Erzeugungen derselben Fläche. Es gibt also insbesondere auch zwei Systeme von drei conjugirten Complexen, deren Durchmesser irgend dreien zugeordneten Durchmessern der Linienfläche parallel und deren Parameter bezüglich gleich aber von entgegengesetztem Zeichen sind. Durch die beiden Gruppen zugeordneter Complexe sind die beiden Erzeugungen der Linienfläche bestimmt. Die characteristische Fläche bezieht sich gleichmässig auf beide Erzeugungen.

132. In Gemässheit der Relationen (48) können wir in die Gleichung der characteristischen Fläche, statt der drei Halbaxen der Linienfläche, die Hauptparameter derjenigen drei conjugirten Complexe einführen, deren Durchmesser den Axen der Linienfläche parallel sind. Auf diese Weise finden wir:

$$(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^3, \tag{63}$$

während die Gleichung der Linienfläche selbst, nach Einführung derselben Constanten, die folgende wird:

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 = k_1 k_2 k_3. \tag{64}$$

Wenn wir in der Gleichung (63) nach einander x, y, z gleich Null setzen, so erhalten wir für die Durchschnitts-Curven der characteristischen Fläche mit den drei Coordinaten-Ebenen:

$$\left.\begin{aligned}(k_1 x^2 + k_2 y^2)^2 &= (x^2 + y^2)^3,\\ (k_1 x^2 + k_3 z^2)^2 &= (x^2 + z^2)^3,\\ (k_2 y^2 + k_3 z^2)^2 &= (y^2 + z^2)^3.\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Durch drei conjugirte Complexe einer Linienfläche, paarweise genommen, sind drei Congruenzen bestimmt, die wir ihrerseits als drei conjugirte Congruenzen der Linienfläche bezeichnen können. Den beiden Systemen dreier conjugirter Complexe, deren Durchmesser den drei Axen der Linienfläche parallel sind, entsprechen zwei Systeme dreier conjugirter Congruenzen, deren jede eine Axe der Linienfläche zur Hauptaxe und die jedesmaligen beiden andern Axen derselben zu Nebenaxen hat. Die drei Congruenzen eines der beiden Systeme entsprechen einer der drei Congruenzen des andern Systems der andern Erzeugung der Linienfläche. Die erste der drei Gleichungen (67) stimmt vollkommen mit der Gleichung (149) des vorigen Paragraphen überein. Daraus entnehmen wir den folgenden Satz:

Die drei Durchschnitts-Curven der characteristischen Fläche einer gegebenen Linienfläche mit den drei Hauptschnitten XY, XZ, YZ dieser letztern Fläche sind, in diesen Hauptschnitten, die Projectionen der characteristischen Curven dreier conjugirter Congruenzen, welche bezüglich OZ, OY, OX zu ihren Hauptaxen haben.*)

Wir verweisen, was die Discussion der Durchschnitts-Curven (67) betrifft, auf den vorigen Paragraphen und bemerken bloss, dass die in XY und XZ liegenden Durchschnitts-Curven aus vier Schleifen bestehen und im Mittelpuncte der Fläche einen vierfachen Punct haben, während für die in YZ liegende Durchschnitts-Curve dieser Punct ein isolirter ist.

133. Um die Gleichung der characteristischen Fläche (63) zu befriedigen, können wir gleichzeitig:

$$\left.\begin{aligned} k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 &= \pm \varkappa \cdot k_1 k_2 k_3, \\ x^2 + \quad y^2 + \quad z^2 &= \varkappa_0 \sqrt[3]{k_1^2\, k_2^2\, k_3^2} \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

setzen, indem wir durch $\varkappa$ und $\varkappa_0$ zwei beliebige Constanten bezeichnen, zwischen denen die folgende Relation besteht:

$$\varkappa^2 = \varkappa_0^3.$$

Diese Relation wird insbesondere befriedigt, wenn die beiden Constanten gleich Eins sind. Es lässt sich eine characteristische Fläche durch eine räumliche Curve beschreiben, welche der Durchschnitt einer Kugel mit zwei Flächen zweiter Ordnung ist. Diese Curve bestimmt in jeder ihrer Lagen solche Complexe, deren Parameter, abgesehen vom Zeichen, gleich sind.

In unserm Falle ist die gegebene Linienfläche ein einschaliges Hyperboloid. Führen wir in die letzten beiden Gleichungen statt der Parameter die Halbaxen-Quadrate desselben wieder ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \pm \varkappa, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \varkappa_0 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

*) Den Satz des Textes können wir auf drei beliebige zugeordnete Complexe einer gegebenen Linienfläche und die drei entsprechenden zugeordneten Durchmesser ausdehnen.

Wenn wir $\varkappa$ und $\varkappa_0$ gleich Eins setzen, so stellt die erste der beiden vorstehenden Gleichungen, wenn wir das untere Vorzeichen nehmen, das gegebene einschalige Hyperboloid dar, wenn wir das obere Zeichen nehmen, ein zweischaliges Hyperboloid. Die beiden Hyperboloide haben denselben Asymptoten-Kegel und die Quadrate irgend zweier gleichgerichteter Durchmesser derselben sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Ein einschaliges und zweischaliges Hyperboloid, welche in dieser gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, wollen wir überhaupt zwei zusammengehörige Hyperboloide nennen.

Die characteristische Fläche eines gegebenen einschaligen Hyperboloids geht durch die Curve, nach welcher das gegebene einschalige Hyperboloid und das mit diesem zusammengehörige zweischalige Hyperboloid von einer Kugel geschnitten wird, deren Radius der Cubik-Wurzel aus dem Producte der drei Halbaxen des gegebenen einschaligen Hyperboloids gleich ist.

Wenn wir die linearen Dimensionen der beiden Hyperboloide im quadratischen, den Radius der so bestimmten Kugel im cubischen Verhältnisse continuirlich wachsen lassen, so beschreiben die Durchschnitts-Curven die characteristische Fläche.

134. Die vollständige characteristische Fläche theilt sich in zwei Theile, die durch den Asymptoten-Kegel von einander getrennt sind. Der eine Theil besteht aus Curven-Zügen, die auf den einschaligen Hyperboloiden liegen. Durch ihn sind die Parameter solcher Complexe bestimmt, deren Durchmesser den reellen Durchmessern des gegebenen einschaligen Hyperboloids parallel sind. Der andere Theil besteht aus Curven-Zügen, die auf den zweischaligen Hyperboloiden liegen. Durch ihn sind die immer reellen Parameter derjenigen Complexe bestimmt, deren Durchmesser den (ihrer Länge nach) imaginären Durchmesser des gegebenen einschaligen Hyperboloids parallel sind. Während die Durchmesser der Fläche, durch die Seiten des Asymptoten-Kegels hindurchgehend, unendlich gross werden, werden die entsprechenden Parameter gleich Null. Diesem Durchgange entspricht der Uebergang zwischen reellen und imaginären Durchmessern der Fläche, zwischen positiven und negativen Parametern der Complexe.

135. Wir haben bisher bloss das einschalige Hyperboloid betrachtet, dessen Erzeugende reelle gerade Linien sind. Der imaginären Linienfläche, die wir imaginäres Ellipsoid nennen wollen, entspricht, dass die Para-

meter der drei Central-Complexe dasselbe Zeichen haben. Wenn wir dem entsprechend

$$\begin{aligned} k_2 k_3 &= a^2, \\ k_1 k_3 &= b^2, \\ k_1 k_2 &= c^2 \end{aligned} \tag{70}$$

setzen, erhalten wir für das imaginäre Ellipsoid folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \tag{71}$$

Aber die Gleichung (64), welche die Linienfläche darstellt, bleibt auch dann noch reell, wenn die Parameter der drei Central-Complexe gleichzeitig imaginär werden. Wenn wir für k_1, k_2, k_3 die imaginären Werthe $k_1' \sqrt{-1}$, $k_2' \sqrt{-1}$, $k_3' \sqrt{-1}$ einsetzen, geht diese Gleichung in die folgende über:

$$k_1' x^2 + k_2' y^2 + k_3' z^2 = - k_1' k_2' k_3'. \tag{72}$$

Hier haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden: entweder haben von den drei neuen Constanten nur zwei dasselbe Zeichen und die dritte hat das entgegengesetzte Zeichen, oder die Zeichen derselben stimmen sämmtlich überein. In dem ersteren Falle können wir

$$\begin{aligned} k_2' k_3' &= a^2, \\ k_1' k_3' &= -b^2, \\ k_1' k_2' &= -c^2 \end{aligned} \tag{73}$$

setzen und erhalten:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{74}$$

Dann ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid. In dem zweiten Falle können wir

$$\begin{aligned} k_2' k_3' &= a^2, \\ k_1 k_3 &= b^2, \\ k_1 k_2 &= c^2 \end{aligned} \tag{75}$$

setzen und erhalten:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{76}$$

Dann ist die Fläche ein Ellipsoid.

In jedem Puncte des zweischaligen Hyperboloids und des Ellipsoids schneiden sich zwei imaginäre Erzeugende. Die Flächen werden in doppelter Weise von imaginären geraden Linien erzeugt, die beiden imaginären geraden Linien, welche in jedem Puncte der Flächen sich schneiden, gehören den beiden Erzeugungen derselben an.

136. Die Betrachtungen über characteristische Flächen in der 133. Nummer runden sich erst dann ab, wenn wir neben der characteristischen Fläche des einschaligen Hyperboloids auch die characteristische Fläche der imaginären Linienfläche, welche reell bleibt, und die imaginären characteristischen Flächen des zweischaligen Hyperboloids und des Ellipsoids betrachten.

Das einschalige und das zweischalige Hyperboloid, welche durch die beiden Gleichungen (47) und (74) dargestellt werden, haben wir, in dem Falle, dass $k_1 = k_1'$, $k_2 = k_2'$, $k_3 = k_3'$, zwei zusammengehörige Hyperboloide genannt. Unter derselben Voraussetzung sagen wir, dass das imaginäre und reelle Ellipsoid, welche durch die Gleichungen (72) und (76) dargestellt werden, zusammengehören.

Um die Gleichung der characteristischen Fläche für das imaginäre Ellipsoid (72) zu erhalten, brauchen wir bloss in der Gleichung dieser Fläche für das einschalige Hyperboloid (47) die Zeichen von b^2 und c^2 zu ändern. Dann kommt statt (61):

$$a^2 b^2 c^2 \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\}^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^3, \tag{77}$$

und wir erhalten statt (69) die folgenden beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \pm \varkappa, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \varkappa_0 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

wobei zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_0$ die frühere Bedingungs-Gleichung fortbesteht. Die characteristische Fläche besteht hier aus einem reellen und einem imaginären Theile. Diese beiden Theile werden bezüglich von Curven erzeugt, nach welchen zusammengehörige reelle und imaginäre Ellipsoide von Kugeln geschnitten werden. Unter den imaginären Ellipsoiden befindet sich insbesondere das gegebene. Das mit diesem zusammengehörige reelle Ellipsoid wird von der characteristischen Fläche immer in einer reellen Curve geschnitten, die gleichzeitig auf einer Kugel liegt, deren Radius der dritten Wurzel aus dem Producte der drei Halbaxen dieses Ellipsoids gleich ist.

Wenn die Gleichung der für den Fall des einschaligen Hyperboloids und des imaginären Ellipsoids reellen characteristischen Fläche (63) auf den Fall des zweischaligen Hyperboloids und des reellen Ellipsoids bezogen werden soll, so müssen wir k_1, k_2, k_3 mit $k_1'\sqrt{-1}$, $k_2'\sqrt{-1}$, $k_3'\sqrt{-1}$ vertauschen. Dann wird das Quadrat des Leitstrahles der characteristischen Fläche negativ, die Fläche selbst also imaginär. Wir erhalten aber eine neue reelle Fläche, wenn wir für den imaginären Leitstrahl $r\sqrt{-1}$ nehmen. Dann kommt:

$$(k_1' x^2 + k_2' y^2 + k_3' z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^3,$$

und wenn insbesondere $k_1 = k_1'$, $k_2 = k_2'$, $k_3 = k_3'$, ist diese Gleichung dieselbe, von der wir ausgegangen sind.

Die characteristische Fläche eines einschaligen Hyperboloids bestimmt also zugleich die imaginären Parameter aller Complexe des zugehörigen zweischaligen Hyperboloids, so wie die characteristische Fläche eines imaginären Ellipsoids zugleich die imaginären Parameter aller Complexe des zugehörigen reellen Ellipsoids bestimmt.

137. Wir haben in der 98. Nummer vier verschiedene Arten von Congruenzen unterschieden. Jeder Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung und Classe, welche einen Mittelpunct hat, fällt, der Richtung und Grösse nach, mit dem Hauptdurchmesser einer Congruenz, der die Fläche angehört, zusammen. Es entspricht hierbei jedem Durchmesser des einschaligen Hyperboloids eine Congruenz der ersten oder zweiten Art, je nachdem dieser Durchmesser das Hyperboloid schneidet oder nicht schneidet. Den Uebergang bezeichnet der Fall, dass die beiden Directricen der Congruenz in einer Asymptote der Fläche zusammenfallen.

Jedem Durchmesser eines imaginären Ellipsoids entspricht eine Congruenz der zweiten Art.

Jedem Durchmesser eines zweischaligen Hyperboloids entspricht, je nachdem er die Fläche schneidet oder nicht schneidet, eine Congruenz der dritten oder vierten Art.

Jedem Durchmesser eines reellen Ellipsoids entspricht eine Congruenz der dritten Art.

138. Von den vorstehenden Entwickelungen sind diejenigen Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe ausgeschlossen, welche keinen Mittelpunct haben und einmal von reellen, das andere Mal von imaginären geraden Linien erzeugt werden: das hyperbolische und elliptische Paraboloid.

139. Wir haben bereits früher in der 111. Nummer eine Fläche zweiter Ordnung durch drei Complexe bestimmt, deren Parameter gleich Null sind. Es kommt dies darauf hinaus, die Axen solcher drei Complexe als Linien der zweiten Erzeugung der Fläche zu betrachten, die von den Linien ihrer ersten Erzeugung geschnitten werden. Durch die drei Linien der zwei-

ten Erzeugung haben wir drei beliebige Ebenen gelegt und diese Ebenen zu Coordinaten-Ebenen genommen. Dann berührt die Fläche diese drei Ebenen. Diese Ebenen schneiden die Fläche, ausser in den drei Linien der zweiten Erzeugung, auch noch in drei Linien der ersten Erzeugung. In jeder dieser Ebenen ist der Durchschnitt der beiden Linien der zwiefachen Erzeugung der Punct, in welchem dieselbe von der Fläche berührt wird. Unter analogen Voraussetzungen können wir auch das zweischalige Hyperboloid und das Ellipsoid bestimmen. Wir nehmen irgend drei Tangential-Ebenen einer dieser Flächen zu Coordinaten-Ebenen. Dann geht jede dieser Ebenen durch zwei conjugirt imaginäre Linien der Fläche und diese Linien schneiden sich in dem reellen Puncte, in welchem die Ebene von der Fläche berührt wird. Wir wollen in Uebereinstimmung hiermit, indem wir zur angezogenen Nummer zurückgehen,

$$\left.\begin{aligned} t',\ t'' &= t_0 \pm t_0'\sqrt{-1}, \\ u',\ u'' &= u_0 \pm u_0'\sqrt{-1}, \\ v',\ v'' &= v_0 \pm v_0'\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

setzen. Dann gehen die Gleichungen (12) und (13) dieser Nummer, welche die drei Linien der zweiten und die drei Linien der ersten Erzeugung, welche in den drei Coordinaten-Ebenen liegen, darstellen, in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned} (t_0 + t_0'\sqrt{-1})x + (u_0 - u_0'\sqrt{-1})y + 1 = 0, \\ (v_0 + v_0'\sqrt{-1})z + (t_0 - t_0'\sqrt{-1})x + 1 = 0, \\ (u_0 + u_0'\sqrt{-1})y + (v_0 - v_0'\sqrt{-1})z + 1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

und

$$\left.\begin{aligned} (t_0 - t_0'\sqrt{-1})x + (u_0 + u_0'\sqrt{-1})y + 1 = 0, \\ (v_0 - v_0'\sqrt{-1})z + (t_0 + t_0'\sqrt{-1})x + 1 = 0, \\ (u_0 - u_0'\sqrt{-1})y + (v_0 + v_0'\sqrt{-1})z + 1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Die Coordinaten der drei Berührungspuncte in den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-u_0'}{t_0 u_0' + t_0' u_0}, & y_2 &= \frac{-t_0'}{t_0 u_0' + t_0' u_0}, \\ x_2 &= \frac{-v_0'}{t_0 v_0' + t_0' v_0}, & z_1 &= \frac{-t_0'}{t_0 v_0' + t_0' v_0}, \\ y_1 &= \frac{-v_0'}{u_0 v_0' + u_0' v_0}, & z_2 &= \frac{-u_0'}{u_0 v_0' + u_0' v_0}.^{*)} \end{aligned} \tag{82}$$

*) Die Gleichungen (81) geben unmittelbar:

$$x_1 y_1 z_1 = x_2 y_2 z_2,$$

Wir erhalten für die Gleichung der Linienfläche aus (9):

$$1 + 2t_0 x + 2u_0 y + 2v_0 z + (t_0^2 + t_0'^2)x^2 + (u_0^2 + u_0'^2)y^2 + (v_0^2 + v_0'^2)z^2$$
$$+ 2(u_0 v_0 - u_0' v_0')yz + 2(t_0 v_0 - t_0' v_0')xz + 2(t_0 u_0 - t_0' u_0')xy = 0. \quad (83)$$

Je nachdem

$$(t_0^2 + t_0'^2)^2 > (t_0 v_0' - t_0' v)(t_0 v_0' - t_0' v_0),$$

oder

$$(t_0^2 + t_0'^2) < (t_0 v_0' - t_0' v_0)(t_0 v_0' - t_0' v_0),$$

stellt diese Gleichung ein zweischaliges Hyperboloid oder ein Ellipsoid dar.*)

Setzen wir in dieser Gleichung t_0, u_0, v_0 gleich Null, so kommt:

$$1 + t_0'^2 x^2 + u_0'^2 y^2 - v_0'^2 z^2 - 2u_0' v_0' yz - 2t_0' v_0' xz - 2t_0' u_0' xy = 0. \quad (84)$$

Dann ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid, das auf seinen Mittelpunct als Anfangspunct der Coordinaten bezogen ist.

140. Die Bestimmung des elliptischen Paraboloids ist der Bestimmung des hyperbolischen in der 114. Nummer ganz analog. Die Bedingungs-Gleichung (20) geht in die folgende über:

$$\frac{t_0}{t_0'} + \frac{u_0}{u_0'} + \frac{v_0}{v_0'} = 1. \quad (85)$$

Mit den Linien der beiden Erzeugungen werden die beiden Ebenen, denen sie parallel sind, conjugirt imaginär. Wir erhalten für dieselben die folgenden Gleichungen, welche wir in eine einzige zusammenziehen:

$$[(t_0 v_0 + t_0' v_0') \mp (t_0 v_0' - t_0' v_0)\sqrt{-1}]x + [(u_0 v_0 + u_0' v_0') \mp (u_0 v_0' + u_0' v_0)\sqrt{-1}]y$$
$$+ (v_0^2 + v_0'^2)z = 0 \quad (86)$$

und aus (24) zur Bestimmung der reellen Durchmesser-Richtung:

$$\frac{t_0^2 + t_0'^2}{t_0'}x = \frac{u_0^2 + u_0'^2}{u_0'}y = \frac{v_0^2 + v_0'^2}{v_0'}z. \quad (87)$$

141. Wir haben hiermit die sämmtlichen reellen Flächen der zweiten Ordnung und Classe durch die Gleichungen dreier linearer Complexe, deren Parameter verschwinden, dargestellt und aus den Systemen solcher drei Gleichungen die Gleichungen derselben in Punct-Coordinaten abgeleitet: das einschalige Hyperboloid (9), dasselbe bezogen auf seinen Mittelpunct (17), das hyperbolische Paraboloid (9), unter Voraussetzung der Bedingungs-Glei-

---

eine geometrische Beziehung zwischen irgend drei Tangential-Ebenen einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und Classe, welche zu discutiren hier nicht der Ort ist.

*) Geometrie des Raumes Nr. 26.

chung (20), das zweischalige Hyperboloid und das Ellipsoid (83), ersteres auf seinen Mittelpunct bezogen (84), und endlich, unter Voraussetzung der Bedingungs-Gleichung (85), das elliptische Paraboloid (86). Ausgeschlossen bleibt hier, für den Fall des zweischaligen Hyperboloids, des elliptischen Paraboloids und des Ellipsoids, die Annahme, dass der Anfangspunct der Coordinaten innerhalb der genannten Flächen liege. Für den Fall des einschaligen Hyperboloids gibt es kein Innerhalb und kein Ausserhalb. Die imaginäre Fläche ist ganz ausgeschlossen. Die Coordinaten-Bestimmung wird illusorisch, wenn der Anfangspunct auf der Fläche angenommen wird.

142. Dieselben Flächen der zweiten Ordnung und Classe, die wir durch drei lineare Gleichungen in Strahlen-Coordinaten dargestellt haben, haben wir in analoger Weise auch durch drei Gleichungen in Axen-Coordinaten dargestellt und, wie wir aus jenen die Gleichung der Flächen in Punct-Coordinaten abgeleitet haben, aus dieser die Gleichung derselben Flächen in Plan-Coordinaten abgeleitet. Die Gleichung (28), welche wir in der 115. Nummer erhalten haben, geht für solche reelle Flächen, welche nicht durch reelle gerade Linien erzeugt werden, in die folgende über:

$$\frac{((t-t_0)-t_0'\sqrt{-1})\,((u-u_0)-u_0'\sqrt{-1})\,((v-v_0)-v_0'\sqrt{-1})}{((t-t_0)+t_0'\sqrt{-1})\,((u-u_0)+u_0'\sqrt{-1})\,((v-v_0)+v_0'\sqrt{-1})}=1. \qquad (88)$$

Wenn wir entwickeln, verschwindet aus dieser Gleichung das Imaginäre.

143. Reelle und imaginäre Kegelflächen so wenig als reelle und imaginäre ebene Curven lassen sich durch drei lineare Gleichungen, weder in Strahlen-Coordinaten noch in Axen-Coordinaten, darstellen. Jene sind nicht als Flächen zweiter Classe, diese nicht als Flächen zweiter Ordnung zu betrachten.

144. Aber die Frage, ob die Linienflächen, die wir durch das Symbol:

$$\Omega+\mu\Omega'+\mu'\Omega''=0$$

dargestellt haben, durch Particularisation der Complexe Ω, Ω', Ω'' nicht dennoch in andere geometrische Gebilde ausarten können, ist hiermit nicht erledigt.

Wir wollen einem der drei Complexe seine ganze Allgemeinheit lassen, aber annehmen, dass die beiden anderen Complexe von der besonderem Art seien, dass sämmtliche Linien jedes derselben einer festen geraden Linie begegnen, und dass die beiden festen geraden Linien sich schneiden, oder, was dasselbe heisst, in derselben Ebene liegen. Wir wollen die beiden

Coordinaten-Axen OZ und OY mit ihnen zusammenfallen lassen. Dann stellen die Gleichungen

$$\Omega' \equiv \eta \equiv r\sigma - s\varrho = 0, \qquad \Omega'' \equiv \varrho = 0$$

die fraglichen beiden Complexe dar. Diese beiden Gleichungen haben zur Folge, dass entweder σ oder r gleich Null ist. Hiermit in Uebereinstimmung gehören einerseits alle Linien, deren Coordinaten die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Ar + Bs + C = 0, \\ \varrho = 0, \qquad \sigma = 0 \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

befriedigen, andererseits alle Linien, deren Coordinaten die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Bs + C - D\sigma = 0, \\ \varrho = 0, \qquad r = 0 \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

befriedigen, der durch die dreigliedrige Complex-Gruppe dargestellten Linienfläche an. Alle Linien, welche den drei Complexen (89) gleichzeitig angehören, liegen in der durch die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{91}$$

dargestellten Ebene und gehen, in dieser Ebene, durch den Anfangspunct der Coordinaten. Alle Linien, welche den drei Complexen (90) gleichzeitig angehören, liegen in der Coordinaten-Ebene YZ und gehen in dieser Ebene durch den Punct, der durch die Gleichung:

$$Cu - Bv + Dw = 0 \tag{92}$$

dargestellt wird. Die Ebene (91) bleibt dieselbe für alle Complexe der dreigliedrigen Gruppe:

$$(Ar - Bs + C) + \mu\varrho + \mu'\sigma = 0,$$

sie ist für alle die Ebene, welche dem Anfangspunct der Coordinaten entspricht. Der Punct (92) bleibt derselbe für alle Complexe der dreigliedrigen Gruppe:

$$(Bs + C - D\sigma) + \mu\varrho + \mu' r = 0,$$

er ist für alle der Punct, welcher der Coordinaten-Ebene YZ entspricht.

Die der so bestimmten Linienfläche angehörigen Linien liegen also in zwei Ebenen und gehen in jeder dieser beiden Ebenen durch einen festen Punct der Durchschnittslinie der beiden Ebenen. Die beiden Ebenen und die beiden Puncte entsprechen einander in allen Complexen der dreigliedrigen Gruppe.

Wir können die Linienfläche durch eine Gleichung zweiten Grades in Punct-Coordinaten darstellen. Dann erhalten wir die beiden eben bestimmten Ebenen; aber es verschwindet jede Spur der Erzeugung dieser Ebenen durch eine gerade Linie, welche innerhalb derselben um einen festen Punct sich dreht. Wenn wir uns der Plan-Coordinaten zur Darstellung der Linienfläche bedienen, so erhalten wir die beiden Puncte; es verschwindet aber jede Spur der Umhüllung dieser Puncte durch eine gerade Linie, welche in einer festen Ebene liegt.

145. Die geometrische Bestimmung der Linienfläche kommt in diesem Falle darauf hinaus, diejenigen geraden Linien zu bestimmen, welche zwei gegebene einander schneidende gerade Linien schneiden und überdiess einem gegebenen Complexe angehören. Diese Linien liegen entweder in der Ebene der beiden gegebenen geraden Linien und gehen durch den in dem Complexe dieser Ebene zugeordneten Punct, oder sie gehen durch den Durchschnittspunct der beiden gegebenen geraden Linien und liegen zugleich in derjenigen Ebene, welche in dem Complexe diesem Puncte entspricht.

Die vorstehenden geometrischen Betrachtungen ergänzen sich noch dadurch, dass unter den Complexen der Gruppe sich einer von der besondern Art befindet. Die feste Linie, die von allen Linien dieses Complexes geschnitten wird und welche im Allgemeinen den beiden gegebenen geraden Linien nicht begegnet, wird, wie diese, von den Linien der Linienfläche geschnitten. Diese Linienfläche ist im Allgemeinen ein einschaliges Hyperboloid, dessen Linien einer Erzeugung die drei gegebenen geraden Linien schneiden, artet aber, wenn zwei der drei gegebenen Linien sich schneiden, in ein System von zwei Ebenen, bezüglich in ein System von zwei Puncten aus.

Wenn die feste Linie einer der beiden gegebenen, sich schneidenden, gegeraden Linien begegnet, so ändert sich in den vorstehenden Beziehungen wesentlich nichts. Dann wird eine der drei Linien derselben Flächen-Erzeugung von den beiden übrigen in zwei Puncten geschnitten, oder, was dasselbe heisst, die drei Erzeugenden liegen in zwei Ebenen. Diese beiden Ebenen einerseits, die beiden Durchschnittspuncte andererseits sind diejenigen, in welche die Linienfläche ausartet.

146. Wenn insbesondere aber in den Complexen der dreigliedrigen Gruppe der Durchschnittspunct der beiden gegebenen geraden Linien der Ebene entspricht, welche durch diese Linie geht, so verschwinden die Constanten B und C in den vorstehenden analytischen Entwickelungen: dann fällt die Ebene (91) mit der Coordinaten-Ebene YZ, der Punct (92) mit dem Anfangspuncte der Coordinaten zusammen.

Die Linienfläche artet in diesem Falle in ein System von zwei zusammenfallenden Ebenen, bezüglich in ein System von zwei in diesen Ebenen zusammenfallenden Puncten aus.

147. Von dem zuletzt betrachteten Falle sind diejenigen wohl zu unterscheiden, in welchen ohne weitere Bedingung:

$$\sigma = 0, \qquad \varrho = 0, \qquad \eta = 0, \tag{93}$$

oder

$$r = 0, \qquad \varrho = 0, \qquad \eta = 0. \tag{94}$$

In dem ersten Falle befriedigen die dreigliedrige Complex-Gleichung die Coordinaten jeder durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie, in dem zweiten Falle die Coordinaten jeder in der Ebene YZ liegenden geraden Linie.

So wie zwei zusammenfallende Directricen erst dann eine Congruenz bestimmen (Nr. 68), wenn die Bedingung hinzukommt, dass die Linien derselben einem gegebenen Complexe angehören, der eine mit den Directricen zusammenfallende Linie hat, so bestimmen drei durch denselben Punct gehende Erzeugenden eine Linienfläche erst dann, wenn noch die Bedingung hinzukommt, dass die Linien derselben einem gegebenen Complexe angehören. Wenn diese doppelte Bedingung fehlt, so erhalten wir in dem ersten Falle statt der Congruenz einen Complex von besonderer Art, dessen Linien die beiden zusammenfallenden Directricen schneiden. Im zweiten Falle bedingen zwei der drei Complex-Gleichungen:

$$\varrho = 0, \qquad \eta \equiv r\sigma - s\varrho = 0, \tag{95}$$

dass $r\sigma$ gleich Null werde, und dieser Bedingung kann sowohl durch das Verschwinden von σ als durch das Verschwinden von r entsprochen werden. Demnach sind die beiden vorstehenden Gleichungen einmal mit den drei Gleichungen (93), das andere Mal mit den drei Gleichungen (94) gleichbedeutend. Die Congruenz besonderer Art, welche durch die beiden Gleichungen (95) dargestellt wird und die Coordinaten-Axen OZ und OY zu Directricen hat, umschliesst (Nr. 68) einmal alle Linien, welche in YZ, der Ebene der beiden Directricen liegt, das andere Mal alle Linien, welche durch O, den Durchschnitt der beiden Directricen, gehen. Kommt in der Gleichung (93) die Bedingung $\sigma = 0$ hinzu, so werden dadurch von der Congruenz alle Linien, welche in der Ebene der beiden Directricen liegen und nicht durch ihren Durchschnitt gehen, ausgeschlossen. Kommt in der Gleichung (94) die Bedingung $r = 0$ hinzu, so werden dadurch von der Congruenz alle diejenigen Linien ausgeschlossen, welche durch den Durchschnitt der beiden Directricen gehen und nicht mit ihnen in derselben Ebene liegen. Wir können also sagen, dass die beiden Gleichungen (93) und (94) zusammen die Congruenz besonderer Art darstellen. Die Linien des einen Theiles der Congruenz umhüllen einen Punct, den wir als eine Linienfläche erster Classe betrachten und durch eine Gleichung in Plan-Coordinaten darstellen können. Die Linien des anderen Theiles der Congruenz liegen in einer Ebene, die wir als Linienfläche erster Ordnung betrachten und durch eine Gleichung in Punct-Coordinaten darstellen können.*)

148. Wir haben in dem vorliegenden Paragraphen, indem wir die gerade Linie, in ihrer doppelten geometrischen Bedeutung als Strahl und Axe, statt des Punctes und der Ebene, als Raumelement eingeführt haben, durch drei lineare Gleichungen zwischen Strahlen- oder Axen-Coordinaten eine Fläche der zweiten Ordnung und der zweiten Classe bestimmt, in der Art, dass jede einzelne ihrer beiden Erzeugungen durch drei solcher Gleichungen dargestellt wird. Während die Fläche und demnach ihre Tangential-Ebenen und in diesen die Berührungspuncte reell sind, können die beiden Durchschnittslinien der Tangential-Ebene mit der Fläche, die beiden Erzeugenden, welche durch den Berührungspunct gehen, sowohl reell als imaginär sein. Unter dem so erweiterten Gesichtspuncte können wir alle Flächen zweiter Ordnung und Classe als Linienflächen ansehen. Die gesammten Eigenschaften solcher Flächen lassen sich, wozu der Weg in dem Vorstehenden angebahnt ist, in gleicher Weise aus der Discussion der drei linearen Gleichungen zwischen Strahlen- und Axen-Coordinaten ableiten, wie diess bisher aus der Discussion einer quadratischen Gleichung in Punct- oder Ebenen-Coordinaten geschehen ist.

*) Um bei der analytischen Discussion der fraglichen particulären Fälle möglichen Irrthümern vorzubeugen, ist es im Allgemeinen räthlich, homogene Gleichungen zwischen den sechs Linien-Coordinaten zu Grunde zu legen. Wenn wir zum Beispiel in der vorstehenden analytischen Discussion die Coordinaten-Axen OZ und OX mit einander vertauschen, könnten wir leicht zu übereilten Schlüssen inducirt werden.